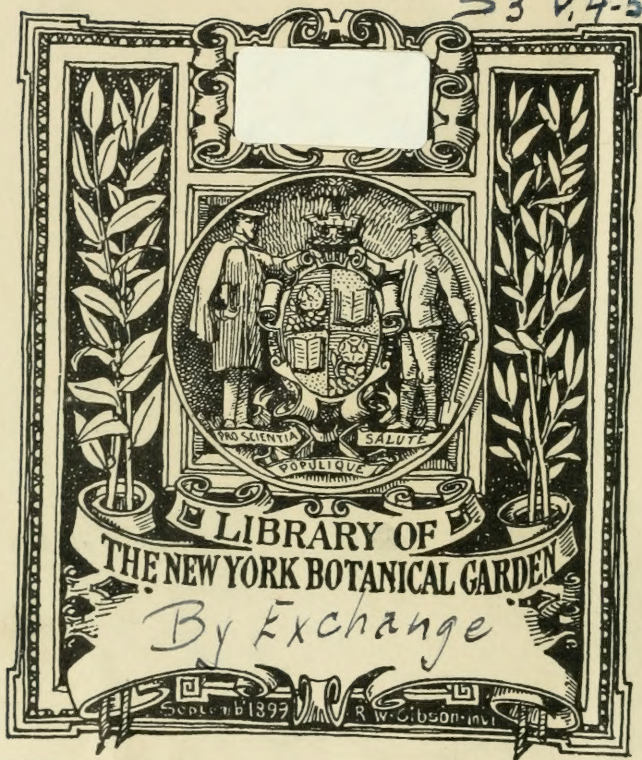

PRO SCIENTIA
SALUTE
POPULIQUE
LIBRARY OF
THE NEW YORK BOTANICAL GARDEN
By Exchange
R. W. Gibson inv

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. IV.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1919.

ARCHIVES DU MUSÉE TEYLER.
Série III, Vol. IV.

Burgers, J. M.—Het atoommodel van Rutherford-Bohr.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, xxi—xxxv, 1919, pp. 1—265.

Atoommodel van Rutherford-Bohr. Het—
J. M. Burgers.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, xxi—xxxv, 1919, pp. 1—265.

Dubois, Eug.—Over het ontstaan en de geologische geschiedenis van vennen, venen en zeeduinen.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 266—293.

Vennen, venen en zeeduinen. Over het ontstaan en de geologische geschiedenis van—
Eug. Dubois.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 266—293.

Bijvanck, W. G. C.—Spinoza en Molière.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 294—296.

Spinoza en Molière.
W. G. C. Bijvanck.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 294—296.

van der Vlugt, W.—De oude Atheners en wij.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 297—315.

De oude Atheners en wij.
W. van der Vlugt.
Arch. Mus. Teyler. Sér. iii, Vol. iv, 1919, pp. 297—315.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III. VOL. IV.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1919.

FONDATION

DE

P. TEYLER VAN DER HULST

à HAARLEM.

1919.

Directeurs: Mr. A. W. Thöne, président; J. J. van Oorde; J. A. Fontein; Vincent Loosjes; Mr. W. Cnoop Koopmans.

Secrétaire: Mr. W. F. C. C. Pijnacker Hordijk.

Trésorier: J. J. Doeglas.

Curateur du Laboratoire: Prof. Dr. H. A. Lorentz.

Conservateur du Cabinet de Physique: Balth. van der Pol Jr. [1]).

Conservateur du Musée de Paléontologie et de Minéralogie: Prof. Dr. Eug. Dubois.

Bibliothécaire: J. J. Verwijnen.

Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures: H. Buisman.

Conservateur du Cabinet numismatique: A. O. van Kerkwijk.

[1]) Pendant l'année 1918: J. M. Burgers.

MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLÉRIENNES.

Première Société ou Société de théologie: Dr. J. G. Boekenoogen; Prof. Dr. D. E. J. Völter; Prof. Dr. H. J. Elhorst; P. Feenstra Jr.; Prof. Dr. A. Bruining; Prof. Dr. T. Cannegieter.

Seconde Société: Prof. Dr. Hugo de Vries; Prof. Dr. P. J. Blok; Prof. Dr. H. A. Lorentz; A. O. van Kerkwijk; Dr. C. Hofstede de Groot; Prof. Dr. G. Kalff.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1918.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP hebben in hunne vergadering van 18 Oct. 1917 uitspraak gedaan over een nederlandsch en een duitsch antwoord, ingekomen op de prijsvraag:

„Het genootschap vraagt eene beschrijving van de Roomsch-Katholieke moraaltheologie in hare kenmerkende trekken en aanwijzing van het verband, waarin zij staat tot het Roomsch-Katholieke geloofssysteem in zijn geheel".

Het onder het motto „luctor et emergo" ingezonden nederlandsche antwoord is eene in gebrekkige taal en slechten stijl geschreven verhandeling van een blijkbaar niet wetenschappelijk geschoold man. Hij werkt met eene aan enkele leerboeken ontleende stof, maar is niet in staat de quaesties grondig aan te vatten en principiëel te beoordeelen. Het tweede gedeelte der prijsvraag (het verband, waarin de Roomsch-Katholieke Moraaltheologie staat tot het Roomsch-Katholieke geloofssysteem in zijn geheel) is zeer oppervlakkig door hem behandeld: nergens dringt de schrijver tot de kern der dingen door. Van eene bekroning van dit antwoord moest derhalve worden afgezien.

De schrijver van het onder het motto „Es ist eine herrliche Sache um die Unschuld" ingezonden duitsche antwoord vindt het motief tot het stellen van de prijsvraag in het feit, dat het monisme, hetwelk „morale indépendante" wil, gelijkelijk tegen protestantsche en Roomsch-Katholieke moraal zich kant en deze op éene lijn stelt. Daartegenover wil hij dan in het licht stellen, dat deze beide onderling nog principiëel verschillen. In dit opzicht nl.: dat de protestantsche theorie door de wedergeboorte èn het rechte zedelijke inzicht èn de kracht om dit in het leven te verwezenlijken gegeven acht, terwijl volgens de roomsche opvatting de zedelijke waarheden ook door den wedergeborene enkel op gezag der openbaring erkend worden en de weder-

geboorte alleen de kracht bijzet om ze in het leven te verwezenlijken. Maar zoodoende komt hij tot eene beschrijving der roomsche moraal uitsluitend of althans voornamelijk naar haar formeel karakter. Hoofdzaak in zijn stuk is de behandeling van het probabilisme, d. w. z. de uiteenzetting, hoe volgens roomsche opvatting de mensch tot een juist zedelijk oordeel komt. Daarnaast worden zeer kenmerkende eigenaardigheden van de roomsche moraal, als bv. het op den voorgrond treden van de sexueele moraal, de onderscheiding van geboden en raden of slechts terloops of in 't geheel niet vermeld. Het antwoord is derhalve alles behalve volledig. Met name zijn ook de alles beheerschende leidende gedachten der R. K. moraal niet voldoende in 't licht gesteld en is de nauwe samenhang van die moraal met de grondgedachten van de anthropologie der R. K. kerk niet duidelijk aangewezen. Ook is, ofschoon de schrijver erkent, dat in de R. K. moraaltheorie innerlijk-ethisch-religieuse psychologie wordt gemist (S. 50), dit feit slechts als in 't voorbijgaan vermeld en de beslissende beteekenis van dat gemis voor de R. K. moraal niet uiteengezet.

Maar al geeft de schrijver geen volledig antwoord, wat hij geeft is werkelijk wetenschappelijk werk. Hij geeft blijk van ernstige bronnenstudie, heeft de voornaamste nieuwere en oudere werken over roomsche moraal gebruikt en goed gebruikt. Hij streeft ernstig naar objectiviteit van oordeel en is daarin — enkele uitzonderingen daargelaten — inderdaad geslaagd. Het antwoord kan als een stuk van wetenschappelijke waarde beschouwd worden.

Om deze reden heeft het Genootschap besloten de verhandeling, waaraan zij de bekroning niet kon toekennen, onder de werken van het genootschap op te nemen en daaraan eene belooning van *tweehonderd* gulden te verbinden, wanneer de schrijver daartoe zijne toestemming verleent en zijn naam aan Directeuren van Teyler's Stichting bekend maakt. [1])

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

1. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1918:

„Het genootschap vraagt eene verhandeling over ZWINGLI als dogmaticus".

[1]) Als schrijver heeft zich bekend gemaakt de Heer E. FISCHER, Pastor an der Haupt-Kirche St. Jakobi in Hamburg.

2. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1919:

„Het genootschap verlangt eene verhandeling over het vraagstuk van de absoluutheid van het Christendom in het licht van de hedendaagsche godsdienstwetenschap".

Als nieuwe prijsvraag ter beantwoording vóór 1 Jan. 1920 is uitgeschreven:

Het genootschap verlangt eene ontwikkelingsgeschiedenis van de „bewustzijns- of ervaringstheologie" sedert SCHLEIERMACHER.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf

van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.* Het programma van het genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1919.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP hebben in hunne vergadering van 17 Oct. 1918 uitspraak gedaan over een onder het motto „In allem Wechsel waltet der ewig-eine Gott" ingekomen nederlandsch antwoord op de prijsvraag:

„Het genootschap vraagt eene verhandeling over ZWINGLI als dogmaticus".

De schrijver heeft wel met ijver, doch volgens eene averechtsche opvatting van de vraag en naar eene verkeerde methode gewerkt. In plaats van eene dogmenhistorische studie te schrijven, door ZWINGLI te plaatsen in de lijst van zijn tijd en het geheel zijner beschouwingen in haar onderling verband te laten zien, heeft hij zijne eigene dogmatische bespiegelingen gegeven, in verband met — vaak slechts naar aanleiding van — ZWINGLI's denkbeelden over bepaalde dogmatische vraagstukken. Dientengevolge heeft hij geen duidelijk beeld van ZWINGLI in zijne eigenaardige beteekenis als dogmaticus geteekend. Zelfs is bij hem geen sprake van eene poging om de leidende gedachten in ZWINGLI's voorstellingen te zoeken. Over ZWINGLI's eigenaardige opvatting van geloof, die, in verband met de algemeenprotestantsche leus „rechtvaardiging door geloof", zoo kenmerkend is voor ZWINGLI's dogmatisch inzicht, gewaagt hij met geen woord. Nergens is zijne uiteenzetting overzichtelijk; op menig punt is ze onvolledig en dikwijls allesbehalve helder; aan juist-

heid van voorstelling laat zij zeer veel te wenschen over; niet zelden is logische klaarheid verre te zoeken.

Had de schrijver ZWINGLI's grondgedachten — b.v. zijne symbolische opvatting van de zoogenaamde Sacramenten, inzonderheid van het Avondmaal — duidelijk gezien en eenvoudig, kort en bondig, uiteengezet, dan ware de stroom van citaten niet zóó overstelpend en de lezing van zijn geschrift minder vervelend geworden. Dan had ook kunnen blijken — wat den schrijver verborgen is gebleven — dat in menige uitspraak van ZWINGLI de oude termen een geheel nieuwen, wezenlijk geheel anderen inhoud hebben gekregen.

Deze verhandeling is geene bekroning waard.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

1. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1919:

„Het genootschap verlangt eene verhandeling over het vraagstuk van de absoluutheid van het Christendom in het licht van de hedendaagsche godsdienstwetenschap".

2. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1920:

Het genootschap verlangt eene ontwikkelingsgeschiedenis van de „bewustzijns- of ervaringstheologie" sedert SCHLEIERMACHER.

Als nieuwe prijsvraag ter beantwoording vóór 1 Jan. 1921 is uitgeschreven:

Eene verhandeling over de plaats van „zonde" in 's menschen godsdienstig leven naar de beginselen der moderne richting.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt. zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem*. Het programma van het genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM.

H.H. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben in hunne vergadering van 4 Mei 1918 hun oordeel vastgesteld over het antwoord, onder het motto: „Mensch, blijf strijden en vertrouw. E. Madach", ingezonden op de voor het jaar 1916 uitgeschreven prijsvraag, luidende:

De hypothese van Rutherford, volgens welke een atoom zou bestaan uit een positief geladen kern waaromheen zich electronen bewegen, is in de laatste jaren zeer vruchtbaar gebleken en werd, ook in verband met de theorie der quanta, op vele verschijnselen toegepast. Daarom wordt gevraagd, de beteekenis en de waarde van deze hypothese en de reeds gemaakte gevolgtrekkingen te beoordeelen, en haar, zoo daartoe aanleiding wordt gevonden, verder uit te werken, of wel dienstbaar te maken aan de verklaring van verschijnselen die tot nog toe niet uit dit oogpunt werden beschouwd.

Deze uitvoerige verhandeling heeft een zeer gunstigen indruk gemaakt. Er blijkt uit dat de schrijver het onderwerp geheel meester is en de uitgebreide daarop betrekking hebbende litteratuur grondig heeft bestudeerd. Het overzicht dat hij daarvan geeft, munt uit door duidelijkheid, en de wijze waarop hij de verkregen uitkomsten beoordeelt en aanwijst in hoeverre zij nog te kort schieten, getuigt van scherpzinnigheid en van een helder inzicht in de moeilijke vraagstukken die zich op dit gebied voordoen.

Dat aan de theorie der quanta een ruime plaats is gegeven en dat de problemen die op de licht-emissie en de spectra betrekking hebben, op den voorgrond zijn geplaatst, is gerechtvaardigd door de uitkomsten die Bohr, Sommerfeld en anderen reeds hebben verkregen; de schrijver is terecht van meening dat het hoofdvraagstuk moet zijn, de bewegingen in het atoom te „quantiseeren", d. w. z. in aansluiting aan de theorie der quanta vast te stellen welke van de volgens de gewone wetten der mechanica mogelijke bewegingen in werkelijkheid zullen voorkomen en welke niet.

De nadruk wordt er op gelegd, dat vooralsnog de grondstellingen der quantentheorie met de klassieke mechanica en electrodynamica in strijd zijn. Zoolang het niet gelukt is, tot een goed samenhangende „quantenmechanica" te geraken, moet men zich er mede tevreden stellen, bij het quantiseeren althans een algemeenen vasten regel te volgen. Wat de schrijver in

deze richting gedaan heeft, verdient allen lof. Hij legt daarbij een grondige bedrevenheid in de wiskundige methoden der moderne mechanica aan den dag.

Voor het opbouwen van een quantenmechanica zal ongetwijfeld EHRENFEST's hypothese der adiabatische invarianten van groote beteekenis blijken te zijn. Dit onderwerp wordt in het zesde hoofdstuk besproken, waarbij ook de gelukkige uitbreiding die J. M. BURGERS aan de beschouwingen van EHRENFEST heeft gegeven, wordt uiteengezet.

Menig bijzonder vraagstuk van grooter of kleiner omvang is door den schrijver opgelost en men vindt in zijn werk vele belangrijke opmerkingen die betrekking hebben op nagenoeg alle verschijnselen waaruit iets over de structuur der atomen kan worden afgeleid.

Zonder eenige aarzeling kon worden besloten, den schrijver den uitgeloofden prijs toe te kennen.

Bij opening van het naambriefje bleek de schrijver te zijn de Heer J. M. BURGERS, conservator van het laboratorium van Teyler's Stichting. [1])

[1]) De verhandeling, die hierachter volgt, is ook opgenomen in de „Verhandelingen uitgegeven door Teyler's Tweede Genootschap" en bovendien als akademisch proefschrift uitgegeven.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1918.

H.H. DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP hebben besloten voor het jaar 1918 opnieuw de volgende, voor 1913 gestelde prijsvraag uit te schrijven:

Zij verlangen eene geschiedenis der Noordnederlandsche kleederdrachten in de zeventiende eeuw, op te maken aan de hand der schilderijen, prenten en teekeningen uit dien tijd.

Er behoort onderzocht te worden vanwaar onze

kleederdrachten hun oorsprong hebben genomen, wat er vreemds en wat er eigen in is.

De verhandeling ga zoo mogelijk vergezeld van voor reproductie geschikte afbeeldingen of althans van nauwkeurige aanwijzing, waar deze te vinden zijn. Er worde tevens opgave gedaan van nog in Nederlandsche musea voorkomende kleedingstukken uit dien tijd.

Het woord kleederdrachten is in den ruimsten zin te nemen, zoodat ook het linnen, voor zoover uiterlijk zichtbaar, de hoofdbedekking, de haartooi, de lijfsieradien en het schoeisel er onder vallen. Desgelijks uniformen te water en te land, hof- en ambtsdrachten en dergelijke.

Nederland is boven alle andere landen der wereld bevoorrecht door een buitengewoon groot aantal portretten en portretgroepen uit den bloeitijd van zijn bestaan. Den opmerkzamen beschouwer valt daarbij een groote verscheidenheid van kleederdrachten in het oog, gepaard met een verbazingwekkenden rijkdom aan lijfsieradien van goud, diamanten en paarlen, en aan kantwerk.

Men heeft tot dusver nog niet getracht aan de hand der gedateerde stukken de ontwikkeling van onze oude kleederdrachten te schetsen en — op grond der verkregen resultaten — van tal van ongedateerde kunstwerken het jaar van ontstaan aan te wijzen en tevens met behulp der kunstwerken, waarvan de plaats van ontstaan met zekerheid valt aan te wijzen, het onderscheid na te speuren, dat er tusschen de drachten in de verschillende plaatsen heeft bestaan, om ten slotte weder door middel der aldus verkregen kennis aan te toonen, dat b.v. het eene kunstwerk in Zeeland, het andere in Overijsel, het derde in Westfriesland thuisbehoort. Invloeden van buiten af op plaatsen dicht bij de grenzen of met uitgebreid vreemdelingenverkeer, ouderwetsche neigingen, zooals die bij personen op leeftijd voorkomen, verschillen tusschen arm en rijk, daagsche en zondagsche, zomer- en winterkleeding, tusschen den ongehuwden, gehuwden en weduwenstaat, voorliefde der artisten om de afgebeelde personen in phantasie-kostumes voor te stellen en wat dies meer zij, zullen bij dit onderzoek op den voorgrond treden en dientengevolge onderzocht moeten worden.

De uitkomsten van een nauwgezet onderzoek zullen zoowel aan de Nederlandsche kunstgeschiedenis als aan de iconografische studien ten goede komen.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vraag bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel der

Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, waarbij, als buitengewone toelage, eene som van *f* 400 gevoegd zal worden tot tegemoetkoming in de kosten, die aan de beantwoording der vraag verbonden zijn.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller.* Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden; geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

De antwoorden moeten ingezonden worden vóór of op den 1sten April 1920, opdat zij vóór den 1sten Mei 1921 kunnen beoordeeld worden.

Alle ingezonden stukken, foto's enz. blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1919.

IIII. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1919 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

Verlangd wordt eene alphabetische lijst van penningen, munten, penningplaten (plaquettes) van metaal, aardewerk, porselein, hout, hoorn of eenig ander materiaal, waarop voorkomen portretten van personen, die in de Nederlanden geboren zijn of daartoe in nauwe betrekking hebben gestaan en die vóór den aanvang der 19de eeuw zijn vervaardigd.

Frederik Muller gaf in 1853 zijn bekenden Catalogus van 7000 portretten van Nederlanders uit, waarop van 1888—1891 een vervolg in 3 deelen van de hand van J. F. van Someren het licht zag.

Van 1897—1905 verscheen van E. W. Moes een werk in 2 deelen: Iconographia Batava. Beredeneerde lijst van geschilderde en gebeeldhouwde portretten van Noord-Nederlanders in vorige eeuwen.

Hebben wij over de gegraveerde en geschilderde portretten van Nederlanders, dank zij deze schrijvers, goede bruikbare werken, die het mogelijk maken om spoedig te vinden of er, en zoo ja welke geschilderde of gegraveerde portretten van een zeker persoon bekend zijn, eene dergelijke opgave van penningen, munten en plaquettes, waarop portretten van Nederlanders voorkomen ontbrak tot heden toe, en deze leemte hoopt men door het uitschrijven van de hierboven vermelde prijsvraag aan te vullen.

Men wenscht uit te geven een dergelijk werk als dat van Moes, waarin de penningen, munten, enz., waarop portretten van personen voorkomen, die in de Noordelijke Nederlanden (of in de Zuidelijke vóór 1576) zijn geboren of daartoe in nauwe betrekking hebben gestaan, kort beschreven worden, zoover bekend met vermelding van den naam van den vervaardiger, verwijzing naar de werken waarin de stukken worden beschreven en afgebeeld, met opgave van de materie waarvan zij zijn vervaardigd, maat in millimeters en aangifte der openbare of particuliere verzameling waarin de stukken zich bevinden of, indien de origineele niet bekend zijn, de plaats waar van het stuk wordt melding gemaakt, (b.v. veilingcatalogus, boedelinventaris, enz.).

Van personen, die slechts korten tijd tot de Nederlanden in nauwe betrekking hebben gestaan (als b.v. Alva, Requesens, enz.) is het de bedoeling slechts die penningen of plaquettes te vermelden, die vervaardigd zijn gedurende het tijdperk, dat zij tot ons land in nauwe betrekking stonden, zoodat b.v. stukken met Alva's portret, die vervaardigd zijn nà zijn vertrek uit de Nederlanden niet vermeld moeten worden.

Bij iederen naam zal eene korte biographische aanteekening ge-

voegd moeten worden, bevattende jaar van geboorte, overlijden, beroep, enz. Indien de afgebeelde op meer dan een munt, penning, plaquette, enz., voorkomt, zullen deze in chronologische volgorde moeten vermeld worden. De voorzijde (het portret) zal meer uitgebreid moeten worden beschreven, daar dit hoofddoel is der verlangde lijst, eene beknopte aanduiding van de voorstelling op de keerzijde wordt voldoende geacht. Alleen wanneer het onbekende stukken betreft, *niet* in de vakliteratuur voorkomende of niet in afbeelding bekend, wordt eene meer uitgebreide beschrijving van de keerzijde verlangd.

Het voornemen bestaat, om het werk van eenige platen te voorzien, waarop in het bizonder nog weinig of niet bekende penningen, munten of plaquettes zullen worden afgebeeld. De schrijver gelieve aan te geven welke stukken naar zijne meening voor afbeelding in aanmerking komen.

Komen op een penning of ander voorwerp de borstbeelden van man en vrouw voor, b.v. op den portretpenning van Cornelis van Aerssen en Maria Pauw, dan worden de beide portretten beschreven op de letter van den naam van den man (dus hier op A), terwijl bij den eigennaam der vrouw (Pauw) hiernaar verwezen wordt.

Aan het einde zal eene alphabetische lijst der vervaardigers van de portretten, met verwijzing naar het nommer waarin hun werk in het boek voorkomt, worden opgenomen.

Eenige voorbeelden van beschrijving, hierachter gevoegd, zullen naar verwacht wordt, duidelijk maken hoedanige beschrijving men verlangt.

43. Aerssen, Cornelis van, geb. te Delft 1646, Ontvanger-generaal van Holland, Zeeland en West-Friesland, overleden te 's-Gravenhage 1728, geh. aldaar 13 Nov. 1678, en zijn vrouw Maria Pauw, geb. te Delft 1653, overleden te 's-Gravenhage 1733.

Naar rechts gewende borstbeelden. Omschrift: + H^R^ CORNELIS VAN AERSSEN EN V^W^ MARIA PAUW H^R^ EN V^W^ VAN HOGERHEYDE. Onder de borstbeelden J. POPKES. F.

Keerzijde: De beide familiewapens, waaronder een vers in 9 regels en onderschrift.

Penning in 1728 vervaardigd bij hun gouden bruiloft, die 13 Nov. 1728 gevierd had moeten worden.

Dirks. Repertorium III. 374. Cat. Teyler pl. XV. 3. Zilver. 62 m.M. Verz. Teyler. Tin. Kon. Penningkabinet.

408. Hermes, Pierre, Burgemeester van Maastricht van 1688—90, 92—94, 98—1700, 1702—04, 06—08.

P: HERMES. J: U. D. APVD: MOSA = TRAIECTINOS. CONSVL ÆT: XXXVI. I. M. F: (I. MANSEL FECIT). Naar rechts gewend borstbeeld. Eenzijdig.

Ivoor 80 × 62 m.M. Cat. F. L. J. DUMOULIN (veiling April 1896.) n°. 329.

713. KAREL V. Keizer. Koning van Spanje, Graaf van Holland, geb. 1500, overl. 1558.

Naar links gewend gekroond hoofd van den keizer binnen twee lauwertakken, onder het hoofd 1546.

Keerzijde: opschrift op 5 regels.

Legpenning van Gelderland. 1546.

VAN MIERIS III. p. 126. DUGNIOLLE 1649.

Koper 29 m.M. Kon. Penningkabinet.

MARIA STUART 1662—1695, gemalin van WILLEM III.

Zie N°. 1000.

880. PAUW. MARIA.

Zie N°. 43.

1000. WILLEM III, Prins van Oranje, Stadhouder van Holland en Koning van Engeland, geb. 1650, overl. 1702 en zijn gemalin MARIA STUART, geb. 1662, overl. 1695, in 1677 gehuwd.

Voorzijde: De beide naar rechts gewende borstbeelden, omschrift WILHELMVS ET MARIA REX ET REGINA BRITTANIÆ. Onder de borstbeelden P. H. M. (PHILIPP HEINRICH MÜLLER).

Keerzijde: De Engelsche maagd onder een Oranje- en Rozenboom gezeten, met om- en onderschrift.

Gedenkpenning bij hunne kroning te Londen, in 1689 geslagen.

VAN LOON IV, pag. 412 n°. 1. FRANKS II, pag. 681. 60.

Zilver 55 m.M. Kon. Penningkabinet.

1204. WILLEM V. (WILLEM BATAVUS), Prins van Oranje-Nassau, Stadhouder, geb. 1748, overl. 1806.

Naar links gewend geharnast borstbeeld van den prins. Door SCHEPP.

Cat. Oranje-penningen pl. XII, 1021.

Intaglio. Cornalijn 23 × 32 m.M. Kon. Penningkabinet.

1418. WITT. JOHAN DE. geb. 1625, overl. 1672, Raadpensionaris en CORNELIS. geb. 1623, overl, 1672. Burgemeester van Dordrecht.

Voorzijde: De beide naar rechts gewende borstbeelden, omschrift + JOH. ET CORNE: DE WITT.

Keerzijde: Binnen een door twee naakte kinderen vastgehouden verdiept schild, de lijken der beide broeders aan de wippaal.

Gedenkpenning bij hun moord geslagen, 1672.
Van Loon III, pag. 90. n°. 2.
Zilver 50 m.M. Kon. Penningkabinet.
Witt. Cornelis de. Burgemeester van Dordrecht, 1623—1672.
Zie N°. 1418.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.—

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1921, opdat zij vóór den 1sten Mei 1922 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller*. Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden; geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem*.

Conférences faites dans la Fondation Teyler.
1916—1917.

Eug. Dubois, Over het ontstaan en de geologische geschiedenis van vennen, venen en zeeduinen.

W. G. C. Bijvanck, Spinoza en Molière.

W. van der Vlugt, De oude Atheners en wij.

H. A. Lorentz, Het licht en de bouw der atomen.

1918.

H. A. Lorentz, De electronentheorie (3 conf.).

TABLE DES MATIÈRES.

J. M. BURGERS.

HET ATOOMMODEL VAN RUTHERFORD-BOHR.

Deze studie over het atoommodel van Rutherford en Bohr, en over de problemen van de theorie der quanta welke daarmee in verband staan, is oorspronkelijk geschreven als antwoord op een prijsvraag, uitgeschreven door Teyler's Tweede Genootschap te Haarlem. Na de bekroning ervan hebben H.H. Direkteuren der Stichting goedgevonden dat ze tegelijkertijd voor mijn dissertatie zou mogen dienen.

Bij de uitgave bleek het wenschelijk in de oorspronkelijke tekst eenige wijzigingen aan te brengen. Voor een deel dank ik deze aan opmerkingen van Prof. Lorentz, en verder leek het ook mijzelf van belang op verschillende plaatsen iets in te lasschen, vooral in verband met nieuwere onderzoekingen. Deze veranderingen of aanvullingen zijn, voor zoover het geen minder belangrijke verbeteringen van de stijl, en dergelijke, betreft, aangeduid door ze in vierkante haken [ ] in te sluiten. De voornaamste aanvullingen welke ik heb ingevoegd zijn: bl. 67, noot [2]); § 16, a), c); opmerking 4) bij § 22; noot II bij § 26; opmerking 4) bij § 28; § 28*; § 30, slot; § 34, slot; in § 36 het grootste deel der opmerkingen 1), 5), 6); bl. 241, noot [1]); bl. 243, noot [1]). Naar aanleiding van de opmerkingen van Prof. Lorentz is o.a. de inkleeding van § 16, e) 2) en van § 31 eenigermate omgewerkt en zijn o.m. toegevoegd: noot [2]), bl. 28; noot [2]), bl. 36; noot [3]), bl. 65; noot [1]), bl. 233.

Aan den algemeenen gang van het werk is echter bijna niets veranderd. Indien ik het geheel overnieuw had kunnen opstellen, zou ik het in veel meer opzichten gewijzigd hebben, óm verschillende kwesties beter uiteen te zetten dan nu is geschied. Zoo hadden b.v. de problemen welke samenhangen met de kwestie der „ontaarde systemen" duidelijker behandeld kunnen worden door onmiddellijk gebruik te maken van de op bl. 240/241 vermelde hypothese van Epstein: het in § 26 over

de stabiliteitskwestie gezegde had meer naar voren gebracht kunnen worden; en vooral behoorde de behandeling van de meeste der in hoofdstuk I en hoofdstuk V genoemde problemen minder beknopt te zijn.

Na de inlevering in het einde van Juli 1917 zijn verder over het behandelde onderwerp nog zeer vele artikelen verschenen. Het was me echter niet mogelijk op deze alle acht te geven; slechts zeer weinige ervan zijn in de toevoegingen vermeld. Tot de voornaamste van de nieuwere onderzoekingen schijnen me te behooren de studies over atomen met meerdere ringen van elektronen. Deze zijn begonnen met een artikel van Debye, later gevolgd door werk van Vegard, Sommerfeld, Kroo (zie bl. 160—162; verder heeft Epstein nog eenige onderzoekingen gepubliceerd in Die Naturwissenschaften over het spektrum van Helium). Deze onderzoekingen hebben voornamelijk betrekking op de verklaring der Röntgenspektra. — Vegard heeft ook een voorloopig schema opgesteld van de bouw van alle elementen van het periodiek systeem. Het is mij niet mogelijk geweest hierop in te gaan; alleen zijn in de ingelaschte § 28* eenige kwesties besproken waarop men komt bij berekeningen over dergelijke atoommodellen. Bij deze systemen met veel elektronen zal men waarschijnlijk met groot succes gebruik kunnen maken van de rekenmethoden der astronomische mechanika (reeksontwikkelingen der storingstheorie). Bij berekeningen over de spektra blijken de storingen van de verschillende elektronen op elkaar een belangrijke invloed te hebben: het is wel mogelijk dat men elke baan numeriek zal moeten uitwerken, om tot definitieve resultaten te komen.

Niet vermeld is een belangrijk artikel van N. Bohr: On the Quantum Theory of Line-Spectra, waarvan het eerste gedeelte (algemeene theorie) in April/Mei 1918 verschenen is. Een groot aantal problemen van de quantentheorie wordt hierin besproken: enkele hiervan had ik zelf ook reeds nagegaan: b.v. het verband tusschen de frequenties die men verwacht volgens de quantentheorie en volgens de klassieke theorie (Bohr, l.c. p. 15, 30; zie beneden § 32), en de gewichtsfunktie die men bij statistische problemen moet invoeren voor ontaarde systemen (Bohr, l.c. p. 26; zie beneden § 41, C, II). Bohr geeft verder vele beschouwingen over de ontaarde systemen, over de adiabatische

beïnvloeding van een systeem, over waarschijnlijkheidsproblemen die optreden bij de uitstraling van energie, enz. Leidende gedachte hierbij is de overweging dat de formules van de quantentheorie bij groote waarden der quantengetallen asymptotisch moeten naderen tot die van de klassieke theorie.

Ik mag hier niet nalaten mijn grooten dank te betuigen aan de hoogleeraren der Leidsche Universiteit bij welke ik gestudeerd heb. In het bizonder geldt dit jegens de professoren Ehrenfest (mijn promotor), Kamerlingh Onnes en Lorentz, aan welke allen ik zeer veel te danken heb, en met wie ik steeds aangenaam heb mogen omgaan. De tijd gedurende welke ik op het Kryogeen Laboratorium gewerkt heb is voor mij een prettige herinnering; en evenzoo die welke ik in Haarlem in het Natuurkundig Laboratorium van Teyler's Stichting heb doorgebracht. Doch ook de professoren Kuenen, de Sitter, Kluyver en van der Woude zal ik steeds zeer erkentelijk blijven.

Delft, Oktober 1918.

VOORREDE.

Omtrent de hierbij geleverde beantwoording der prijsvraag door TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP voor 1916 uitgeschreven:

> „De hypothese van RUTHERFORD omtrent den bouw der atomen"

zou ik gaarne eenige opmerkingen willen maken.

Getracht is een zoo duidelijk mogelijk beeld te geven van RUTHERFORD'S theorie over de struktuur der atomen, en van de toepassing van de theorie der quanta hierop. In zeer veel punten zal blijken dat het werk niet is afgerond: het probleem der atoomstruktuur staat met zoovele andere vraagstukken der natuurkunde in verband, en heeft in den laatsten tijd een zoo groote uitbreiding gekregen, dat ik me genoodzaakt zag vele kwesties slechts zeer onvolledig of in 't geheel niet te bespreken. Zoo er meer tijd beschikbaar was geweest had ik deze gaarne nader willen uitwerken. Ik heb gepoogd dit gebrek eenigszins te verhelpen door te verwijzen naar de literatuur welke op deze punten betrekking heeft.

In het bizonder is dit het geval met de theorie der radioaktieve verschijnselen, en bij de vele kwesties waar de theorie der quanta in strijd is met de opvattingen der klassieke mechanika.

Ook zijn van vele berekeningen uit de theorie der spektraalreeksen slechts de hoofdzaken besproken; voor de nadere uitwerking der formules en voor de vergelijking met de experimenteele resultaten is dan naar de literatuur verwezen (dit is b.v. gedaan met de theorie van SOMMERFELD over de detailstruktuur der spektraallijnen en over de Röntgenspektra).

Aan den anderen kant was het noodig tamelijk ver in te gaan op de grondgedachten van de theorie der quanta — waarmee tengevolge van de onderzoekingen van BOHR, SOMMERFELD, EPSTEIN en vele anderen de theorie van den bouw der atomen

ten nauwste verbonden is. Ik hoop dat hierdoor de theorie van RUTHERFORD niet op den achtergrond gedrongen is: overal is de theorie der quanta onmiddellijk toegepast op het atoommodel (met uitzondering van een paar voorbeelden welke ter illustratie van enkele theorema's dienen).

Ik heb mijn best gedaan de quantenonderstellingen zoo algemeen mogelijk te formuleeren, en ze zooveel doenlijk tot een samenhangend geheel te vereenigen. Hierbij heb ik gebruik gemaakt van den vorm waarin K. SCHWARZSCHILD de quantenformules heeft uitgesproken. Het schijnt me toe dat de door SCHWARZSCHILD ingevoerde *hoekvariabelen* en de daaraan toegevoegde kanonische momenten voor de ontwikkeling der quantentheorie van zeer groot belang zijn. Door de invoering hiervan is de mogelijkheid geopend om bij zeer vele mechanische systemen quantenvoorwaarden in te voeren, vooral doordat men gebruik kan maken van de rekenmethoden der astronomische mechanika (behandeling der storingsproblemen volgens de methode van DELAUNAY en WHITTAKER, wat voor de studie van vele samengestelde problemen van groot gemak is: en verder de theorie der z.g. „periodieke soluties" en der oplossingen in de nabijheid ervan, welke ontwikkeld is door H. POINCARÉ).

Bovendien kan men aantoonen dat de quantenvoorwaarden in den door SCHWARZSCHILD gegeven vorm in het algemeen eenduidig zijn, dat ze m.a.w. niet afhankelijk zijn van het koordinatensysteem waarmee het probleem behandeld is [1]).

Aan den anderen kant doen zich echter bij deze problemen groote moeilijkheden van meerendeels mathematischen aard voor: de oplossingen der mechanische problemen worden gewoonlijk verkregen in den vorm van trigonometrische reeksontwikkelingen (meervoudige FOURIER-reeksen) naar de hoekvariabelen, en men komt dus voor de vraag of deze reeksen konvergeeren of divergeeren. Men komt hier in een gebied waarover door H. POINCARÉ vele onderzoekingen zijn verricht. Ik heb tot nog toe geen gelegenheid gehad mij in deze kwesties voldoende ver

[1]) Zie hoofdstuk II, § 12.
Hier zij nog vermeld dat men op een eenvoudige en algemeene manier een verband kan aangeven tusschen de beide hypothesen der quantentheorie (de formules voor de quantenbewegingen, en de emissie-hypothese). Zie hoofdstuk V, § 32.

in te werken. Er blijft op dit gebied nog zeer veel te doen, wil men een vasten grondslag aan de „quanten-mechanika" geven. Voorloopig moeten dus sommige theorema's over de hoekvariabelen onder voorbehoud worden aanvaard [1]).

In het volgende is de stof ongeveer aldus verdeeld:

Hoofdstuk I geeft een algemeen overzicht van de theorie van RUTHERFORD, in verband met de verstrooiing der alpha-deeltjes, de radioaktieve verschijnselen, enz.

In II zijn de hoofdgedachten van de theorie der quanta besproken. Verschillende punten waar de theorie der quanta moeilijkheden oplevert, en kwesties die in verband staan met de uitstraling en de absorbtie van energie zijn afzonderlijk gereleveerd in hoofdstuk V.

In hoofdstuk III is de toepassing van de quantentheorie op systemen met slechts 1 elektron (model van het waterstof-atoom, enz.) behandeld, en de theorie der spektra van BOHR, SOMMERFELD en anderen.

De systemen met meerdere elektronen worden besproken in hoofdstuk IV. In § 26 is getracht een methode te ontwikkelen voor het opstellen der quantenvoorwaarden, en is een vermoeden geuit in verband met de kwestie der instabiele bewegingen. Verder zijn de verschillende onderzoekingen van BOHR, NICHOLSON, SOMMERFELD, EPSTEIN (theorie der roteerende molekulen) kort uiteengezet.

Tenslotte zijn in VI eenige opmerkingen gemaakt naar aanleiding van de hypothese van EHRENFEST over de adiabatische beïnvloeding van een mechanisch systeem, en over enkele statistische problemen.

---

[1]) Over de reeksontwikkelingen der astronomische mechanika zie men een interessant artikel van K. SCHWARZSCHILD, Über Himmelsmechanik. Phys. Zeitschr. **4**, p. 765, 1903. — Verder natuurlijk: H. POINCARÉ, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (in het vervolg steeds geciteerd als Méc. Cél.), en ook: E. T. WHITTAKER, Encykl. Math. Wiss. VI, 2, 12 en eenige opmerkingen in: Proc. Roy. Soc. Edinb. **37**, p. 95, vgl., 1917.

De reeksontwikkelingen schijnen als ze divergent zijn, in het algemeen het karakter van *asymptotische* reeksen te hebben, zoodat ze toch voor berekeningen goed bruikbaar zijn (verg. H. POINCARÉ, Méc. Cél. II, Ch. VIII).

Indien men vraagt een algemeen oordeel te geven over de hypothese van RUTHERFORD, moet men naar mij dunkt erkennen dat ze van zeer groot nut geweest is en ook nog zijn zal voor de ontwikkeling van ons inzicht in den bouw en de eigenschappen der atomen.

Aan de grondgedachten — dat een atoom een „planetenstelsel" is, met een zeer kleine en zware kern als centraallichaam, en de elektronen als planeten; de hypothese van VAN DEN BROEK over de grootte der kernlading; de splitsing der eigenschappen van het atoom in eigenschappen van de kern, en eigenschappen van het elektronensysteem — kan bijna niet meer getwijfeld worden. De experimenten over de verstrooiing der alpha-deeltjes, de radioaktieve verschijnselen, de eigenschappen der isotope elementen, en vele andere kwesties zijn alle in volkomen harmonie hiermee. Ook het algemeene karakter der Röntgenspektra levert een groote steun voor de theorie der „atoomnummers".

Wat de speciale modellen betreft schijnt de bouw van het waterstof-atoom — behalve wat de kern aangaat — wel geheel vast te staan. Men moet wel als zeker aannemen dat een waterstof-atoom bestaat uit 1 kern, waaromheen 1 elektron loopt.

De systemen met meerdere elektronen en die met meerdere kernen leveren nog de grootste moeilijkheden; vooral in verband met de kwestie van de stabiliteit der systemen. Tengevolge van de groote moeilijkheden die verbonden zijn aan het berekenen der bewegingen in deze systemen, welke op het oogenblik bijna onoverkomelijk lijken, kan men voorloopig nog weinig zeggen over de resultaten welke de theorie van RUTHERFORD in dit gebied zal kunnen opleveren.

Verder is volgens de op het oogenblik geldende opvattingen de theorie over de struktuur der atomen onafscheidelijk verbonden met de theorie der quanta (gelijk ook reeds boven vermeld is). Hierover durf ik zeer weinig te zeggen. Zooals bekend is staan de grondgedachten van de quantentheorie geheel buiten de gewone opvattingen, en zijn ze op vele punten ermee in

strijd. Wanneer men echter aan den anderen kant nagaat welke schitterende resultaten deze theorie in vele opzichten bereikt heeft, wordt men wel gedwongen aan te nemen dat ze een groote kern van juistheid bezit.

Over deze problemen zal de verdere ontwikkeling der Natuurkunde moeten beslissen.

Leiden, medio Juli 1917.

INHOUD.

EENHEDEN.

In alle formules zijn de elektrische grootheden steeds uitgedrukt in de gewone elektrostatische eenheden; de magnetische in elektromagnetische eenheden.

VERBETERING.

Op bl. 166, bovenaan, moet $R_2 = 0{,}080$ Å.E. vervangen worden door $R_2 = 0{,}086$ Å.E. — Overigens maken echter de hier opgegeven waarden voor de stralen der banen in het koper-atoom geen aanspraak op bizondere nauwkeurigheid; ze dienen slechts om bij benadering een beeld te geven van de afmetingen van het systeem.

INLEIDING.

In 1911 is door Sir Ernest Rutherford de hypothese opgesteld dat een atoom zou bestaan uit een positief elektrisch geladen kern, waar omheen zich negatieve elektronen in verschillende banen bewegen. De grootte van de kern moet zeer gering zijn tegenover de afmetingen die men gewoonlijk aan de atomen toeschrijft; de diameter van het atoom zou bepaald worden door de elektronenbanen. De lading van de kern is een geheel aantal malen de lading van een elektron; in den normalen (neutralen) toestand heeft de kern juist zooveel elektronen om zich heen, dat de totale lading van het systeem nul is. Dit aantal is ongeveer de helft van het atoomgewicht. De massa van het atoom zetelt bijna uitsluitend in de kern [1]).

Deze hypothese is door Rutherford oorspronkelijk ingevoerd ter verklaring van de uitkomsten gevonden bij de studie van de verstrooiing van alpha-deeltjes, wanneer deze door metaallaagjes en dergelijke heen gaan. In het bijzonder dwong de waargenomen verdeeling der verstrooiingshoeken tot het aannemen van een sterk elektrisch geladen kern van zeer kleine afmetingen en groote massa in het atoom.

Later is de hypothese verder uitgewerkt en gebruikt om andere verschijnselen te verklaren, zooals die der radioaktieve stoffen. De grootste ontwikkeling heeft ze echter gekregen sinds het in 1913 aan N. Bohr gelukt is door toepassing van onderstellingen ontleend aan de theorie der quanta op de beweging der elektronen in het atoom, formules af te leiden voor de reeksen in de lijnen-spektra van sommige elementen. Spoedig daarna is de theorie van Bohr door anderen uitgebreid, en gebruikt voor de

[1]) E. Rutherford, Phil. Mag. **21**, p. 669, 1911; **27**, p. 488, 1914.

behandeling van verschillende bijzonderheden der spektra (detailstruktuur der lijnen, enz.). Ofschoon het meerendeel dezer onderzoekingen betrekking hebben op het eenvoudigste atoom, nl. dat van waterstof, is hun succes toch zoo buitengewoon groot geweest, dat men wel moet aannemen dat in deze richting nog zeer veel bereikt kan worden.

Aan den anderen kant is de ontwikkeling van de theorie der quanta in de laatste jaren hand in hand gegaan met de uitbreiding van de theorie van BOHR. Men kan echter niet zeggen dat door deze nieuwe theorieën de bouw der atomen en de oorsprong der spektra verklaard zijn: integendeel, de hypothesen der quantentheorie zijn zoozeer in strijd met de wetten der mechanika en der elektrodynamika, terwijl ook de verhouding dezer hypothesen tegenover de „klassieke" theorieën nog geheel in het duister ligt, dat er een groote omwenteling noodig zal wezen, voordat alles een harmonisch geheel kan vormen [1]).

[1]) Voor een kort overzicht van de theorie van RUTHERFORD en van eenige problemen die ermee in verband staan zie men ook:

„A Discussion on the Structure of the Atom", Proc. Roy. Soc. **A 90**, Meeting of March 19, 1914.

HOOFDSTUK I.

DE THEORIE VAN RUTHERFORD.

§ 1. OPMERKINGEN OVER HET MODEL VAN HET ATOOM, VOORGESTELD DOOR W. THOMSON EN J. J. THOMSON.

Ideeën over den bouw der atomen zijn reeds vroeg geuit, o.a. in verband met de voortplanting van het licht door de materie (dispersietheorieën): in verband met de spektra der elementen, met de elektrische en magnetische eigenschappen der stof, enz. Vooral hebben echter de groote ontdekkingen der moderne natuurkunde, zooals die der kathode-stralen en der radioaktieve verschijnselen en al hetgeen daarmee samenhangt, een grooten invloed hierop gehad. De studie van de kathodestralen had het bestaan aangetoond van de z.g. *elektronen*, deeltjes geladen met negatieve elektriciteit, welke een massa hebben ca. 1850 maal kleiner dan die van een waterstof-atoom, terwijl hun lading dezelfde is als van een eenwaardig negatief ion. Men kwam er spoedig toe te onderstellen dat deze elektrisch geladen deeltjes, welke men in de kathodestralen *vrij* waarnam, dezelfde waren als die welke men reeds sinds lang, ter verklaring van de elektrische en optische eigenschappen der materie, aangenomen had in de atomen aanwezig te zijn. Vele feiten hebben dit bevestigd, bv. de afgifte van elektronen door metalen die met ultraviolet licht of met Röntgenstralen bestraald worden, de door Prof. P. Zeeman ontdekte splitsing der spektraallijnen in een magnetisch veld.

en tal van andere. Het lag derhalve voor de hand te onderstellen dat de elektronen een belangrijke rol innemen onder de bouwsteenen der atomen.

Voordat de theorie van RUTHERFORD nader besproken wordt, lijkt het gewenscht een paar woorden te zeggen over een vroeger model van het atoom, afkomstig van W. THOMSON [1]), en uitgewerkt door J. J. THOMSON [2]).

W. THOMSON neemt aan dat een atoom bestaat uit een bol, uniform geladen met positieve elektriciteit, welke binnenin een aantal elektronen bevat. De materie bestaat uit een verzameling dezer atomen, welke juist zooveel elektronen bevatten, dat de elektrische kracht in een punt op grooten afstand van de atomen gelegen, nul is. De krachten tusschen atomen en elektronen volgen de gewone wetten der elektrostatika.

W. THOMSON heeft eenige problemen onderzocht over het evenwicht der elektronen binnen het atoom, en over de werking van meerdere atomen op elkaar, en heeft getracht aan de hand hiervan verschillende eigenschappen der stof te verklaren.

Een meer gedetailleerde theorie van de struktuur der atomen is hieruit ontstaan door een studie van J. J. THOMSON over de rangschikking der elektronen binnen den positieven bol [3]). J. J. THOMSON gaat de stabiliteit van verschillende konfiguraties der elektronen na tegenover storingen van den evenwichtstoestand; ter vereenvoudiging wordt daarbij ondersteld dat alle elektronen met groote snelheid ronddraaien om een as in het atoom, en dat allen in één plat vlak liggen [4]).

---

[1]) W. THOMSON, Livre jubilaire dédié à M. BOSSCHA, 1901; Baltimore Lectures, p. 451.

[2]) J. J. THOMSON, Phil. Mag. **7**, p. 237, 1904.

[3]) J. J. THOMSON l.c.

[4]) In de berekening is niet gelet op de magnetische krachten van de rondloopende elektronen. Evenzoo is de uitstraling van energie verwaarloosd.

Met betrekking tot dit laatste kan echter opgemerkt worden, dat indien een ring van elektronen met gegeven omtrekssnelheid roteert, de *straling per elektron* des te *geringer* is, naarmate de ring uit *meer* elektronen bestaat.

Zie hierover:

J. J. THOMSON, On the Magnetic Properties of Systems of Corpuscles describing Circular Orbits, Phil. Mag. **6**, p. 681, 1903;

G. A. SCHOTT, Electromagnetic Radiation (Cambr. 1912), p. 103.

Het statische probleem: de evenwichtsfiguren van *stilstaande* elektronen, is behandeld door L. FÖPPL [1]).

De voornaamste resultaten van dit onderzoek zijn:

Voor 1, 2 of 3 elektronen is de rangschikking in een vlakke „ring" [2]) steeds stabiel, onverschillig of de elektronen al of niet rondloopen.

Voor $n = 4$, 5, is de rangschikking in een ring slechts stabiel indien het systeem voldoende snel roteert; is dit niet het geval, dan plaatsen 4 elektronen zich in de hoekpunten van een regelmatig tetraeder; 5 elektronen verdeelen zich in een ring van 3 met aan weerszijden 1 elektron.

Vlakke ringen met meer dan 5 elektronen zijn instabiel, welke rotatie-snelheid de ring ook heeft; zij kunnen echter stabiel gemaakt worden (bij voldoend snelle rotatie) indien men in het centrum van den bol een negatieve lading van passende grootte plaatst. THOMSON geeft hiervoor op:

aantal elektronen v/d. ring:	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
neg. lading in het centrum:	0	1	1	1	2	3	15	39	101	232 [3]) [4])

Aan het artikel van THOMSON is de volgende opgave ontleend:

aantal elektronen in den ring:	straling per elektron: (omtrekssnelheid van den ring: $c \,.\, 10^{-1}$ cm.;	$c \,.\, 10^{-2}$ cm.)
$n = 1$	$S = 1$ genomen;	$S = 1$ genomen
2	$9{,}6.10^{-2}$	$9{,}6.10^{-4}$
5	$5{,}6.10^{-5}$	$5{,}6.10^{-13}$
6	$1{,}6.10^{-7}$	$1{,}6.10^{-17}$

[1]) L. FÖPPL, Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom, Diss. Göttingen 1912.

[2]) Nauwkeuriger uitgedrukt: 1 elektron in het centrum van het atoom; 2 elektronen diametraal tegenover elkaar; 3 elektronen in een gelijkzijdigen driehoek.

[3]) Als eenheid van lading zal in het vervolg gewoonlijk gebruikt worden de lading van een eenwaardig ion, welke gelijk is aan de lading van het elektron. De grootte hiervan is volgens MILLIKAN: **$4{,}774.10^{-10}$ E. S. E.** Zie: R. A. MILLIKAN, Physik. Zeitschr. **14,** p. 796, 1913 [en Phil. Mag. **34,** p. 16, 1917].

[4]) Bij *afwezigheid van rotatie* zijn volgens FÖPPL (l. c.) de volgende konfiguraties stabiel:

$n = 4$: tetraeder; $n = 5$: een ring van 3 elektronen met aan weerszijden 1 elektron; $n = 6$: de elektronen plaatsen zich op de hoekpunten van een oktaeder; $n = 7$: 5 elektronen vormen een vlakke ring, aan weerszijden hiervan bevindt zich een der overblijvende elektronen; $n = 8$: twee ringen van 4 elektronen, die t.o.v. elkaar 45° verdraaid zijn; bij $n = 10$, 12, 14 verdeelen de elektronen zich over twee ringen en twee „polen".

Thomson leidt hieruit approximatief af de verdeeling van een groot aantal elektronen over meerdere koncentrische ringen, waarbij aangenomen wordt dat de elektrostatische werking der binnenste ringen op een meer naar buiten gelegene berekend mag worden alsof de geheele lading der binnenste ringen in het centrum vereenigd was. Deze rangschikking der elektronen in verschillende ringen vertoont periodiciteitseigenschappen welke herinneren aan het periodiek systeem der elementen. Neemt men nu aan dat het atoomgewicht van een element bepaald wordt door het aantal elektronen in het atoom [1]), dan kan men met dit model de chemische eigenschappen der elementen, speciaal wat betreft de valentie, eenigermate verklaren.

Ter verklaring van de radioaktieve verschijnselen geeft Thomson de volgende voorstelling: de roteerende elektronen stralen energie uit, waardoor hun beweging langzamerhand geremd wordt. Op een gegeven moment is de rotatie-snelheid niet meer voldoende om het systeem stabiel te houden: er vindt een soort van explosie plaats in het atoom, de elektronen nemen nieuwe evenwichtsstanden in, en het is mogelijk dat een deel van het atoom afgesplitst wordt, en met groote snelheid als alpha- of betadeeltje wegvliegt [2]).

[1]) J. J. Thomson, l. c. p. 258.

Oorspronkelijk nam Thomson aan dat de geheele massa van het atoom aan de elektronen toegeschreven moest worden; waterstof zou dan ca. 1850 elektronen per atoom moeten bezitten; Uranium ca. 400000.

Later leidde hij echter uit verschillende overwegingen af dat het aantal elektronen van de orde van grootte van het atoomgewicht moest zijn (Phil. Mag. **11**, p. 769, 1906).

[2]) Deze opvatting is echter in strijd met het feit dat de sterftekans van een individueel radioaktief atoom *onafhankelijk is van den ouderdom van het atoom*, zooals blijkt uit het exakt exponentieel verloop van de vervalkromme. Zie: Rutherford, Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen (Marx' Handbuch der Radiologie II. Leipzig 1913), p. 368, 561.

§ 2. HET ATOOMMODEL VAN RUTHERFORD.

Vergelijkt men het model van het atoom van RUTHERFORD, zooals dat in de inleiding reeds in hoofdtrekken besproken is, met dat van J. J. THOMSON, dan verdienen de volgende punten de aandacht:

1) In het model van RUTHERFORD is de positieve lading gekoncentreerd in een kern van zeer geringe afmetingen (voor afstanden kleiner dan 10^{-12} cm moet de kern nog zoo werken, alsof de geheele lading in een punt gekoncentreerd is; zie beneden), terwijl in het model van THOMSON de positief geladen bol de diameter van het atoom bepaalt, en dus van de orde van grootte van een Ångström-eenheid (10^{-8} cm) is.

2) In het model van THOMSON kunnen de elektronen stabiele konfiguraties innemen: de onderlinge afstooting der elektronen neemt af met het kwadraat van den afstand, terwijl de attraktie door den positieven bol recht evenredig is met de 1e macht van den afstand tot het centrum. Bij RUTHERFORD daarentegen volgen alle krachten de wet van COULOMB, en is het systeem in het algemeen niet stabiel [1], tenzij men bijzondere hypothesen invoert omtrent de beweging der elektronen. (N.B. Voorloopig zal op de stabiliteitsproblemen niet worden ingegaan, daar deze behandeld moeten worden in verband met de toepassing van de theorie der quanta op het atoommodel. Zie hoofdstuk IV, § 26 en 27) [2].

[1]) Zie: J. W. NICHOLSON, Monthly Notices Roy. Astr. Soc. **72**, p. 682 vlg. 1912. — Een atoom bestaande uit 1 kern met slechts 1 elektron (waterstof) is natuurlijk steeds stabiel. —

[2]) N. BOHR (Phil. Mag. **26**, p. 2, 1913) maakt de volgende opmerking: onder de grootheden die het model van THOMSON karakteriseeren komt er een voor — de straal van den positieven bol — die de dimensies heeft van een lengte en in grootte-orde overeenstemt met de afmetingen van het atoom, terwijl een dergelijke lengte niet voorkomt onder de grootheden die het andere atoom karakteriseeren (ladingen en massa's van elektronen en kern); ook kan een lengte niet alleen door deze grootheden bepaald worden.

Gelijk boven reeds vermeld is heeft RUTHERFORD zijn theorie ontwikkeld naar aanleiding van de resultaten gevonden omtrent de verstrooiing van alpha- en beta-deeltjes door metaallaagjes, e. d.

Laat men een bundel evenwijdige alpha-stralen door een laagje bladgoud gaan, dan blijkt dat de deeltjes uit hun aanvankelijke bewegingsrichting geworpen en naar alle kanten verstrooid worden. Deze afwijkingen uit de oorspronkelijke baan moeten worden toegeschreven aan de „botsingen" der deeltjes met de metaal-atomen, en het ligt voor de hand deze „botsingen" geheel *elektrisch* op te vatten: d.w.z. te onderstellen dat de verandering der bewegingsrichting ontstaat doordat de alpha-deeltjes door de sterke elektrische velden binnen de atomen vliegen [1]).

De reden die RUTHERFORD geleid heeft tot het aannemen van een elektrisch geladen kern van zeer kleine afmetingen en groote massa in het atoom was het voorkomen van zeer groote afwijkingshoeken (90° en meer), waarvan men moet onderstellen dat ze door een enkele botsing veroorzaakt zijn [2]). De alpha-deeltjes moeten dus door buitengewoon sterke velden heengaan (potentialen van de orde van 1000 à 2000 E. S. E.) [3]). Dergelijke potentialen komen niet voor bij het atoommodel van THOMSON, tenzij de positieve bol òf een bijzonder hooge lading heeft, òf zeer klein is [4]). RUTHERFORD heeft toen een atoom beschouwd waar

[1]) Misschien moet men ook de *magnetische* velden in de atomen in rekening brengen (W. M. HICKS, zie literatuur-opgave aan het eind van § 3).

[2]) GEIGER en MARSDEN (Proc. Roy. Soc. **A 82**, p. 495 (1909), **A 83**, p. 492 (1910)) hadden bij hun proeven over de verstrooiing van alpha-deeltjes o.a. het volgende gevonden: gaan alpha-deeltjes door een laagje bladgoud van ca. 0,00004 cm dikte, dan krijgt ongeveer 1/20000 der opvallende deeltjes een gemiddelde afwijking van 90°, terwijl de waarschijnlijke waarde van de afwijkingshoek ca. 0,87° is. Indien de groote afwijkingen ontstaan door een toevallige superpositie van vele kleinere, zou de verdeeling der hoeken ongeveer door de foutenwet van GAUSS beheerscht moeten worden:

$$w\,(D) \cong k/\sqrt{\pi} \,.\, e^{-k^2 D^2}.$$

Men kan gemakkelijk inzien dat dan bij een waarschijnlijke afwijking $D_w = 0.87°$ $= 0{,}48/k$, de kans op afwijkingen van 90° en meer bijna absoluut nul is. De waargenomen verdeelingswet der afwijkingshoeken is een geheel andere.

[3]) Een schatting krijgt men hiervan door te berekenen tegen welken potentiaal een alpha-deeltje met een aanvangssnelheid van b.v. 2.10^9 cm kan oploopen ($V_0 = M\,V^2/4\,e =$ ca. $1{,}3.10^4$ E. S. E.).

[4]) Het eerste is niet waarschijnlijk op grond van de schatting van het aantal elektronen in het atoom.

de massa gekoncentreerd is in een positief geladen kern van zeer geringe grootte [1]), terwijl de elektronen op groote afstanden om de kern heenloopen, en heeft nagegaan wat voor verdeeling van de afwijkingshoeken dergelijke atomen zouden teweegbrengen. De gevonden resultaten bleken zeer goed overeen te stemmen met de experimenteele uitkomsten, en het was mogelijk uit de proeven af te leiden:

1) een bovenste grens voor de grootte van de kern;
2) een approximatieve waarde voor de kernlading;
3) vast te stellen dat de afstooting tusschen atoomkern en alpha-deeltje omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den afstand.

[1]) Indien de kern niet de massa van het atoom droeg, zou deze om zoo te zeggen niet vast genoeg staan om de alpha-deeltjes uit hun baan te doen afwijken.

§ 3. VERSTROOIING VAN ALPHA-DEELTJES.

In het volgende zullen enkele hoofdpunten vermeld worden van de door RUTHERFORD opgestelde theorie omtrent de verstrooiing van alpha-deeltjes door materie. Voor verdere uitwerking der formules wordt verwezen naar de oorspronkelijke artikelen van RUTHERFORD en DARWIN [1]).

Zoolang men groote afwijkingshoeken beschouwt, mag worden aangenomen dat elke waargenomen afwijking ontstaan is bij een enkele botsing (z.g. enkelvoudige verstrooiing): de kans dat een alpha-deeltje tweemaal achtereen in een dun plaatje een groote afwijking krijgt is zeer gering [2]). Men kan dan ook volstaan met slechts de werking van de kern te onderzoeken, en den invloed der omringende elektronen verwaarloozen [3]).

[1]) E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **21,** p. 669, 1911; **27,** p. 488, 1914.
C. G. DARWIN, Phil. Mag. **27,** p. 499, 1914.

[2]) Om een afwijking te krijgen, grooter dan b.v. 5° moet de afstand van de oorspronkelijke baan van het alpha-deeltje tot de kern (in fig 1: p) volgens de beneden gegeven formules kleiner zijn dan:

$$p = 1/2 \, . \, d_{\text{min.}} \, . \cot (5/2)^{\circ} = \text{ca. } 4.10^{-11} \text{ cm},$$

wanneer men de aanvangssnelheid van het deeltje gelijk 2.10^9 cm, en de kernlading = 100 aanneemt. Nu liggen in een goudblaadje zooals door GEIGER en MARSDEN gebruikt is per cm² ca. $2{,}4.10^{18}$ atomen, zoodat de kans dat de oorspronkelijke baan op minder dan 4.10^{-11} cm langs een atoomkern loopt, en dus de afwijkingshoek grooter is dan 5°, kleiner is dan:

$$2{,}4.10^{18} \, . \, \pi \, (4.10^{-11})^2 = \text{ca. } 0{,}012.$$

De kans dat eenzelfde deeltje 2 keer achtereen een afwijking grooter dan 5° krijgt is kleiner dan het kwadraat hiervan.

[3]) De werking van een afzonderlijk elektron is praktisch nul door de kleine massa (7400 maal kleiner dan die van een alpha-deeltje). De werking van alle elektronen tezamen kan men schatten door ze te vervangen door een uniform met negatieve elektriciteit geladen bol (zie RUTHERFORD, l. c.).

Bij kleinere afwijkingshoeken is het wel noodig rekening te houden met de samengestelde verstrooiing en met den invloed der elektronen. (Deze laatsten veroorzaken ook een remming van de alpha-deeltjes bij hun passage door het metaal; zie hierover: N. BOHR, Phil. Mag. **25,** p. 10, 1913).

Bij de berekeningen is verder aangenomen, dat de massa van een deeltje als onafhankelijk van de snelheid mag worden beschouwd, en dat geen energie of hoeveelheid van beweging verloren gaat door uitstraling [1]).

1) *Verstrooiïng door een metaallaagje.*

Ter vereenvoudiging wordt aangenomen dat de kernen der metaalatomen onbeweeglijk zijn. Zij de lading van een atoomkern: $E_1 = Z \cdot e$; die van het alpha-deeltje $E_2 = 2 \cdot e$ [2]); de massa van het alpha-deeltje is M_2; de oorspronkelijke snelheid V. Onder den invloed van de afstooting door de atoomkern beschrijft het alpha-deeltje een hyperbool (zie fig. 1). Stelt men de loodlijn

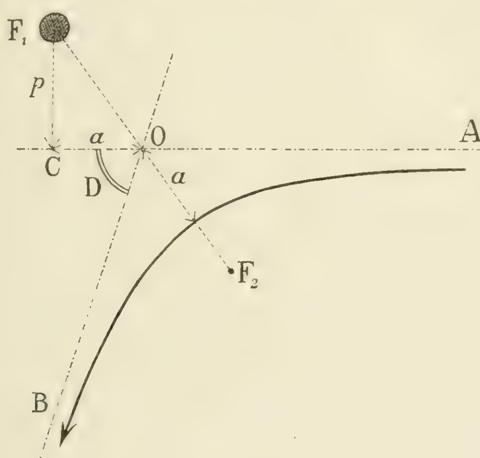


Fig. 1. Afstooting van een alpha-deeltje door een atoomkern.
F_1 = atoomkern.
$OC = a = 1/2 \cdot d_{\text{min.}}$ = halve reëele as van de hyperbool.

uit de kern op de oorspronkelijke baan neergelaten gelijk p, dan is de hoek van afwijking D gegeven door:

$$\cot D/2 = 2 \cdot p / d_{\text{min.}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waar $d_{\text{min.}} = 2\, E_1\, E_2 / M_2\, V^2$ de kleinste afstand tot de kern

[1]) Voor zoover mij bekend is heeft men den invloed van de veranderlijkheid der massa met de snelheid op de formules voor de verstrooiing niet nagegaan.

Dat de uitstraling van energie, enz., verwaarloosd wordt, vermeldt RUTHERFORD expliciet (Phil. Mag. **21**, p. 675, 1911).

[2]) Zie b.v. E. RUTHERFORD, Die Radioaktiven Substanzen und ihre Strahlungen (MARX' Handbuch der Radiologie II, Leipzig 1913), p. 100.

is die het alpha-deeltje zou kunnen bereiken als het recht op de kern aanvloog [1]).

Alle alpha-deeltjes hadden bij de proef oorspronkelijk dezelfde snelheid in grootte en richting. Zij Q het aantal deeltjes dat per sekonde door 1 cm² vliegt, dan is het aantal deeltjes dat per sekonde een afwijking tusschen D en $D + dD$ krijgt:

$$2\pi p \,.\, Q \,.\, \frac{dp}{dD} \,.\, dD = \frac{\pi E_1^2 \,.\, E_2^2}{M_2^2 \,.\, V^4} \,.\, Q \,.\, \frac{\cos D/2}{\sin^3 D/2} \,.\, dD \;.\;.\;. \quad (2)$$

Deze vliegen binnen een ruimtehoek: $2\pi \,.\, \sin D \,.\, dD$. Dus komen er per sekonde door een vlakje van 1 cm² op grooten afstand r van het atoom:

$$N_1 = \frac{Q}{r^2} \; \frac{E_1^2 \,.\, E_2^2}{4 M_2^2 \,.\, V^4} \; \mathrm{cosec}^4 . D/2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3)$$

Heeft men te doen met een metaallaagje dat zoo dun is dat de alpha-deeltjes niet merkbaar geremd worden, en dat z atomen per cm² bevat, terwijl de doorsnede van den bundel O cm² is, dan moet dit aantal met $z \,.\, O$ vermenigvuldigd worden [2]), zoodat men krijgt:

$$N = \frac{Q \,.\, z \,.\, O}{r^2} \,.\, \frac{E_1^2 \, E_2^2}{4 M_2^2 \, V^4} \,.\, \mathrm{cosec}^4 \, D/2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

2) *Verstrooiing door lichtere stoffen:* invloed van de beweeglijkheid der kernen.

Door DARWIN [3]) is nagegaan hoe groot de verstrooiing wordt, wanneer men rekening houdt met de beweeglijkheid van de atoomkernen; hij komt tot de volgende resultaten:

a) De massa van de kern (M_1) is grooter dan die van het alpha-deeltje (M_2). Dan is:

$$N = \frac{Q \,.\, z \,.\, O}{r^2} \,.\, \frac{E_1^2 \, E_2^2}{4 M_2^2 \, V^4} \,.\, \left\{ \mathrm{cosec}^4 \frac{D}{2} - 2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{D}{2}\right) \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^4 \;.\;.\;. \right\} \;.\;. \quad (5)$$

[1]) Indien $E_1 \,.\, E_2$ negatief was (attraktie tusschen kern en alpha-deeltjes) vindt men dezelfde formule voor D; in de figuur zou dan de kern zich in F_2 moeten bevinden (in dit geval is $d_{\min.}$ slechts een rekengrootheid).

[2]) Bij groote afwijkingshoeken vliegen de alpha-deeltjes zoo dicht langs de kernen, dat elk atoom werkt alsof het alleen aanwezig was.

[3]) C. G. DARWIN, Phil. Mag. **27**, p. 499, 1914.

Voor metalen met atoomgewicht grooter dan b.v. 50 (*Fe*, *Cu*, *Au*, enz.) is de korrektie die bij de formule van RUTHERFORD komt kleiner dan 1,3 °/₀.

b) De massa der kernen van de verstrooiende stof is gelijk aan, of kleiner dan die van de alpha-deeltjes (verstrooiing door Helium of Waterstof). In dit geval krijgen de kernen van de verstrooiende stof groote snelheden bij de botsingen (vergelijkbaar met, vaak zelfs grooter dan die van de alpha-deeltjes). Door deze groote snelheden zullen de teruggestooten *He*- of *H*-atomen evenals de oorspronkelijke alpha-deeltjes ionisatie en scintillatie kunnen geven [1]): hiermee moet rekening gehouden worden bij het tellen van het aantal verstrooide deeltjes (de formules hiervoor zijn door DARWIN, l. c. afgeleid).

H-atomen kunnen een snelheid tot 1,6 maal die van een alpha-deeltje krijgen: hun draagwijdte („range") is dan vele malen grooter dan die van de laatste [2]).

3) Invloed van de *wet van afstooting* tusschen kern en alpha-deeltjes.

Indien men onderstelt dat de afstooting tusschen kern en alpha-deeltjes niet de wet van COULOMB volgt, maar b.v. evenredig is met r^{-n}, is het probleem in het algemeen niet meer geheel te berekenen. DARWIN [3]) heeft echter aangetoond dat men steeds kan aangeven hoe de verstrooiing van de snelheid der invallende deeltjes afhankelijk is; hij vindt dat N evenredig is met:

$$V^{-4/(n-1)} \qquad \qquad (6)$$

(b.v.: $n = 2$: N evenredig met V^{-4}
$n = 3$: V^{-2}, enz.)

Vergelijking van de theorie met de experimenteele resultaten. In zijn eerste artikel geeft RUTHERFORD een diskussie van de door GEIGER & MARSDEN in 1909 en 1910 gepubliceerde resultaten [4]) [5]). Voorzoover kon worden nagegaan stemden hun uit-

---

[1]) Deze scintillatie door de teruggestooten *H*-atomen is experimenteel aangetoond door MARSDEN (Phil. Mag. **27**, p. 824, 1914).

[2]) Zie hierover: E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **27**, p. 492, 1914.

[3]) C. G. DARWIN, l. c. p. 504.

[4]) E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **21**, p. 680, 1911.

[5]) GEIGER & MARSDEN, Proc. Roy. Soc. **A 82**, p. 495, 1909; **A 83**, p. 492, 1910.

komsten bevredigend met de theorie overeen. Naderhand hebben GEIGER en MARSDEN uitgebreide nieuwe reeksen van metingen gedaan [1]); hun voornaamte uitkomsten zijn:

a) Een vrij goede bevestiging van de evenredigheid van N met $\operatorname{cosec}^4 D/2$, voor afwijkingshoeken D van 150° tot 5°, waarbij N varieerde van 1 tot 250000 (zie tabel, l. c. p. 610).

b) Bij dunne blaadjes van eenzelfde metaal is de verstrooiing evenredig met de dikte, dus met het aantal atomen per cm^2 (l. c. p. 615).

c) Bij blaadjes van verschillende metalen is bij gelijk aantal atomen per cm^2 de verstrooiing evenredig met het kwadraat van het atoomgewicht (l. c. p. 617). Dus moet de *lading van de kern* E_1 *evenredig* zijn met het *atoomgewicht.*

d) De verstrooiing is omgekeerd evenredig met de vierde macht van de snelheid der alpha-deeltjes (l. c. p. 620). Dus is de *afstooting* tusschen kern en alpha-deeltje *omgekeerd evenredig* met *de tweede macht van den afstand.*

e) Uit een absolute bepaling van het aantal verstrooide deeltjes werd afgeleid dat de kernlading van een atoom met atoomgewicht A bedraagt:

$$E_1 = Z \cdot e \cong 1/2 \cdot A \cdot e.$$

De mogelijke fout in deze waarde is ca. 20 °/₀ (l. c. p. 622).

Verder dienen hier vermeld te worden de fotografieën van banen van alpha-deeltjes door gassen, welke door WILSON en DEBENDRA BOSE gemaakt zijn [2]). WILSON heeft foto's gemaakt van de banen van alpha-deeltjes door lucht; deze banen zijn over groote afstanden rechtlijnig, doch vertoonen af en toe plotselinge ombuigingen, welke ontstaan zijn wanneer een deeltje vlak langs de kern van een atoom gepasseerd is. Dit is een direkt bewijs van de juistheid der opvatting van RUTHERFORD, dat groote afwijkingen bij een enkele botsing ontstaan. — D. BOSE fotografeerde banen in waterstofgas; het gelukte haar op 1038 gefotografeerde banen er 7 te krijgen die aan het einde *vertakkingen* toonden: de eene tak moet toegeschreven worden aan het alpha-deeltje zelf, de andere aan het teruggestooten waterstof-atoom.

[1]) GEIGER & MARSDEN, Phil. Mag. **25,** p. 604, 1913.

[2]) C. T. R. WILSON, Proc. Roy. Soc. **A 87,** p. 277, 1912.
DEBENDRA BOSE, Phys. Zeitschr. **17,** p. 388, 1916.

Boven is reeds vermeld dat MARSDEN de scintillatie door de teruggestooten *H*-atomen heeft kunnen aantoonen [1]).

Op de theorie van de verstrooiing door een atoom volgens het model van J. J. THOMSON, en op verdere kwesties omtrent de verstrooiing zal hier niet worden ingegaan.

Slechts wordt naar de volgende literatuur verwezen:

a) Verstrooiing door een atoom volgens het model van J. J. THOMSON:

J. J. THOMSON, Cambr. Lit. & Phil. Soc. XV, pt. 5 (1910).
E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **21,** p. 669, 1911.

b) Verstrooiing van alpha-deeltjes door magnetische atoomkernen („magnetonen"):

W. M. HICKS, Proc. Roy. Soc. **A 90,** Meeting of March, 19, 1914, p. 12, 16, en nader uitgewerkt: **A 90,** p. 356, 1914.

Prof. HICKS onderzoekt de verschillende banen die een alpha-deeltje om of in de nabijheid van een magneton kan beschrijven; formules voor de verstrooiing zijn hier echter niet uit afgeleid.

c) Samengestelde verstrooiing („compound scattering") in de theorie van RUTHERFORD:

E. RUTHERFORD, l. c. p. 677.

d) Verstrooiing van beta-deeltjes:

Theorie van J. J. THOMSON: Cambr. Lit. & Phil. Soc. XV, p. 5 (1910);
van E. RUTHERFORD: Phil. Mag. **21,** p. 683, 1911; **27,** p. 491, 1914.

Experimenteel onderzoek: J. CROWTHER, Proc. Roy. Soc. **A 84,** p. 226, 1910.

Banen van beta-deeltjes vlak langs een atoomkern: C. G. DARWIN, Phil. Mag. **25,** p. 201, 1913.

e) Absorptie van alpha-deeltjes:

(1) C. G. DARWIN, A Theory of the Absorption and Scattering of the α-Rays, Phil. Mag. **23,** p. 907, 1912. — DARWIN gebruikt als grondslag de theorie van RUTHERFORD over den bouw der atomen, en gaat de werking tusschen

[1]) MARSDEN, Phil. Mag. **27,** p. 824, 1914.

alpha-deeltjes en de elektronen van het atoom na. Voor het aantal elektronen per atoom worden waarden gevonden, liggende tusschen het atoomgewicht en de helft ervan.

(2) N. BOHR, On the Theory of the Decrease of Velocity of Moving electrified Particles on passing through Matter, Phil. Mag. **25**, p. 10, 1913. — BOHR gaat eveneens uit van de theorie van RUTHERFORD, doch behandelt het probleem op eenigszins andere wijze. Voor het aantal elektronen wordt bij elementen van hooger atoomgewicht een waarde gevonden, van dezelfde orde van grootte als te verwachten is naar de theorie van RUTHERFORD. In het bizonder komt BOHR tot het resultaat dat Waterstof 1, Helium 2 elektronen per atoom heeft.

§ 4. GROOTTE VAN DE KERNLADING.

Volgens het bovenstaande blijkt de theorie van RUTHERFORD in goede overeenstemming te zijn met de waarnemingen, en de onderstelling dat in een atoom een positief geladen kern van zeer geringe afmetingen aanwezig is, welke kern de drager is van de massa van het atoom [1]), heeft groote waarschijnlijkheid. Wat de afmetingen betreft het volgende: De formules voor de verstrooiing zijn afgeleid in de onderstelling dat voor de kleinste in aanmerking komende afstanden de kernen zich gedragen alsof hun lading in een punt gekoncentreerd is. Berekent men wat de kleinste afstanden tusschen kern en alpha-deeltje zijn die voorkomen, dan vindt men hieruit dat b.v. voor goud de straal van de kern kleiner moet zijn dan 3.10^{-12} cm, voor Waterstof en Helium kleiner dan $1,7.10^{-13}$ cm [2]).

Van groot belang is nu vooreerst de *grootte van de kernlading.* Deze moet gelijk wezen aan het aantal elektronen dat de kern omgeeft, en uit de proeven van GEIGER en MARSDEN is afgeleid dat ze ongeveer gelijk is aan de helft van het atoomgewicht [3]).

[1]) De elektronen om de kern dragen ook bij tot de massa van het atoom, doch slechts voor een zeer klein bedrag.

[2]) Zie E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **21**, p. 671, 1911; **27**, p. 493, 1914.

Voor de straal van het elektron was berekend 2.10^{-13} cm, op grond van de veronderstelling dat de geheele massa van het elektron van elektromagnetischen aard was, en dat het zich gedroeg volgens de door LORENTZ gegeven formules.

(Daar volgens de formules der relativiteitstheorie de gewone of ware massa op precies dezelfde wijze van de snelheid afhankelijk is als de elektromagnetische massa volgens de formules van LORENTZ, is men door de experimenten over de massa van het elektron niet gedwongen tot deze veronderstelling).

[3]) Het aantal elektronen per atoom is langs geheel anderen weg berekend uit de *verstrooiing der Röntgenstralen* door BARKLA. Hierbij wordt verondersteld dat deze verstrooiing veroorzaakt wordt door de elektronen in het atoom, overeenkomstig de theorie van J. J. THOMSON (Conduction of Electricity through Gases,

VAN DEN BROEK heeft de hypothese uitgesproken dat de lading van de kern gelijk zou zijn aan het *rangnummer van het element in het periodiek systeem* [1]). Het waterstof-atoom zou de lading 1 hebben, en dus bestaan uit een kern waaromheen één elektron loopt; Helium bezit de lading 2, Lithium 3, enz. Deze hypothese heeft grooten bijval gevonden. Er bleef echter nog een onzekerheid in de waarde van het rangnummer, daar het mogelijk is dat tusschen de bekende elementen nog andere behooren te staan [2]). Deze onzekerheid is grootendeels overwonnen door de onderzoekingen van MOSELEY over de Röntgenspektra der elementen [3]). MOSELEY vond (wat later door anderen is bevestigd) dat de Röntgenspektra *monotoon van element tot element* veranderen, en dat de frequenties van de sterkste lijnen bij benadering kunnen worden voorgesteld door formules van den vorm:

$$\nu = A \,.\, (Z - b)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waar A en b konstanten zijn, afhankelijk van de beschouwde

p. 255). Aangenomen wordt dat elk elektron met de invallende straling meetrilt alsof het geheel vrij was. BARKLA komt tot de volgende resultaten:

(1) Uit de experimenten is gebleken dat Röntgenstralen van korte golflengte door gelijke massa's van verschillende stoffen bijna even sterk verstrooid worden (bij lichte elementen geldt dit ook voor Röntgenstralen van grootere golflengte). Zie C. G. BARKLA & Miss J. G. DUNLOP, Phil. Mag. **31**, p. 222, 1916. Het aantal elektronen is dus evenredig met het atoomgewicht. Uit de absolute grootte van de verstrooiing wordt gevonden dat dit aantal ongeveer de helft van het atoomgewicht bedraagt. (Zie C. G. BARKLA, Phil. Mag. **21**, p. 648, 1911, en C. G. BARKLA & Miss J. G. DUNLOP, l. c.).

(2) Bij waterstof is naar verhouding de verstrooiing tweemaal te groot, dit moet derhalve 1 elektron per atoom hebben (zie C. G. BARKLA & Miss J. G. DUNLOP, l. c.).

Naar aanleiding van de theorie van J. J. THOMSON dient nog het volgende opgemerkt te worden:

a) Hoe deze theorie te vereenigen is met de quantentheorie der lichtstraling is nog niet verklaard.

b) Op grond van de radioaktieve verschijnselen neemt men aan dat ook binnen in de kern elektronen kunnen zijn. Deze kern-elektronen zouden dan geen verstrooiing mogen veroorzaken, wat verklaard zou kunnen worden door te onderstellen dat ze zeer vast gebonden zijn (zie E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **27**, p. 496, 1914).

[1]) A. VAN DEN BROEK, Phys. Zeitschr. **14**, p. 32, 1913.

[2]) VAN DEN BROEK geeft in zijn artikel een tabel voor het periodiek systeem waarin nog vele nummers tusschen de bekende elementen ingevoegd zijn.

[3]) H. G. J. MOSELEY, Phil. Mag. **26**, p. 1024, 1913; **27**, p. 703, 1914.

lijn, en Z het rangnummer van het atoom is [1]). In de reeks van Aluminium tot Goud bleken slechts 3 plaatsen open te zijn: de nummers 43, 61 en 75. Alle anderen zijn door bekende elementen ingenomen [2]). Aan Aluminium heeft men hierbij het nummer 13 gegeven, in de onderstelling dat van *Al* naar beneden geen elementen ontbreken [3]) [4]).

[1]) Later zijn door A. SOMMERFELD exaktere formules gegeven (Ann. d. Phys. **51**, p. 125, vgl., 1916). (Zie hoofdstuk III, § 19).

Het algemeene karakter der formules is echter hetzelfde gebleven: de frequenties der verschillende lijnen worden door één getal bepaald, dat van element tot element met 1 opklimt.

[2]) In de gevallen waarin de rangschikking der elementen in het periodiek systeem niet overeenstemt met de volgorde der atoomgewichten, heeft het onderzoek der Röntgenspektra de rangschikking in het systeem bevestigd (*Ar*—*K* en *Co*—*Ni*: zie bij MOSELEY, l. c.; *Te*—*J*: M. SIEGBAHN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 39, 1916).

[3]) Zie over de nummers der lichtere elementen ook: E. RUTHERFORD en J. M. NUTTALL, Phil. Mag. **26**, p. 710, 711, 1913.

Door sommige onderzoekers wordt vermoed dat ook beneden Aluminium nog elementen ingevoegd moeten worden, speciaal *Coronium* en *Nebulium*. Zie hierover: J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **72**, p. 49, 139, 677, 729 (1911/12); **74**, p. 204, 486, 623 (1914); verg. ook beneden, § 30, noot 1). — Hoe deze elementen in het periodiek systeem moeten worden ondergebracht is niet bekend.

Verder wordt nog vermoed dat een element *Metaneon* bestaat, dat echter isotoop zou zijn met *Neon*, en dus hetzelfde atoomnummer zou hebben. Zie hierover: J. J. THOMSON, Rays of Positive Electricity, London 1913, p. 116 en: F. ASTON, Phys. Zeitschr. **14**, p. 1303, 1913.

[4]) M. SIEGBAHN heeft de reeks uitgebreid tot Uranium (nummer 92) Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 150, 1916.

Zie voor een algemeen overzicht van de Röntgenspektra: M. SIEGBAHN, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. XIII, p. 296, 1916 (bevat uitgebreide tabellen).

§ 5. OVERZICHT VAN DE VOORNAAMSTE HYPOTHESEN OVER DEN BOUW EN DE EIGENSCHAPPEN DER ATOMEN, WELKE MET DE THEORIE VAN RUTHERFORD SAMENHANGEN [1]).

(1) Een atoom bestaat uit een kern van zeer kleine afmetingen, welke positief elektrisch geladen is. De grootte van de positieve lading (d.w.z. de algebraische som van de in de kern aanwezige ladingen) is een geheel aantal malen de absolute waarde van de lading van het elektron. Dit aantal is hetzelfde als het rangnummer van het element in het periodiek systeem, en wordt *atoomnummer* genoemd.

De kern is omgeven door elektronen, wier aantal gelijk is aan het atoomnummer. De elektronen zijn vermoedelijk in koncentrische ringen of bollen gerangschikt; deze rangschikking is volkomen bepaald door de kernlading [2]).

(2) De eigenschappen van een atoom zijn te verdeelen in twee groepen: die welke bij de kern behooren, en die welke aan de elektronen te danken zijn. De laatste hangen af van het aantal en van de rangschikking der elektronen, *en zijn dus geheel bepaald door het atoomnummer.*

Eigenschappen welke aan de elektronen moeten worden toegeschreven zijn:

a) De chemische eigenschappen, welke samenhangen met de buitenste elektronen. Vermoedelijk behooren tot deze buitenste elektronen de z.g. „valentie-elektronen”, welke de chemische verbinding van verschillende elementen teweegbrengen. Het aantal der buitenste elektronen schijnt een eenigermate perio-

[1]) Een samenvattende bespreking van de meeste dezer hypothesen is gegeven door: K. FAJANS, Das Periodische System der Elemente, die radioaktiven Umwandlungen und die Struktur der Atome, Phys. Zeitschr. **16**, p. 456, 1915.

[[2]) Zie hierover het in § 28* besproken artikel van L. VEGARD (Verh. Deutsch. Phys. Ges. **19**, p. 344, 1917.)]

dieke funktie van het atoomnummer te zijn, wat de periodiciteit der chemische eigenschappen ten gevolge heeft [1]).

b) Het zichtbare spektrum, dat vermoedelijk ook met de buitenste elektronen samenhangt [2]).

c) Foto-elektrische eigenschappen, ionisatie, enz., eveneens aan de buitenste elektronen toe te schrijven.

d) Het Röntgenspektrum, dat aan de binnenste elektronen te danken is, en dat geen periodiciteit vertoont, doch monotoon van element tot element verandert [3]).

(**3**) De kern van een atoom schijnt een zeer ingewikkelde struktuur te bezitten, waarover zoo goed als niets bekend is. Vermoedelijk is de kern opgebouwd uit positief geladen deeltjes (alpha-deeltjes of Helium-kernen (?)), en uit elektronen [4]).

Door de struktuur van de kern worden bepaald:

a) De massa van de kern, en dus het atoomgewicht van het element (afgezien van de zeer kleine bijdrage der elektronen) [5]).

b) De *radioaktieve eigenschappen*, welke verklaard worden uit een uiteenvallen van de kern.

Zendt de kern van een atoom een *alpha-deeltje* uit, dan gaat het atoom over in een ander waarvan het *atoomnummer 2 lager* is, terwijl het atoomgewicht tennaastenbij met *4* afneemt [6]). Bij uitzending van een *beta-deeltje* (een kern-elektron) *neemt het*

[[1]) Zie hierover het in § 28* geciteerde artikel van VEGARD.]

[2]) Zie hierover: Hoofdstuk III, § 17, slot [en § 28*.]

[3]) Over de elektronen tusschen de buitenste en de allerbinnenste is weinig bekend. Ze zijn o.a. van belang voor de verstrooiing en de remming van alpha- en beta-deeltjes.

[4]) Zie: N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 500, 1913; E. RUTHERFORD, Phil. Mag. **27**, p. 495, 1914; K. FAJANS, Phys. Zeitschr. **16**, p. 485, 1915.

[5]) Het atoomgewicht is bij benadering gegeven door de formule:

$$A = 2 . Z + Z^2/150 \text{ plus een grillige deviatie-funktie}$$

waarop ik gekomen ben door een opmerking van Prof. EHRENFEST.

Het atoomgewicht is echter niet eenduidig door het atoomnummer bepaald (zie onder (**4**): isotopen.) — Bij de elementen Ar—K, Co—Ni, Te—J verandert het atoomgewicht in tegengestelden zin als het atoomnummer.

[6]) Het atoomgewicht van het element neemt af met het atoomgewicht van Helium, plus een bedrag dat in verband staat met de uitgezonden energie. Zie hierover: R. SWINNE, Phys. Zeitschr. **14**, p. 145, 1913; K. FAJANS, Phys. Zeitschr. **16**, p. 459, 1915.

atoomnummer met 1 toe; het atoomgewicht verandert zoo goed als niet [1]).

Op de radioaktieve verschijnselen zelf kan hier niet worden ingegaan; ik moet me beperken tot het vermelden van enkele problemen:

(I) Zijn behalve de elementen met hooge atoomnummers (laatste afdeeling van het periodiek systeem) ook andere radioaktief?

Bij *Kalium* en *Rubidium* schijnt met groote zekerheid vastgesteld te zijn dat ze beta-stralen uitzenden [2]).

(II) Er bestaat een verband tusschen de *draagwijdte der alphadeeltjes* die een radioaktief element uitzendt, en de *levensduur* van het element [3]).

Deze betrekking is van den vorm:

$$^{10}log\ \lambda = A + B\ .\ ^{10}log\ R,$$

waarin: λ = transformatie-konstante;
R = draagwijdte („range”);
A en B zijn konstanten [4]).

Men zie hierover:

R. Swinne, Phys. Zeitschr. **13**, p. 14, vgl., 1912. (Swinne stelt ook eenige andere formules voor).

F. A. Lindemann, Note on the Life of Radioactive Substances and the Range of the Rays emitted, Phil. Mag. **30**, p. 560, 1915.

Lindemann onderstelt dat in de kern N deeltjes aanwezig zijn, welke een of andere periodieke beweging uitvoeren met de frequentie ν. Passeeren alle deeltjes binnen een tijdsverloop τ een „kritisch gebied” in de kern, dan wordt het atoom instabiel, en valt uiteen. De waarschijnlijkheid voor het plaatsvinden hiervan is: $(\tau\nu)^N$, waaruit volgt:

$$\text{transformatie-konstante } \lambda = (\tau\nu)^N.$$

Lindemann stelt nu: $\nu = E/h$, waar E = energie van

[1]) Cf. K. Fajans, l. c. p. 466 („Verschuivingswetten”).
[2]) Cf. Rutherford, Die Radioaktiven Substanzen, enz. (1913), p. 528.
[3]) E. Rutherford, Die Radioaktiven Substanzen, enz. (1913), p. 547.
[4]) F. A. Lindemann — Phil. Mag. **30**, p. 560, 1915 — geeft hiervoor op:

Uranium-Radium-reeks:	$A = -36{,}9$	$B = 53{,}3$.
Thorium-reeks:	$-38{,}4$	„
Actinium-reeks:	$-39{,}6$	„

het deeltje, en h = konstante van PLANCK. Voor E wordt genomen de energie van het uitgezonden alpha-deeltje, welke met de draagwijdte verbonden is door de empirische formule:

$$R = 1{,}35 \,.\, 10^8 \,.\, E^{3/2}.$$

Dan is:

$$lg\, \lambda = N \,.\, (lg\, 5{,}76 \,.\, 10^{20} + lg\, \tau) + 2 \,.\, N/3 \,.\, lg\, R.$$

Vergelijkt men deze formule met de empirische, dan blijkt dat $N = 3/2 \,.\, B$; in verband met de waarde van B (zie noot [4]), vor. blz.) volgt hieruit:

$$N = 80.$$

LINDEMANN brengt verder de grootheid τ in verband met den straal van de kern, enz.

Een eenigermate analoog verband schijnt te bestaan tusschen de snelheid der beta-deeltjes en de transformatiekonstanten [1]).

(III) Een radioaktief element dat beta-stralen emitteert zendt deze uit in *homogene groepen*, elk met een bepaalde snelheid [2]).

(IV) Niet opgehelderd is het verband tusschen beta- en gammastralen [3]).

(V) Zeer eigenaardig zijn de *splitsingen* in de transformatiereeksen der radioaktieve elementen bij *RaC*, *AcC*, *ThC*, en misschien bij enkele andere [4]); verder ook de omzettingen waarbij geen alpha- of beta-stralen worden uitgezonden [5]) (*Ac*; *MsTh 1*).

(**4**) Elementen kunnen verschillende kernstruktuur bezitten, terwijl de kernen toch dezelfde totale ladingen hebben, zoodat het atoomnummer voor deze elementen hetzelfde is. Dergelijke elementen hebben dan verschillend atoomgewicht en verschillende radioaktieve eigenschappen: de rangschikking der elektronen

[1]) E. RUTHERFORD, Die Radioaktiven Substanzen, enz. (1913), p. 549. R. SWINNE, Phys. Zeitschr. **13**, p. 17, 1912.

[2]) E. RUTHERFORD, l. c. p. 208, 552 (hier is ook verdere literatuur opgegeven). — Vergelijk ook P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 815, 1916. (Zie beneden, hoofdstuk III, § 24.)

[3]) Zie E. RUTHERFORD, l. c. p. 225.

[4]) E. RUTHERFORD, l. c. p. 607, vgl. — K. FAJANS, Phys. Zeitschr. **16**, p. 458, 469.

[5]) E. RUTHERFORD, l. c. p. 608, 609. — K. FAJANS, l. c. p. 469.

om de kern is echter hetzelfde, zoodat ze ook in alle onder (2) genoemde eigenschappen met elkaar overeenstemmen. In het periodiek systeem nemen deze elementen dezelfde plaats in; men noemt ze *isotopen* [1]).

[1]) *Isotope elementen.*

Het beste bestudeerd zijn de isotopen van *lood*. Voor de atoomgewichten is gevonden:

Radiolood (*RaG*), onderzocht door Hönigschmidt:	206,06.
(Zie K. Fajans, Phys. Zeitschr. l. c. p. 473.)	
Thoriumlood (ThD_2), onderzocht door F. Soddy:	207,70.
(Nature **98**, p. 469, 1917.)	
Gewoon lood:	207,20.

De atoomvolumina dezer loodsoorten zijn gelijk (dus spec. gewicht evenredig met atoomgewicht).

In dezelfde groep zit ook nog Actiniumlood ($Ac\,D_2$), dat een atoomgewicht ca. 207 moet hebben. Verder zijn er nog een viertal radioaktieve elementen van korte periode in deze groep: *RaD* (vervaltijd: 18 jaar, at. gew. ca. 210); *AcB* (36 min.; at. gew. 211?) *ThB* (10,6 uur; 212); *RaB* (27 min.; 214).

Voor de andere groepen en voor de bewijzen der identiteit van de chemische eigenschappen van isotope elementen wordt verwezen naar het meermalen geciteerde artikel van K. Fajans (p. 461, 471, 478).

Overeenstemming van het gamma-stralen-spektrum van *RaB* en *RaC* met het Röntgenspektrum van *Pb* en *Bi*: zie E. Rutherford en C. N. da C. Andrade, Phil. Mag. **27**, p. 854, 1914, en een opmerking van Dr. A. D. Fokker [Handel. XVIe Natuur- en Geneesk. Congres (1917), p. 121.]

Het verschil in de massa van de kern bij isotope elementen veroorzaakt kleine verschillen in sommige fysische eigenschappen; zie hierover: K. Fajans, Phys. Zeitschr. **16**, p. 478, 1915, en: Elster u. Geitel-Festschrift (Braunschweig 1915), p. 623.

Opmerking. De atoomnummers der radioaktieve elementen — waaronder vele isotopen voorkomen — heeft men afgeleid:

a) met behulp der vermelde *verschuivingswetten* (zie onder (3), b)), waarbij men één ervan als bekend moest aannemen (bv. Lood = 82);

b) voor een aantal dezer elementen uit het onderzoek van M. Siegbahn over de Röntgenspektra.

De volgens beide methoden afgeleide atoomnummers stemmen onderling volkomen overeen; hierin ligt een mooie bevestiging van de hypothesen van Rutherford en van van den Broek.

HOOFDSTUK II.

DE TOEPASSING VAN DE THEORIE DER QUANTA OP HET ATOOMMODEL.

Onder den naam „*Quantentheorie*” vat men eenige hypothesen samen, die betrekking hebben op de beweging en de uitstraling van energie van mechanische en elektrische systemen. Dergelijke hypothesen zijn het eerst uitgesproken door Planck in zijn theorie der warmtestraling (1901); naderhand zijn ze gewijzigd en gegeneraliseerd, en vooral toen ze door N. Bohr en anderen toegepast werden op het atoommodel van Rutherford hebben ze een groote uitbreiding gekregen, zoodat men zeggen kan dat de jongste ontwikkeling der quantentheorie en de studie van den bouw der atomen hand in hand zijn gegaan.

Het is er nog verre vandaan dat deze hypothesen een eenigermate afgeronde theorie vormen; ook is men het niet eens over hun exakte formuleering. Ze zijn geheel in strijd met datgene wat men uit de klassieke mechanika en elektrodynamika afleidt, en tot nu toe mist men een algemeen principe dat aangeeft in wat voor betrekking de klassieke theorie en de quantentheorie tot elkaar staan. Voorloopig is de quantentheorie te beschouwen als een stel rekenregels, waarvan het gebied van geldigheid wel zeer algemeen is, doch geen scherp omschreven begrenzing heeft. Het valt echter niet te ontkennen dat deze rekenregels in vele gevallen tot schitterende resultaten geleid hebben [1]).

[[1]) In verschillende gevallen naderen de formules van de quantentheorie voor groote waarden der quantengetallen asymptotisch tot de formules van de klassieke theorie, zoodat het schijnt dat men de laatste op moet vatten als grensgeval van de eerste.]

De toepassing der quantenhypothesen op RUTHERFORD's theorie der atomen heeft geleid tot geheel nieuwe opvattingen omtrent den oorsprong van de spektra der elementen. Het eerste groote resultaat in deze richting werd in 1913 bereikt door N. BOHR, aan wien het gelukte formules voor de spektra van Waterstof en Helium af te leiden, welke op verrassende wijze met de uit de experimenten gevondene overeenstemden. Later is dit werk voortgezet door SOMMERFELD, EPSTEIN, DEBYE, SCHWARZSCHILD en anderen; deze hebben formules gevonden voor de detailstruktuur der spektraallijnen, den bouw der Röntgenspektra, den invloed van een elektrisch veld op het spektrum, en nog meer verschijnselen, welke formules zich algemeen onderscheiden door een bizonder goede quantitatieve overeenstemming met de waarnemingen.

In het volgende zullen deze theorieën besproken worden; daarbij zal niet de historische ontwikkeling gevolgd worden, doch er zal getracht worden de verschillende berekeningen zooveel mogelijk van uit één gezichtspunt te behandelen.

§ 6. DE Ie HYPOTHESE DER QUANTENTHEORIE.

Zooals boven reeds gezegd is hebben de hypothesen der quantentheorie betrekking op de beweging van mechanische en elektrische systemen, speciaal op de beweging van systemen, bestaande uit elektrisch geladen deeltjes (elektronen enz.). Volgens de klassieke theorie moet men bij de berekening van de beweging van dergelijke systemen letten op de werkingen tusschen de elektronen en het elektromagnetische veld. In het algemeen zal een zoodanig systeem energie en hoeveelheid van beweging uitstralen, terwijl het veld een reaktie op de elektronen uitoefent welke hun beweging remt [1]).

Volgens de Ie hypothese der quantentheorie moet nu een dergelijk systeem bepaalde, op nader te vermelden wijze door geheele getallen vastgelegde, bewegingen kunnen uitvoeren, waarbij deze uitstraling van energie *niet* plaats vindt, welke bewegingen geheel volgens de vergelijkingen der klassieke mechanika berekend kunnen worden, zonder op de reaktie van het eigenveld op de elektronen te letten. (Ter afkorting zullen deze bewegingen aangeduid worden met den naam: *quantenbewegingen).*

Aangenomen wordt hierbij dat een in beweging zijnd elektron een hoeveelheid van beweging bezit, welke bij groote snelheden gegeven is door de formule: $G = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, overeenkomstig de vergelijkingen der relativiteitstheorie.

In formules uitgedrukt: de beweging van een elektron wordt beheerscht door de LAGRANGE-funktie:

[1]) Zie enkele opmerkingen hierover: hoofdstuk V, § 31.
Een aantal problemen over de beweging van elektronen en de uitstraling van energie zijn uitgerekend door: G. A. SCHOTT, Electromagn. Radiation, Cambridge 1912.

$$L = -mc^2\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right)+e\left\{\varphi-\frac{\dot{x}.a_x+\dot{y}.a_y+\dot{z}.a_z}{c}\right\}$$

waar φ de elektrostatische potentiaal, $a_x\, a_y\, a_z$ de vektorpotentialen van het *uitwendige* (d. w. z. niet door het beschouwde elektron zelf veroorzaakte) veld zijn [1] [2]). (lading van het elektron: $-e$).

[1]) Bij alle formuleeringen van hypothesen uit de quantentheorie denke men steeds: dit schijnt zoo te zijn naar de op het oogenblik geldende opvattingen. Bij de snelle ontwikkeling die de quantentheorie in de laatste jaren ondergaan heeft, is het zeer goed mogelijk dat men binnen korten tijd deze hypothesen anders en duidelijker kan uitspreken.

[2]) De vergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0, \text{ enz.},$$

uit deze funktie afgeleid, leveren onmiddellijk de gewone bewegingsvergelijkingen voor het elektron.

Men heeft vooreerst:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{e\,a_x}{c}=g_x-\frac{e\,a_x}{c},$$

wanneer g_x, g_y, g_z de komponenten zijn der hoeveelheid van beweging van het elektron. Verder is

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{dg_x}{dt}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial a_x}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial a_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial a_x}{\partial z}\right),$$

daar $\frac{d}{dt}$ de verandering der grootheden aanduidt, welke men meet zoó men met het elektron meegaat.

De vergelijking wordt dus:

$$\frac{dg_x}{dt}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial a_x}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial a_x}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)-e\frac{\partial \varphi}{\partial x}+$$
$$+\frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial a_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)=0.$$

Derhalve:

$$\frac{dg_x}{dt}=-e\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t}\right)-\frac{e}{c}\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\dot{z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\right\}$$
$$=-e\left(E_x+\frac{1}{c}\left\{\dot{y}\,H_z-\dot{z}\,H_y\right\}\right),$$

waarin:

Indien men, zooals veelal gedaan wordt, onderstelt dat de massa van een elektron van elektromagnetischen aard is, zou men de aanwezigheid van deze massa nog als een reaktie van het eigenveld van het elektron moeten beschouwen.

De hypothese dat het systeem geen energie uitstraalt wanneer het een quantenbeweging uitvoert, en dat de elektronen geen reaktie van hun eigenveld ondervinden, terwijl de bewegingen toch volstrekt niet eenparig rechtlijnig zijn, is geheel in tegenspraak met de ideeën der klassieke elektrodynamika. Het schijnt niet mogelijk te zijn haar af te leiden uit bepaalde aannamen omtrent de beweging van het elektron; indien ze juist is, zou ze erop wijzen dat de grondvergelijkingen der elektronentheorie gewijzigd moeten worden, zoodat deze waarschijnlijk wel voor makroskopische systemen met groote elektrische ladingen, enz. gelden, doch niet voor systemen van de grootteorde van atomen.

Voorloopig zal hierop niet nader worden ingegaan; verschillende kwesties die hierop betrekking hebben zullen in een later hoofdstuk besproken worden.

Men geeft de hypothese ook wel in den vorm: het systeem kan slechts de quantenbewegingen uitvoeren, en geen andere.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t}, \text{ enz.}$$

$$H_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \text{ enz.}$$

de elektrische en magnetische veldsterkten voorstellen.]

Men vergelijke in verband hiermee:

K. Schwarzschild, Gott. Nachr. Math. Phys. Kl. 1903, p. 127;

G. A. Schott, Electromagnetic Radiation (Cambr. 1912), p. 284, verg. (456).

Voor snelheden klein t.o.v. de snelheid van het licht wordt de funktie van Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e \{ \dots \quad \}.$$

Indien men rekening wil houden met de gravitatie, zou ze den vorm krijgen:

$$L = -mc \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu} - e \sum_\mu \varphi_\mu \dot{x}_\mu$$

$$\text{waar } x_4 = t\,;\ \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}.$$

Ze zou dan misschien op alle mechanische systemen moeten worden toegepast, onverschillig of er elektrisch geladen deeltjes in aanwezig zijn of niet [1]).

Nog een geheel andere formuleering is de tweede quantentheorie van PLANCK. Deze sluit echter meer direkt aan bij de problemen der statistische mechanika; ze zal hier voorloopig niet besproken worden [2]).

De quantenhypothese brengt (tenminste in haar tegenwoordige formuleering) geen direkte wijziging in de formules der gewone mechanika: de berekening der quantenbanen geschiedt geheel volgens de klassieke methoden (afleiding der bewegingsvergelijkingen uit de funktie van LAGRANGE of uit die van HAMILTON, enz.). Zijn de bewegingsvergelijkingen geïntegreerd, dan worden door middel van de quantenvoorwaarden de *integratiekonstanten* geheel of gedeeltelijk vastgelegd. (Zie beneden.)

De stabiliteitsproblemen bij het atoommodel schijnen er echter op te wijzen, dat men misschien ook deze grondprincipes zal moeten wijzigen, b.v. in dien zin dat de door de quantenvoorwaarden vastgelegde bewegingen stabiel zijn. (Zie hierover: hoofdstuk IV, § 26.)

Een moeilijke kwestie is ook de wisselwerking tusschen verschillende systemen, b.v. de molekulen of atomen van een gas. Indien de bewegingen van elk molekuul of van elk atoom door quantenvoorwaarden bepaald zijn, hoe beïnvloeden ze dan elkaar's beweging? [3]).

Een belangrijke hypothese die in nauw verband staat met de quantentheorie is de *adiabatenhypothese* van EHRENFEST [4]). Deze zal later afzonderlijk besproken worden (hoofdstuk VI, § 38).

[1]) Dit komt dus neer op de vraag: is de quantenhypothese een algemeene mechanische hypothese, of behoort ze tot de elektrodynamika? Echter heeft deze opmerking meer een formeel karakter dan een fysisch, daar volgens de moderne opvattingen alle materie uit elektrisch geladen deeltjes bestaat.

[2]) Zie hierover: Hoofdstuk V, § 35.

[3]) Bij een vast lichaam moet men waarschijnlijk het geheel als één systeem beschouwen. Hierop wijzen vele onderzoekingen, zoowel van experimenteelen aard (b.v. onderzoek van de struktuur der kristallen met Röntgenstralen), als theoretische (speciaal die over de soortelijke warmte). Dan treedt deze moeilijkheid niet op.

Zie over problemen die op gassen betrekking hebben: § 15, a) en § 38.

[4]) P. EHRENFEST, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 412, 1916.

Zie ook: J. M. BURGERS, ibidem, XXV, p. 849, 918, 1055, 1916/17.

§ 7. ALGEMEENE VORM VAN DE QUANTEN-VOORWAARDEN.

Zij gegeven een mechanisch systeem van f graden van vrijheid: aangenomen wordt dat de tijd niet expliciet in de bewegingsvergelijkingen voorkomt, zoodat de totale energie van het systeem gedurende de beweging konstant is [1] [2]). Volgens de klassieke mechanika bezit een zoodanig systeem een kontinuum van ∞^{2f} mogelijke banen, daar bij de volledige integratie der bewegingsvergelijkingen $2f$ integratiekonstanten $c_1 \ldots \ldots c_{2f}$ worden ingevoerd, wier waarden een kontinuum van $2f$ afmetingen kunnen doorloopen. De *Ie quantenhypothese* luidt dan:

De quantenbewegingen van het systeem zijn die bewegingen, waarvoor de integratiekonstanten $c_1 \ldots . c_{2f}$ voldoen aan k betrekkingen van den vorm:

$$\gamma_i(c_1 \ldots . c_{2f}) = n_i . h \quad (i = 1 \ldots k) \ldots \ldots \ldots (A)$$

In deze formule zijn de γ_i bepaalde funkties van de c's; h is een door PLANCK ingevoerde universeele konstante, van de dimensies: *energie maal tijd* $(l^2 m t^{-1})$; de waarde ervan is volgens MILLIKAN:

$$h = 6,57.10^{-27} \text{ erg. sek. } ^{3})$$

[1]) Deze onderstelling geldt niet indien het systeem onder den invloed staat van met den tijd veranderlijke uitwendige krachten. Problemen waarbij dergelijke krachten optreden, komen o.a voor bij de theorie van de adiabatische beïnvloeding van een systeem (EHRENFEST, l.c. — zie § 38), en bij de theorie der dispersieverschijnselen. (Zie § 36.)

[2]) Indien in de funktie van LAGRANGE t niet expliciet voorkomt, is een der integralen van de bewegingsvergelijkingen:

$$-L + \sum_1^f \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \alpha = \textit{konstante}.$$

Uitgedrukt met de funktie van HAMILTON:

$$H = \alpha = \textit{konstante}.$$

De totale energie wordt gedefinieerd als de waarde dezer konstante α.

[3]) R. A. MILLIKAN, Phys. Review VII, p. 355, Mrt. 1916; Phys. Zeitschr. **17**, p. 219, 1916.

[In Phil. Mag. **34**, p. 16, 1917 geeft MILLIKAN op: $h = (6,547 \pm 0,011). 10^{-27}$ erg. sek.]

De getallen n_i kunnen alle mogelijke *positieve geheele* waarden doorloopen [1]).

Men kan dit met een kleine wijziging ook aldus uitdrukken: voer in plaats van de konstanten $c_1 \ldots c_{2f}$ een nieuw stel in: $\gamma_1 \ldots \gamma_{2f}$. Hiervan zijn $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ de boven reeds genoemde funkties der c's; $\gamma_{k+1} \ldots \gamma_{2f}$ zijn op willekeurige wijze hieraan toegevoegde funkties ervan, echter zoo dat men een stel verkregen heeft, waarin $c_1 \ldots c_{2f}$ kunnen worden uitgedrukt. Dan zijn de quantenbewegingen van het beschouwde systeem hierdoor gekarakteriseerd:

$\gamma_{k+1} \ldots \gamma_{2f}$ kunnen een kontinu gebied van waarden doorloopen:

$\gamma_1 \ldots \gamma_k$ kunnen slechts diskontinu veranderen: ze kunnen slechts de waarden hebben:

$$\gamma_i = n_i \,.\, h \qquad (i = 1 \ldots k)$$

De vorm en het aantal der funkties γ zal beneden (§ 10) worden besproken; hier zij slechts vermeld dat hun aantal k *hoogstens gelijk is aan* f, het aantal graden van vrijheid van het systeem. Hun vorm is steeds zoo, dat indien men de totale energie α van het systeem (welke een funktie is van de c's) uitdrukt in de γ's, deze uitdrukking *alleen* $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ bevat:

$$\alpha = \alpha(\gamma_1 \ldots \gamma_k).$$

De waarde van de energie is dus steeds door de quantengetallen $n_1 \ldots n_k$ vastgelegd.

Deze eigenschap is van groot belang.

[1]) In sommige gevallen moet de waarde *nul* worden uitgesloten; voor een voorbeeld zie men het volgende hoofdstuk, bl. 82.

Aan den anderen kant komt het ook voor dat een quantengetal alle positieve en *negatieve* geheele getallen kan doorloopen; dit treedt b.v. op bij rotatieproblemen, waar het teeken van het quantengetal samenhangt met de richting der beweging. (Zie § 16, **d**.)

§ 8. IIe HYPOTHESE DER QUANTENTHEORIE: EMISSIE VAN LICHTTRILLINGEN.

Als *IIe hypothese* van de quantentheorie wordt aangenomen dat een systeem *diskontinu* energie kan uitstralen. Van tijd tot tijd kan het systeem uit een bepaalden bewegingstoestand 1 in een anderen toestand 2 „overspringen", waarbij de quantengetallen van een stel geheele waarden $n_1^1 \ldots n_k^1$ overslaan op een ander stel geheele waarden $n_1^2 \ldots n_k^2$. Deze verandering kan spontaan geschieden, d. w. z. zonder dat uitwendige oorzaken werkzaam zijn [1]; ze verloopt in zoodanige richting dat de totale energie van het systeem *afneemt* [2].

Het overschot aan energie:

$$\alpha(n_1^1 \ldots n_k^1) - \alpha(n_1^2 \ldots n_k^2)$$

wordt uitgestraald in den vorm van lichttrillingen met een frequentie $\nu_{1.2}$ *bepaald door de vergelijking:*

$$h \cdot \nu_{1.2} = \alpha(n_1^1 \ldots n_k^1) - \alpha(n_1^2 \ldots n_k^2) \ldots \quad ^{3)} \qquad (B)$$

Deze betrekking is het eerst door Bohr opgesteld [4]; met

[1]) Vergelijk § 33.

[2]) a) Het geval is denkbaar dat het systeem in twee toestanden 1 en 2 *dezelfde* totale energie bezit. Het is mogelijk dat ook in dit geval een spontaan overspringen van 1 naar 2 of omgekeerd kan plaats hebben.

b) Men voert ook wel de hypothese in: slechts die overgangen kunnen spontaan plaats vinden, waarbij de *quantengetallen afnemen*.

Hierbij valt op te merken:

(1) Uit waarnemingen over de detailstruktuur der lijnen moet men besluiten dat er gevallen voorkomen waarin sommige der quantengetallen toenemen. Zie beneden § 16, **e**).

(2) Men kan de vraag opwerpen: gaat een afname der energie steeds samen met een afname der quantengetallen? Zie § 16, **d**), 2).

[3]) Met de letter ν zal steeds een aantal trillingen per *tijdseenheid* (*sekonde*) worden aangeduid; de letter ω heeft betrekking op het aantal trillingen in den tijd 2π.

[4]) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, p. 1, 1913.

behulp hiervan is het mogelijk geworden de spektra van verschillende systemen (b.v. H, He^{+}) te berekenen.

Evenals de Ie hypothese staat ook de IIe tegenover de elektrodynamika [1]). Ze dwingt tot geheel nieuwe ideeën over de emissie van licht; het mechanisme hiervan is echter geheel duister. Zeer merkwaardig hierbij is het volgende, dat Prof. H. A. LORENTZ opgemerkt heeft: Indien een systeem uit meerdere zich bewegende deelen bestaat, zooals b.v. een H-atoom, waar kern en elektron beide bewegen, of een roteerend molekuul waaromheen een elektron loopt, is de totale energie α over de verschillende deelen van het systeem verdeeld. Toch wordt bij een „katastrofe" van het systeem de door het *geheele systeem verloren energie* in *één lichtfrequentie* uitgezonden [2]).

De berekening van de spektra van verschillende atoommodellen door middel van deze hypothese heeft echter een zoo groot succes gehad dat men haar juistheid wel moet erkennen.

De emissie-hypothese van BOHR levert ook een bizonder mooie en eenvoudige verklaring van het *kombinatie-principe* van RITZ [3]): zijn α_1 α_2 α_3 de waarden der totale energie bij drie verschillende quantenbewegingen, dan moet het systeem de frequenties kunnen uitstralen:

$$\nu_{1.2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h}\,; \quad \nu_{1.3} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{h}\,; \quad \nu_{2.3} = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{h}\,;$$

welke voldoen aan de betrekking:

$$\nu_{2.3} = \nu_{1.3} - \nu_{1.2}.$$

De z.g. „*termen*" welke in de spektraalformules optreden krijgen nu de beteekenis van *energie-trappen* [4]).

BOHR heeft — om tot overeenstemming te komen met de wet

[1]) *Er zijn grensgevallen waar de hypothese van* BOHR *hetzelfde resultaat oplevert als de klassieke theorie.* Zie hierover § 32.

Door BOHR is hiervan gebruik gemaakt bij het opstellen der hypothese. (l.c.)

[2]) Dit wordt zeer scherp bevestigd door den invloed die de beweging van de kern van het atoom heeft op het spektrum. (Zie hoofdstuk III, § 18.)

[3]) W. RITZ, Phys. Zeitschr. **9**, p. 521, 1908; Oeuvres, p. 141.

[4]) Volgens berekeningen van SOMMERFELD schijnt bij de Röntgenspektra het kombinatie-principe niet op te gaan (A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 159 vgl., 1916).

[*Opmerking.* Volgens later door DEBYE en door VEGARD uitgewerkte theorieën

van KIRCHHOFF — tegelijk een aanvullende onderstelling ingevoerd omtrent de *absorbtie van licht*, welke het omgekeerde is van bovenstaande hypothese:

Is het systeem in den toestand 2, en valt er lichtstraling op van de frequentie $\nu_{1.2}$, *dan kan het systeem uit die straling een bedrag aan energie, gelijk aan* $h\,\nu_{1.2}$, *opnemen, waarbij het van den toestand 2 in den toestand 1 overspringt* [1]).

Het gedrag van een systeem onder den invloed van invallende trillingen zou dus geheel anders moeten zijn, dan men volgens de klassieke theorie verwacht. Vooral dient hierbij in het oog gehouden te worden, dat de frequentie $\nu_{1.2}$ die het systeem van toestand 2 naar 1 doet overspringen, in het algemeen niets te maken heeft met de frequenties der bewegingen *in* het systeem in den toestand 2 of 1.

De frequenties der bewegingen in het systeem zijn gegeven door de formule:

$$\nu_i = \frac{1}{h}\frac{\partial \alpha}{\partial n_i} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (C)$$

in het algemeen komen ook alle „boventonen" en „kombinatietonen" van deze „grondfrequenties" voor [2]). [Ze worden dus bepaald door de *differentiaal-quotienten* van de energie naar de quantengetallen: de frequenties der spektraallijnen worden daarentegen door *differentieformules* gegeven.]

De hypothesen over de emissie en de absorbtie van straling zijn verder ontwikkeld door EINSTEIN [3]), die aantoonde dat men uit deze onderstellingen met eenige aanvullingen over de waarschijnlijkheid van het overspringen, enz., op eenvoudige wijze de formule van PLANCK voor de verdeeling der energie over het spektrum der zwarte straling kan afleiden [4]).

(zie de in § 28 geciteerde artikelen) zou echter het verband dat SOMMERFELD vermoedde tusschen verschillende lijnen der Röntgenspektra niet bestaan, zoodat men hieruit geen argumenten zou kunnen putten tegen het kombinatie-principe.]

[1]) Voor een reeds door BOHR gegeven uitbreiding van de absorbtie-hypothese vergelijke men § 34, f).

[2]) Zie § 10, Opmerking III. — In verband hiermee vergelijke men § 32.

[3]) A. EINSTEIN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 318, 1916; Phys. Zeitschr. **18**, p. 121, 1917.

[4]) Zie beneden § 33.

EINSTEIN heeft er tevens op gewezen dat men moet aannemen dat het stralingsproces *gericht* is, en dat de uitwisseling van *energie* samen gaat met een uitwisseling van *hoeveelheid van beweging* ten bedrage van: $\frac{h\nu}{c}$. Bij afgifte van energie krijgt het stralende systeem (het atoom) een impuls $h\nu/c$ in tegengestelde richting van de uitgezonden stralenbundel; bij opname van energie krijgt het een impuls $h\nu/c$ in de richting der invallende straling. Deze impulsen veroorzaken een BROWN'*sche beweging* van het systeem, waarvan de grootte in overeenstemming is met de waarde gegeven door de klassieke theorie:

$$\textit{energie per vrijheidsgraad} = 1/2 \,.\, k \,.\, T$$ [1]).

Hypothesen omtrent het *verloop* van het uitstralingsproces zijn tot nog toe niet opgesteld. Van groot belang zijn hierbij de volgende kwesties:

polarisatie-toestand van de straling;

richting van de uitstraling t.o v. de richtingen in het systeem;

tijdsduur van het proces [2]).

Uit de polarisatie der spektraallijnen, waargenomen bij het ZEEMAN-effekt en het STARK-effekt hebben EPSTEIN en SOMMERFELD eenige voorloopige regels omtrent de polarisatie kunnen afleiden. Zie § 16, **e**).

In nauwe betrekking tot de theorie van de energie-uitstraling staan verder:

de vraag of er werkelijk „lichtquanten" bestaan, de theorie der foto-elektrische verschijnselen, en eenige andere kwesties. Zie hierover enkele opmerkingen in § 34.

Op grond van bovenstaande hypothesen geschiedt nu de

[1]) Zie in verband hiermee de opmerking in § 15, **a**), over translatie-bewegingen.

Over emissie van *moment van hoeveelheid van beweging* vergelijke men § 16, **e**).

[[2]) Uit waarnemingen van interferentie-verschijnselen bij groote faze-verschillen heeft men o.a. afgeleid dat bij de groene kwiklijn in 1 emissieproces een golftrein van minstens 2600000 golven wordt uitgezonden (tijdsduur ca. 5.10^{-9} sek.). Zie overzicht in WINKELMANN's Handbuch der Physik, Bd. VI, p. 1135. — Langs anderen weg heeft STARK onderzoekingen gedaan over den tijdsduur van het emissieproces (Ann. d. Phys. **49**, p. 731, 1916; zie beneden, bl. 86, 3).]

berekening van het spektrum van een bepaald systeem als volgt:

1) men tracht voor het systeem quantenvoorwaarden op te sporen, en de quantenbewegingen te vinden;
2) men bepaalt de energie der quantenbewegingen, en drukt deze uit als funktie der quantengetallen;
3) uit de formule voor de energie volgt onmiddellijk de formule voor het spektrum door middel van de emissie-hypothese van BOHR.

§ 9. OPMERKING IN VERBAND MET HET VERSCHIJNSEL VAN DOPPLER [1]).

Indien een mechanisch systeem zich met een konstante translatie-snelheid u beweegt, zal worden aangenomen dat de boven geformuleerde quantenonderstellingen betrekking hebben op een koordinatenstelsel, ten opzichte waarvan het systeem rust [2]) [3]). De quantenbewegingen en hun energie worden dus berekend ten opzichte van dit stelsel: evenzoo geeft de emissie-hypothese

[1] Cf. A. Einstein, Phys. Zeitschr. **18**, p. 125, 1917.

[2]) Dit is in overeenstemming met de grondhypothese der speciale relativiteitstheorie, volgens welke alle koordinatenstelsels, welke door Lorentz-transformaties met elkaar verbonden zijn, gelijkwaardig zijn voor de beschrijving der verschijnselen.

Het moet natuurlijk mogelijk zijn de quantenformules in zoodanigen vorm te schrijven dat ze kovariant zijn ten opzichte van Lorentz-transformaties (— en evenzoo ten opzichte van willekeurige kontinue punttransformaties, volgens de gravitatie-theorie —); vermoedelijk zullen de formules dan vrij ingewikkeld worden.

(Hoe men den invloed van een *gravitatie-veld* op de quantenformules in rekening moet brengen (men denke b.v. aan de verschuiving der spektraallijnen) heb ik niet nagegaan.)

[3]) Indien het systeem uit meerdere zich bewegende deelen bestaat, en men de formules der relativistische mechanika toepast, is er in het algemeen in het systeem geen punt aan te wijzen, dat een eenparige rechtlijnige beweging heeft.

Er bestaan echter steeds de drie „integralen van de beweging van het zwaartepunt'':

$$p_x = \text{konstante};\ p_y = \text{konstante};\ p_z = \text{konstante};$$

waar p_x, p_y, p_z de komponenten der totale hoeveelheid van beweging van het geheele systeem zijn. Men kan nu altijd een koordinatenstelsel invoeren, dat ten opzichte van het oorspronkelijke een eenparige rechtlijnige beweging heeft en ten opzichte waarvan p_x, p_y, p_z alle drie gelijk nul zijn.

De quantenformules worden dan op dit koordinatenstelsel betrokken. Vergelijk in verband hiermee § 15, **a**), § 16, **a**) en voor eenige voorbeelden: hoofdstuk III, § 18 (bl. 94) en § 19 (bl. 103).

Bij het bovenstaande is stilzwijgend ondersteld dat op het systeem *geen uitwendige krachten* werken.

van BOHR de frequentie der lichttrillingen met betrekking op dit stelsel.

Voor een stilstaande waarnemer zal de frequentie echter een andere zijn. Met benadering op termen van de eerste orde in u/c komt men tot de volgende formules: [1])

(N.B. De grootheden welke betrekking hebben op het $x' y' z'$-stelsel waarin de waarnemer rust, worden aangeduid met geaccentueerde letters; de ongeaccentueerde letters behooren bij het $x\,y\,z$-stelsel, dat met het beschouwde systeem meegaat.)

In het $x\,y\,z$-stelsel slaat de beweging van het systeem over van een toestand 1 in een toestand 2; hierbij komt een energie $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$ vrij, welke uitgezonden wordt als licht van de frequentie $\nu = \frac{\varepsilon}{h}$, in een richting welke een hoek φ maakt met de bewegingsrichting van het systeem.

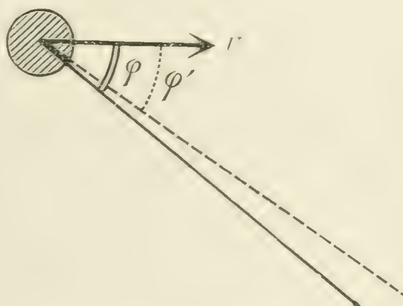


Fig. 2. Aberratie.

Dan wordt in het $x' y' z'$-stelsel waargenomen een lichttrilling van de frequentie:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{u}{c} \cos\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

met de energie:

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 + 2\frac{u}{c} \cos\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

uitgezonden in een richting welke een hoek φ' maakt met de richting der snelheid u, waar:

[1]) Overgenomen van A. EINSTEIN, l.c.

$$\cos\varphi' = \cos\varphi + \frac{u}{c}\sin^2\varphi \quad \text{. . . . . (III)}$$

Vergelijking (I) drukt het *principe van* DOPPLER uit [1]); vergelijking (III) de aberratie (zie fig. 2).

Analoge formules gelden voor de *absorbtie* van licht.

---

[1]) Men denke hierbij aan het DOPPLER-effekt bij de kanaalstralen (STARK; zie ook: H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913, p. 321—323); verder aan de z.g. „thermokinetische" verbreeding der spektraallijnen van een gas, waar de molekulen of atomen allerlei verschillende snelheden en richtingen hebben.

§ 10. UITWERKING VAN DE QUANTENVOORWAARDEN.

De in § 7 in zeer algemeenen vorm gegeven quantenvoorwaarden moeten nog nader uitgewerkt worden: het is noodig vast te stellen welke voor een bepaald systeem de funkties $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ zijn, die de quantenbewegingen vastleggen.

De eerste stap in deze richting is geweest PLANCK's hypothese der energie-elementen, welke betrekking had op harmonisch trillende systemen van 1 graad van vrijheid [1]). Naderhand is deze hypothese voortdurend uitgebreid en gegeneraliseerd, vooral door het werk van DEBIJE, HASENÖHRL, EHRENFEST, BOHR, SOMMERFELD, EPSTEIN, SCHWARZSCHILD en anderen. Hier zal echter de historische ontwikkelingsgang buiten beschouwing worden gelaten, en zal een meer axiomatische formuleering van de quantenvoorwaarden gegeven worden welke zoo goed mogelijk de op het oogenblik geldende opvattingen weergeeft.

Een voor alle mechanische systemen geldende formuleering is nog niet gevonden; tot nu toe is ze beperkt tot een groote klasse van systemen met *periodieke* of *quasi-periodieke* bewegingen [2]). De hier gebruikte vorm sluit zich zeer nauw aan bij die welke SCHWARZSCHILD gegeven heeft [3]).

Zij gegeven een mechanisch systeem van f vrijheidsgraden; de koordinaten zijn $q_1 \ldots q_f$; de momenten (hoeveelheden van beweging) $p_1 \ldots p_f$. Omtrent het systeem wordt het volgende aangenomen:

A) De funktie van HAMILTON $H(q, p)$ bevat t niet expliciet, zoodat

$$H(q, p) = konstante = \alpha \qquad (1)$$

de energie-integraal van het systeem is.

[1]) M. PLANCK, Ann. d. Phys. **4**, p. 553, 1901.
Zie verder Die Theorie der Wärmestrahlung.

[2]) Een uitzondering hierop is de door EPSTEIN gebezigde quantiseering van *hyperbolische* bewegingen. Voorloopig worden deze buiten beschouwing gelaten. Zie § 15, **b**).

[3]) K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 548.

B) Gedurende de beweging kan geen der koordinaten of momenten tot in het oneindige aangroeien: allen blijven beneden zekere eindige grenswaarden [1]).

C) Het systeem bezit oplossingen van den volgenden vorm:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(P_1 \ldots P_f, Q_1 \ldots Q_f) \\ p_i &= p_i(P_1 \ldots P_f, Q_1 \ldots Q_f), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

waarin:

1) $P_1 \ldots P_f$ f integratiekonstanten zijn (de „intensiteitskonstanten");

2) $Q_1 \ldots Q_f$ lineaire funkties zijn van den tijd:

$$Q_i = \omega_i \,.\, t + \varepsilon_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

($\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f$ zijn de overige f integratiekonstanten, de „fazekonstanten");

3) *De q's en p's periodieke funkties zijn van de Q's met periode* 2π [2]).

De grootheden $Q_1 \ldots Q_f$ worden *hoekvariabelen* genoemd („Winkelkoordinaten", cf. SCHWARZSCHILD, l.c.); $\omega_1 \ldots \omega_f$ zijn de *middelbare bewegingen* [3]).

D) Aangenomen wordt dat de P's zoo bepaald zijn dat:

1) de transformatie van de variabelen $q_1 \ldots p_f$ naar de variabelen $Q_1 \ldots P_f$ een kontakt-transformatie is [4]), zoodat:

$$\sum_i p_i \,.\, d\,q_i = \sum_i P_i \,.\, d\,Q_i + d\,W(P, Q) \quad \ldots\ldots (4)$$

waar $d\,W$ de totale differentiaal van een funktie $W(P, Q)$ is;

[1]) Met koordinaten is hier bedoeld: Cartesische koordinaten der systeempunten. Over de reeds genoemde hyperbolische beweging en over translatie-bewegingen zie men § 15.

[2]) Deze funkties zijn in het algemeen trigonometrische reeksontwikkelingen naar sinussen en cosinussen van kombinaties der Q's (meervoudige FOURIER-reeksen). Zooals bekend is, worden dergelijke reeksen zeer veel gebruikt in de Astronomie, vooral bij de behandeling van storingsproblemen.

[3]) Het is niet onmogelijk dat zoodra de voorwaarde **B** vervuld is, het systeem noodzakelijk oplossingen van den in **C** aangegeven vorm bezit. Door POINCARÉ is aangetoond dat de beweging van een mechanisch systeem dat aan **B** voldoet in het algemeen periodiek of quasi-periodiek is (Zie Mécanique Céleste III). Misschien zal het gelukken aan te toonen dat een systeem dat aan **B** voldoet ook steeds oplossingen heeft die met hoekvariabelen uitgedrukt kunnen worden.

[4]) Zie b.v. WHITTAKER, Analytical Dynamics, Cambridge 1917, p. 288.

2) dat de in deze vergelijking voorkomende funktie W periodiek is in de Q's.

Indien de q's en p's uitgedrukt kunnen worden als periodieke funkties van f hoekvariabelen $Q_1 \ldots Q_f$ is het steeds mogelijk aan deze twee voorwaarden te voldoen [1]).

De onder **D** 2 genoemde voorwaarde legt de waarden der P's, welke anders slechts tot op een additieve konstante bepaald zijn, geheel vast [2]).

Doordat de transformatie van de variabelen q en p naar de Q's en P's een kontakt-transformatie is, blijft de kanonische vorm der bewegingsvergelijkingen behouden; voor Q en P geldt dus:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \omega_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad ; \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k} \quad \ldots\ldots (5)$$

waar $K(Q, P)$ verkregen wordt door in $H(q, p)$ voor q en p de formules (2) te substitueeren. Nu zijn de P's wat den tijd betreft konstanten, *dus moet K onafhankelijk zijn van de Q's*. M.a.w.: *K bevat alleen de intensiteitskonstanten $P_1 \ldots P_f$* (natuurlijk tezamen met de parameters van het systeem, zooals massa's, elektrische ladingen, enz.) [3]).

Nu hangen de P's op eenvoudige wijze samen met de boven

[1]) Schwarzschild, l.c. p. 549. Zie wat **D** 2 betreft: J. M. Burgers, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 1059, 1917 en beneden, § 11.

[2]) Schwarzschild legt de additieve konstanten der intensiteitsgrootheden P vast met behulp van beschouwingen over de grenzen der faze-ruimte van het systeem (Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 548, 1916).

Voor de in § 14 genoemde systemen leiden, voor zoover ik beoordeelen kan, de methode van Schwarzschild en de hier gegeven methode tot dezelfde resultaten.

Een moeilijkheid heeft zich nog voorgedaan bij de beweging van een elektron om een atoomkern, wanneer men rekening houdt met de relativiteitstermen. Deze kwestie schijnt echter opgelost te zijn. Zie hierover:

M. Planck, Ann. d. Phys. **50**, p. 401—404, 1916;
A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, p. 49, 57, 1916;
Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 131, 1916.

Uit de onderzoekingen van Sommerfeld mag men met zekerheid de gevolgtrekking maken dat bij dit probleem de methode der faze-integralen, welke voor de vastlegging van de additieve konstanten der P's op hetzelfde neerkomt als de voorwaarde **D** 2, het juiste resultaat levert.

[3]) K. Schwarzschild, l.c. p. 549.
P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **51**, p. 178, 1916.
E. T. Whittaker, Analytical Dynamics (Cambr. 1917), p. 422/423.

ingevoerde funkties $\gamma_1 \ldots \gamma_k$. Hierbij moeten twee gevallen onderscheiden worden:

I) De middelbare bewegingen ω_i zijn *onderling onmeetbaar*; m.a.w. uit de ω_i zijn geen lineaire kombinaties met geheele koefficienten te vormen, welke de waarde nul hebben. Dan luiden de quantenvoorwaarden:

De quantenbewegingen van het systeem zijn die bewegingen waarvoor de P's geheele veelvouden van de universeele konstante $h/2\pi$ zijn:

$$P_i = n_i \cdot \frac{h}{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

II) Tusschen de middelbare bewegingen ω_i bestaan λ rationale betrekkingen van den vorm:

$$\sum_i m_i^\mu \cdot \omega_i = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \ldots \lambda \\ m_i^\mu = \text{geheel getal} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Dan kan men door een lineaire transformatie met geheele koefficienten overgaan op een nieuw stel hoekvariablen $\mathbf{Q}_1 \ldots \mathbf{Q}_f$ met bijbehoorende kanonische intensiteitskonstanten $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_f$, zoodat $\mathbf{Q}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{Q}_f$ de middelbare beweging *nul* hebben, terwijl de middelbare bewegingen van $\mathbf{Q}_1 \ldots \mathbf{Q}_{f-\lambda}$ onderling onmeetbaar zijn [1].

De funktie $K(P_1 \ldots P_f)$ gaat dan over in een nieuwe funktie

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda})$$

welke $\mathbf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{P}_f$ *niet* bevat.

De quantenbewegingen zijn nu hierdoor gekarakteriseerd, dat $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda}$ *geheele veelvouden van* $h/2\pi$ *moeten zijn.* [2]

---

[1]) Met betrekking tot deze substitutie zij verwezen naar:
K. Schwarzschild, l.c p. 550;
P. S. Epstein, Ann. der Phys. **51**, p. 179, 1916;
J. M. Burgers, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 918, 1916.

De substitutie is niet volkomen eenduidig bepaald (op eenigszins analoge wijze als men bij een dubbelperiodieke funktie oneindig veel verschillende perioden-parallelogrammen kan aangeven). De verschillende systemen intensiteitskonstanten $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda}$ zijn echter door lineaire substituties met geheele koefficienten en determinant ± 1 met elkaar verbonden, zoodat ze volkomen equivalent zijn; allen leiden ze tot dezelfde quantenbewegingen. Deze meerduidigheid is dus niet van essentieel belang. (Cf. J. M. Burgers, l.c.)

[2]) Bij exakt periodieke systemen vindt men slechts één quantenvoorwaarde, nl.:

$$2\,\overline{T}/\omega_0 = n \cdot h/2\pi$$

Of ook $\mathsf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathsf{P}_f$ gequantiseerd moeten worden is onzeker. In sommige gevallen schijnt het plausibel dit wel te doen, in andere niet. Zie in verband hiermee beneden § 13.

Opmerkingen.

[I) Uit de gegeven formules blijkt de in § 7 vermelde regel dat het aantal der quantenvoorwaarden hoogstens gelijk is aan het aantal der vrijheidsgraden. Bij een niet ontaard systeem, waar even zoovele onderling onmeetbare frequenties zijn als vrijheidsgraden, is dit onmiddellijk duidelijk. De waarden der fazekonstanten ε toch hebben geen invloed op het karakter der beweging: in den loop der beweging komt het systeem oneindig vele malen willekeurig dicht bij elken toestand, welke bij dezelfde waarden der P's door gegeven waarden der Q's bepaald is. Het zou dus geen zin hebben deze konstanten door quantenformules vast te leggen.]

II) Uit het bovenstaande is duidelijk dat zoowel in geval **I** als in **II** de waarde van de energie (welke gegeven wordt door de funktie K of K) door de quantengetallen volkomen vastgelegd wordt, zooals in § 7 reeds vermeld was.

III) Het bewijs der formule voor de frequenties der bewegingen van het systeem, vermeld in § 8 (bl. 35), volgt onmiddellijk uit formule (5), wanneer men bedenkt dat $\nu_i = \omega_i/_{2\pi}$ is. Door een korte berekening kan men verifieeren dat ze ook in geval **II** geldig is.

IV) In het algemeen zijn de middelbare bewegingen ω_i funkties van de parameters van het systeem (massa's, elektrische ladingen, konstanten van een krachtveld) en van de intensiteitskonstanten P. Het kan dus gebeuren dat er voor speciale waarden der P's rationale betrekkingen optreden tusschen de waarden der ω_i. Dan moet echter het systeem *niet* als ontaard beschouwd worden: hiervoor is noodig dat de rationale betrekkingen tusschen de ω_i *onafhankelijk* zijn van de P's.

V) Mechanische systemen welke oplossingen bezitten die voldoen aan voorwaarde **B**), laten oplossingen toe welke met

(Cf. P. Ehrenfest, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 412, 1916.)

Hierin is: T = gem. waarde der kinetische energie;
$2\pi/\omega_0$ = periode v/h systeem.

hoekvariabelen uitgedrukt kunnen worden indien het systeem

òf *a*) een bepaalde evenwichts-konfiguratie bezit,
òf *b*) een bepaalde stationnaire beweging kan uitvoeren,
òf *c*) een periodieke solutie bezit,

en in de omgeving van deze partikuliere oplossingen de funktie van HAMILTON regulier is [1]).

(Vergelijk: WHITTAKER, Anal. Dynamics, Chapter XVI, en
H. POINCARÉ, Mécanique Céleste I, p. 162, vgl.)

Het is mij niet bekend of men ook andere algemeene gevallen kan aangeven waarin oplossingen uitgedrukt met hoekvariabelen bestaan.

[1]) Hierbij is natuurlijk afgezien van speciale ontaardingsgevallen.

§ 11. ANDERE FORMULEERING VAN DE QUANTEN-VOORWAARDEN.

Uit vergelijking (4), § 10, volgt door te integreeren naar Q_k van 0 tot 2π, waarbij de andere Q's en de P's konstant gehouden worden:

$$\int_{Q_k=0}^{Q_k=2\pi} d\,Q_k \,.\, \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = 2\pi P_k \quad \ldots\ldots (8)$$

Men kan de quantenvoorwaarden nu ook als volgt uitdrukken: Ondersteld wordt dat het systeem oplossingen bezit van den vorm:

$$\left.\begin{array}{l} q_i = q_i(c_1 \ldots c_f,\ Q_1 \ldots Q_f) \\ p_i = p_i(c_1 \ldots c_f,\ Q_1 \ldots Q_f) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2^*)$$

waarin:

1) $c_1 \ldots c_f$ f integratiekonstanten zijn;
2) $Q_1 \ldots Q_f$ lineaire funkties zijn van den tijd;
3) de q's en p's *periodieke* funkties zijn van de Q's met periode 2π. (Hierbij is het *niet* noodig dat de c's met de Q's een kanonisch systeem van variabelen vormen.)

I) Indien tusschen de middelbare bewegingen der Q's *geen* rationale betrekkingen bestaan zijn de quantenvoorwaarden:

$$\int_0^{2\pi} d\,Q_k \,.\, \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = n_k \,.\, h \quad (k = 1 \ldots f) \quad \ldots\ldots (9)$$

II) Bestaan er rationale betrekkingen tusschen de Q's, dan herleidt men het stelsel $Q_1 \ldots Q_f$ door een lineaire transformatie met geheele koefficienten tot een stelsel $\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_f$, zoodat $\mathfrak{Q}_{f-\lambda+1} \ldots \mathfrak{Q}_f$ de middelbare beweging *nul* hebben, terwijl tusschen de middelb. bew. van $\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_{f-\lambda}$ geen rationale betrekkingen bestaan. In dit geval zijn de quantenvoorwaarden:

$$\int_0^{2\pi} d\mathfrak{Q}_k \cdot \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \mathfrak{Q}_k} = n_k \cdot h \quad (k = 1 \,..\, f-\lambda) \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

EPSTEIN heeft een formuleering van de quantenvoorwaarden gegeven welke principieel met het bovenstaande overeenstemt [1]).

Opmerkingen.

1) Een bewijs voor de stelling dat men steeds kanonische variabelen kan invoeren, indien een mechanisch systeem oplossingen bezit van den vorm (2*), is mij meegedeeld door Prof. Dr. G. HERGLOTZ.

Deze kanonische variabelen: P_k, Q^*_k, zijn in het algemeen gegeven door:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\,Q_k \cdot \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = P_k(c_1 \ldots c_f) \\ Q^*_k = Q_k + C_k\,(c_1 \ldots c_f). \end{cases}$$

Hierin zijn de C's bepaalde funkties van de c's, die bij de fazekonstanten ε gevoegd moeten worden. (In vele gevallen zijn deze funkties C gelijk nul.)

In het geciteerde artikel van SCHWARZSCHILD wordt deze stelling wel genoemd, doch is er geen bewijs voor meegedeeld.

2) Houdt men de c's en dus ook de P's konstant, dan is:

$$\sum_i p_i\, d\,q_i$$

een *volledige differentiaal*.

Dit volgt onmiddellijk uit formule (4) op bl. 42.

[1]) P. S. EPSTEIN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 411, 1916.

§ 12. EENDUIDIGHEID DER QUANTENFORMULES.

Men kan in het algemeen aantoonen dat de ontwikkeling der koordinaten en momenten q en p naar f (eventueel bij ontaarde systemen naar $f-\lambda$) hoekvariabelen, tusschen wier middelbare bewegingen *geen* rationale betrekkingen bestaan, slechts op één manier mogelijk is. Hieruit volgt dat de quantenvoorwaarden in de boven gegeven formuleering (verg. 9 en 10, § 11) *eenduidig* bepaald zijn.

Bewijs dat een grootheid q, welke een funktie is van den tijd, slechts op één wijze in een Fourier-*reeks naar hoekvariabelen ontwikkeld kan worden.*

(Ter vereenvoudiging wordt ondersteld dat slechts twee hoekvariabelen in de ontwikkeling voorkomen, en dat alleen cosinustermen aanwezig zijn).

Stel dat de grootheid $q(t)$ op twee verschillende wijzen naar twee hoekvariabelen ontwikkeld kan worden:

$$\textbf{a)} \quad q(t) = \Sigma A_{hk} \cos(h \,.\, Q_1 + k \,.\, Q_2)$$

$$\textbf{b)} \quad q(t) = \Sigma A_{mn} \cos(m \,.\, Q_1 + n \,.\, Q_2)$$

waar:

$$Q_1 = \omega_1 \,.\, t + \varepsilon_1 \qquad Q_1 = \omega_1 \,.\, t + \varepsilon_1$$

$$Q_2 = \omega_2 \,.\, t + \varepsilon_2 \qquad Q_2 = \omega_2 \,.\, t + \varepsilon_2$$

(de verhouding ω_1/ω_2 is onmeetbaar; evenzoo ω_1/ω_2). Aangenomen wordt dat deze reeksen gelijkmatig en voldoende sterk konvergeeren, zoodat men term voor term mag integreeren en de limiet mag nemen [1]).

Vermenigvuldig $q(t)$ met: $\cos(h \,.\, \omega_1 + k \,.\, \omega_2)\, t$ en bepaal:

$$\underset{T=\infty}{Lim} \frac{1}{T} \int_0^T dt \,.\, q \,.\, \cos(h \,.\, \omega_1 + k \,.\, \omega_2)\, t$$

[1]) De reeks mag vermoedelijk ook een zg. asymptotische reeks zijn. Vergelijk H. Poincaré, Mécanique Céleste II.

Reeks **a**) geeft hiervoor:

$$\frac{1}{2} A_{hk} \cdot \cos (h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2)$$

Zal reeks **b**) een bedrag opleveren dat van nul verschillend is, dan moet een der termen dezelfde periode hebben als $\cos (h \cdot \omega_1 + k \cdot \omega_2)\, t$. Dus is een der kombinaties:

$$m \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2 = h \cdot \omega_1 + k \cdot \omega_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

Voor dezen term moet dan zijn:

$$A_{mn} \cdot \cos (m \cdot \varepsilon_1 + n \cdot \varepsilon_2) = A_{hk} \cdot \cos (h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2)$$

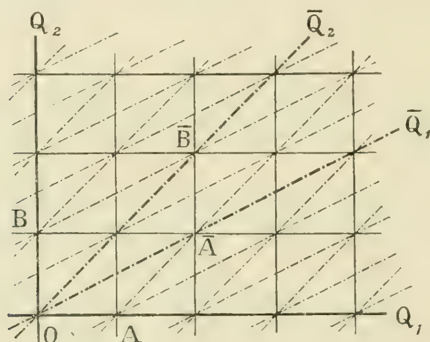


Fig. 3. Perioden-netten in een twee-dimensionale Q-ruimte.

Evenzoo volgt door $q\,(t)$ te vermenigvuldigen met $\sin (h \cdot \omega_1 + k \cdot \omega_2)\, t$ en te integreeren:

$$\bar{A}_{mn} \cdot \sin (m \cdot \bar{\varepsilon}_1 + n \cdot \bar{\varepsilon}_2) = A_{hk} \cdot \sin (h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2)$$

Dus is:

$$A_{mn} = A_{hk} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} & m \cdot \varepsilon_1 + n \cdot \varepsilon_2 \equiv h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2 \ (\text{mod. } 2\,\pi) \\ \text{zoodat:} \quad & m \cdot \bar{Q}_1 + n \cdot Q_2 \equiv h \cdot Q_1 + k \cdot Q_2 \ (\text{mod. } 2\,\pi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Op analoge wijze kan men stuk voor stuk de gelijkheid der termen van de beide reeksen aantoonen.

Aan de vergelijkingen (I) kan slechts voldaan worden als ω_1, ω_2 eenerzijds en ω_1, ω_2 anderzijds door lineaire substituties met geheele koefficienten en determinant $+1$ verbonden zijn, m.a.w. als deze stelsels equivalent zijn.

Hetzelfde moet gelden voor de Q's (mod. 2π), en dus ook voor de integralen:

$$I_k = \int_0^{2\pi} d\,Q_k \,.\, \sum_i p_i \,\frac{\partial\, q_i}{\partial\, Q_k} \quad ^{1)}.$$

[1]) *Toelichting.* Vergelijk fig. 3.

Zij b.v. $Q_1 = 2\,\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2$, dus: $\overline{Q}_1 = \quad Q_1 - \quad Q_2$,

$Q_2 = \quad Q_1 + Q_2$, $\qquad Q_2 = -\,Q_1 + 2\,Q_2$.

Dan is, wanneer men in het oog houdt dat $\Sigma p_i\, d\,q_i$ een *volledige differentiaal* is (zie opm. 2 bij § 11):

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\,Q_1 \,.\, \Sigma_i\, p_i \,\frac{\partial\, q_i}{\partial\, Q_1} = \int_0^{A} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i =$$

$$= \int_0^{\overline{A}} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i + \int_{\overline{A}}^{A} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i = \overline{I}_1 - \overline{I}_2 \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\,Q_2 \,.\, \Sigma_i\, p_i \,\frac{\partial\, q_i}{\partial\, Q_2} = \int_0^{B} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i =$$

$$= \int_0^{\overline{B}} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i + \int_{\overline{B}}^{B} \Sigma_i\, p_i\, d\,q_i = 2\,\overline{I}_2 - \overline{I}_1 \quad . \; . \; . \; (\beta)$$

De grootheden I_1, I_2 eenerzijds, $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ anderzijds, blijken dus door een lineaire substitutie met determinant 1 verbonden te zijn.

§ 13. OPMERKINGEN OVER ONTAARDE SYSTEMEN.

Volgens het bovenstaande moet men bij een systeem waar λ rationale betrekkingen bestaan tusschen de middelbare bewegingen, slechts $f - \lambda$ quantenvoorwaarden invoeren. Het aantal der quantenvoorwaarden is dus gelijk aan het aantal der onderling onmeetbare „grondperioden" van het systeem. Hierop is het eerst gewezen door K. SCHWARZSCHILD [1]).

In sommige gevallen heeft men echter meer quantenvoorwaarden ingevoerd dan het aantal der grondperioden bedraagt, zoo o.a. bij de elliptische beweging van een elektron om een atoomkern. Hier is slechts 1 periode (de beweging is exakt periodiek); SOMMERFELD heeft echter twee quantenvoorwaarden ingevoerd, waarvan de eene betrekking heeft op de azimuthale, de andere op de radiale beweging [2]) [3]).

In het algemeen komt dit hierop neer dat men behalve $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda}$ (verg. bl. 44) ook de grootheden $\mathbf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{P}_f$, of tenminste sommige ervan quantiseert. Bij deze „overtollige" quantiseering (welke geen invloed heeft op de waarde van de energie) kunnen tegenstrijdigheden optreden: het blijkt dat men door van verschillende oplossingsmethoden gebruik te maken (b.v. door verschillende koordinatensystemen in te voeren) tot verschillende stelsels grootheden $\mathbf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{P}_f$ kan komen, welke *niet* door lineaire substituties met geheele koefficienten en determinant ± 1 verbonden zijn.

Een voorbeeld hiervan is de bovengenoemde elliptische beweging. Uitgaande van poolkoordinaten komt men na eenige

[1]) K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 548.

[2]) A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 436; Ann. d. Phys. **51**, p. 17, 1916.

[3]) Dit heeft betrekking op het geval dat men de relativiteitskorrekties verwaarloost. Brengt men deze in rekening, dan is de beweging niet meer exakt periodiek; in dit geval *moeten* er twee quantenvoorwaarden ingevoerd worden (cf. hoofdstuk III, § 19).

transformaties (vergelijk hoofdstuk III, § 17) tot de invoering van de volgende intensiteitsgrootheden:

$$\mathbf{P}_1 = \sqrt{m e E a}$$

$$\mathbf{P}_2 = \sqrt{m e E a (1 - \varepsilon^2)} \qquad \mathbf{P}_3 = \sqrt{m e E a (1 - \varepsilon^2)} \, . \cos i$$

(m = massa elektron; e = lading elektron; E = lading kern; a = halve groote as van de elliptische baan; ε = excentriciteit; i = inklinatie van het baanvlak t.o.v. een willekeurig gekozen vast vlak).

Hierbij behooren de hoekvariabelen:

$\mathbf{Q}_1$ = middelbare anomalie;

$\mathbf{Q}_2$ = lengte perihelium, gerekend vanaf de klimmende knoop;

$\mathbf{Q}_3$ = lengte klimmende knoop, gerekend vanaf een bepaalde richting in het vaste vlak.

De middelbare beweging van $\mathbf{Q}_2$ en $\mathbf{Q}_3$ is nul. (Verg. § 17 en fig. 4, bl. 80).

Het is onmiddellijk in te zien dat quantiseering van $\mathbf{P}_3$ geen zin zou hebben, daar de waarde van *cos i* afhangt van de willekeurig te kiezen ligging van het vaste vlak. — De door SOMMERFELD ingevoerde quantenformules komen neer op een quantiseering van $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_2$, terwijl volgens § 10 en 11 alleen $\mathbf{P}_1$ gequantiseerd zou moeten worden.

Gaat men daarentegen uit van een stelsel parabolische koordinaten, zooals door EPSTEIN gebruikt is in zijn theorie van het STARK-effekt [1]) dan komt men tot een systeem van intensiteitskonstanten $P_1 \; P_2 \; P_3$, welke met de bovenvermelde als volgt samenhangen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= \mathbf{P}_1 \\ \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2 + P_3} &= \sqrt{\left(1 - \mathbf{P}_2^2/\mathbf{P}_1^2\right)\left(1 - \mathbf{P}_3^2/\mathbf{P}_2^2\right)} \, . \sin \mathbf{Q}_2 \\ P_3 &= \mathbf{P}_3 \end{aligned}\right\}$$ [2]).

Quantiseering der grootheden $P_1 \; P_2 \; P_3$ leidt dus tot een geheel

[1]) P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 489, 1916.

[2]) Verg. P. S. EPSTEIN, l.c. p. 506 en 501 (form. 55, 56, 39). De grootheden $P_1 \; P_2 \; P_3$ hangen met de quantengetallen van EPSTEIN aldus samen:

$$P_1 = n_1 \frac{h}{2\pi}, \quad P_2 = n_2 \frac{h}{2\pi}, \quad P_3 = n_3 \frac{h}{2\pi}. \quad \text{Vergelijk § 21.}$$

De hoofdas van het koordinatensysteem is in beide gevallen hetzelfde genomen.

ander systeem van banen, dan quantiseering van P_1 P_2 P_3 [1]).

Een ander voorbeeld is een isotrope oscillator van twee of drie graden van vrijheid, waar men de beweging hetzij op verschillende rechthoekige assenstelsels, hetzij op poolkoordinaten kan beschrijven [2]).

Bij de quantiseering der ontaarde systemen blijken dus moeilijkheden op te treden, zoo men verder wil gaan dan met de gegeven formuleering overeenstemt.

Deze moeilijkheid wordt nog verscherpt door het volgende: men kan een ontaard systeem beschouwen als een grensgeval van verschillende niet-ontaarde systemen; indien men dan de quantenformules voor het ontaarde systeem afleidt uit die voor de niet-ontaarde systemen door hiermee tot de limiet over te gaan, komt men tot in het algemeen met elkaar in strijd zijnde quantenformules.

In nauw verband hiermee staan analoge moeilijkheden welke optreden bij de theorie der *adiabatische beïnvloeding* van een mechanisch systeem [3]).

Verder hangt hiermee de volgende kwestie samen:

In vele gevallen kan men ingewikkelde problemen opvatten als storingsproblemen van meer eenvoudige gevallen.

Is H de funktie van Hamilton voor het gegeven systeem, H_0 die voor het eenvoudige, dan stelt men:

$$H = H_0 + H_1,$$

waar H_1 de *storingsfunktie* is. In deze gevallen is het gewoonlijk gemakkelijk de hoekvariabelen en de korrespondeerende intensiteitskonstanten $Q_1 \ldots Q_f$ $P_1 \ldots P_f$ welke bij het ongestoorde probleem behooren als nieuwe variabelen in te voeren. Dan gaat H_0 over in een funktie $K_0(P)$ welke de Q's niet bevat, terwijl de storingsfunktie H_1 in een trigonometrische reeks naar $Q_1 \ldots Q_f$ ontwikkeld kan worden.

Bestaan er tusschen de middelbare bewegingen der Q's in het ongestoorde probleem *geen* rationale betrekkingen, dan kan men

[1]) Vergelijk ook: P. S. Epstein, l.c. p. 500, en Ann. d. Phys. **51**, p. 28, 1916.

[2]) Vergelijk: H. A. Lorentz, Over energie-elementen, Versl. Akad. Amst. XX, p. 1110, 1912, en: P. Ehrenfest, Versl. Akad. Amst. XXV, p. 412, 1916.

[3]) Vergelijk: P. Ehrenfest, Versl. Akad. Amst. XXV, p. 412, vgl., 1916; zie hierover ook beneden, hoofdstuk VI, § 38.

het gestoorde probleem vrij gemakkelijk behandelen volgens een door DELAUNAY gegeven methode [1]). In dit geval zal men voor het gestoorde probleem tot quantenformules komen welke geheel aansluiten bij die voor het ongestoorde; omgekeerd uitgedrukt: laat men de storingsfunktie nu weer tot nul naderen, dan gaan de quantenformules voor het gestoorde probleem over in die van het ongestoorde, welke laatste luiden:

$$P_i = n_i\, h/2\pi.$$

Is evenwel het ongestoorde systeem ontaard, dan stuit men op moeilijkheden tengevolge van de meetbare relaties tusschen de middelbare bewegingen. Voert men de variabelen $\mathbf{Q}_1 \ldots \mathbf{Q}_f$ $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_f$ van bl. 44 in, dan bevat de hoofdterm der funktie van HAMILTON slechts $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda}$:

$$H_0 = \mathbf{K}_0(\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{f-\lambda}).$$

In dit geval moet men uit $\mathbf{Q}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{Q}_f$ $\mathbf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathbf{P}_f$ (soms ook uit het volledige stel: $\mathbf{Q}_1 \ldots \mathbf{Q}_f$ $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_f$) door bizondere substituties een nieuw stel van variabelen afleiden om de storingsfunktie te kunnen behandelen [2]). Heeft men ten slotte het probleem opgelost en de quantenvoorwaarden opgesteld, dan blijkt dat de gevonden quantenformules in het algemeen *niet* aansluiten bij een quantiseering van *alle* intensiteitsgrootheden $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_f$ van het ongestoorde probleem. M.a.w.: laat men, nadat het volledige probleem opgelost is, de storingsfunktie tot nul naderen, dan gaan de quantenformules van het volledige probleem over in twee groepen:

a) $f-\lambda$ formules, welke equivalent zijn met: $\mathbf{P}_i = n_i\, h/2\pi$ $(i = 1 \ldots f-\lambda)$

b) λ formules van geheel anderen aard [3]).

Beperkt men bij ontaarde systemen de quantiseering in overeenstemming met de formuleering van § 10 en 11, dan is in het algemeen de vorm van de baan niet geheel vastgelegd. Zoo is

[1]) Zie b.v. E. T. WHITTAKER, Anal. dynamics (Cambr. 1917), p. 420. Voor toepassingen dezer methode vergelijke men beneden § 20, III, en § 22.

[2]) Zie b.v. H. POINCARÉ, Mécanique Céleste II, p. 133.

[3]) Men vergelijke de voorbeelden, behandeld in hoofdstuk III, § 20, II; § 21, *Opmerking* en § 23, II.

bij de KEPLER-ellips door de quantiseering van P_1 wel de groote as bepaald, doch niet de excentriciteit [1]).

Men kan zich afvragen of er ook experimenteele of andere middelen zouden bestaan om iets over de niet gequantiseerde grootheden $P_{f-\lambda+1} \ldots P_f$ te weten te komen (dus in het geval van de KEPLER-ellips iets over de excentriciteit). Tot nu toe is de eenigste grootheid waarmee men werkt de totale energie (spektra!); deze is echter ongevoelig voor de waarden van $P_{f-\lambda+1} \ldots P_f$ [2]).

Tenslotte moet nog op het volgende gewezen worden:

1) E. T. WHITTAKER heeft voor een probleem van twee graden van vrijheid methoden aangegeven om de reeksontwikkelingen der koordinaten en momenten naar goniometrische funkties van twee hoekvariabelen te verkrijgen [3]). Hierbij wijst hij erop, dat het karakter van deze reeksen geheel verandert, zoodra de verhouding van de middelbare bewegingen dezer hoekvariabelen een rationale waarde aanneemt.

(Met deze kwesties schijnt ook het probleem van de konvergentie of divergentie der reeksontwikkelingen, waarover door POINCARÉ vele onderzoekingen gedaan zijn, in verband te staan. Zie een opmerking bij WHITTAKER, l.c.)

2) Moeilijkheden bij de verdeeling der faze-ruimte van een ontaard systeem: cf. P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 181, 1916.

3) Invloed van de niet gequantiseerde **P**'s bij statistische problemen: zie hoofdstuk VI, § 41, **C**) 2.

4) M. PLANCK gebruikt in zijn theorie over de struktuur der faze-ruimte de uitdrukking: „koherente vrijheidsgraden" [4]). Dit begrip van koherentie der vrijheidsgraden komt in sommige gevallen op hetzelfde neer als de meetbare betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen; de beide begrippen dekken elkaar echter niet [5]).

[1]) Zie hoofdstuk III, § 17. — De ligging van het baanvlak in de ruimte blijft ook onbepaald.

[2]) EPSTEIN heeft de onderstelling uitgesproken dat ontaardingsgevallen in strengen zin *niet* voorkomen. Zie Ann. d. Phys. **51**, p. 182, 1916.

[3]) E. T. WHITTAKER, On the Adelphic Integral of the Equations of Dynamics, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **37**, p. 95, vgl., 1917.

[4]) M. PLANCK, Ann. d. Phys. **50**, p. 385, vgl., 1916.

[5]) Bij de KEPLER-beweging, en evenzoo bij de beweging van een punt in een isotroop quasi-elastisch krachtveld van drie graden van vrijheid zijn alle *drie* middelbare bewegingen onderling meetbaar. PLANCK spreekt echter van *twee* koherente graden van vrijheid.

§ 14. VOORBEELDEN VAN SYSTEMEN WAAROP DE QUANTENFORMULES VAN § 10 KUNNEN WORDEN TOEGEPAST.

a) *Harmonisch trillende systemen.*

Neem aan dat een mechanisch systeem zoodanig gebouwd is, dat bij een bepaalde keuze der koordinaten de funktie van HAMILTON den vorm heeft:

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i A_i q_i^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Indien alle koefficienten $A_i > 0$ zijn, is de beweging van iedere koordinaat een harmonische trilling met de frequentie:

$$2\pi \nu_i = \omega_i = \sqrt{A_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Stel nu:

$$q_i = \sqrt{2 P_i / \omega_i} \,.\, \cos Q_i \;\; ; \;\; p_i = -\sqrt{2 P_i \omega_i} \,.\, \sin Q_i \quad [1] \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Dan voldoen P_i en Q_i aan de in § 10 genoemde voorwaarden: men heeft:

$$P_i = \text{konstante} \;\; ; \;\; Q_i = \omega_i t + \varepsilon_i \quad [2]$$

De funktie van HAMILTON $H(q, p)$ gaat over in:

$$K(P) = \sum_i \omega_i P_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

De quantenbewegingen zijn nu gekarakteriseerd door de relaties:

$$P_i = n_i h / 2\pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

hun energie bedraagt:

$$\alpha = (\sum_i n_i \omega_i)\, h/2\pi = \sum_i n_i \nu_i h \quad [3] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Het is duidelijk dat de n's geen negatieve waarden kunnen

[1]) Deze transformatie is afkomstig van POINCARÉ (Cf. Mécanique Céleste I, p. 30).

[2]) Men heeft:

$$\sum_i p_i \, dq_i = \sum_i P_i \, dQ_i - d(\tfrac{1}{2} \sum_i P_i \sin 2 Q_i),$$

dus is ook voldaan aan § 10, **D** 1 en 2.

[3]) Dit stemt overeen met de oorspronkelijke formule van PLANCK.

hebben; er is echter volstrekt geen reden om de waarde nul uit te sluiten.

b) Meer ingewikkelde systemen welke trillingen uitvoeren om een evenwichtsstand kunnen op een analoge wijze behandeld worden. Zie hiervoor: WHITTAKER, Analytical Dynamics (Cambridge 1917), Ch. XVI, Integration by trigonometric series.

Opmerking naar aanleiding van formule (4).

Door WHITTAKER is aangetoond [1]) dat voor alle systemen waarvan de funktie van HAMILTON een kwadratische uitdrukking is in de koordinaten en momenten [2]):

$$H = \Sigma A_{hk}\, p_h\, p_k + \Sigma B_{hk}\, p_h\, q_k + \Sigma C_{hk}\, q_h\, q_k + \\ + \Sigma D_h\, p_h + \Sigma E_h\, q_h + F \quad . \; . \; . \; (1^*)$$

(de koefficienten $A \;.\;.\;.\;.\; F$ zijn konstanten)

door middel van kontakttransformaties en door de invoering van hoekvariabelen deze funktie te herleiden is tot den vorm:

$$K(P) = \Sigma P_i\, \omega_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4^*)$$

indien alle frequenties ω_i reëel en ongelijk zijn [3]). Stelt men $P_i = n_i\, h / 2\,\pi$ dan is de energie uitgedrukt in de quantengetallen:

$$\alpha = (\Sigma\, n_i\, \omega_i)\, h / 2\,\pi = \Sigma\, n_i\, h\, \nu_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6^*)$$

Hieruit volgt voor de spektraallijnen die het systeem kan uitzenden bij het overspringen van de eene quantenbeweging in de andere:

$$\nu_{12} = \sum_i \left\{ (n_i)_1 - (n_i)_2 \right\} \nu_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6^{**})$$

De lichtfrequenties die het systeem kan uitzenden zijn dus de frequenties der bewegingen in het systeem en alle boven- en kombinatietonen hiervan.

(Men kan nog onderstellen dat in H termen met hoogere machten der p's en q's voorkomen, welke *zeer kleine* koefficienten

[1]) Zie: E. T. WHITTAKER, Anal. Dynamics (Cambridge 1917), p. 413—418.

[2]) Voor deze systemen is de funktie van LAGRANGE kwadratisch in de koordinaten en de snelheden. — Tot deze systemen behooren alle die kleine trillingen om een evenwichtspositie of om een toestand van stationnaire beweging kunnen uitvoeren.

[3]) Of men tot een dergelijken vorm komt, indien sommige der frequenties gelijk zijn, heb ik niet nagegaan. In verschillende eenvoudige gevallen is dit zoo.

hebben. Dan komen onder de bewegingen in het systeem ook de boventonen en kombinatietonen der grondfrequenties voor, terwijl de formules (6*) en (6**) in eerste benadering niet veranderen) [1]).

c) Van groot belang voor de ontwikkeling der quantentheorie van het atoommodel zijn geweest de systemen die *separatie der variabelen* toelaten. Deze systemen bezitten de volgende eigenschap: men kan een zoodanig koordinatenstelsel invoeren dat elk moment p_i uit te drukken is als funktie van de bijbehoorende koordinaat q_i, in verbinding met de integratiekonstanten $\alpha_1 \ldots \alpha_f$ der f 1e kanonische integralen der bewegingsvergelijkingen:

$$p_i = F_i(q_i \alpha_1 \ldots \alpha_f) \text{ [2) 3)] } \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Omtrent de funkties F_i zal worden aangenomen (in verband met onderstelling **B**, § 10):

(1) Elke funktie F_i wordt voor (minstens) twee op elkaar vol-

[1]) Vergelijk in verband hiermee § 32.

[2]) Een groote groep van deze systemen is het eerst aangegeven door P. STÄCKEL (Compt. Rend. **116**, p. 485, 1893; **121**, p. 489, 1895). De theorie ervan is uitvoerig behandeld in: CHARLIER, Die Mechanik des Himmels I (Leipzig 1902). STÄCKEL voert echter nog een beperking in omtrent den vorm van de funktie van HAMILTON, die niet noodzakelijk is; gedeeltelijk is deze beperking opgeheven door P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 170, 1916.

[3]) Bij elk willekeurig mechanisch systeem kan men, zooals bekend is, steeds p_i uitdrukken als funktie van *alle* q's in verbinding met $\alpha_1 \ldots \alpha_f$. Dit kan b.v. geschieden met behulp der integratie van de partieele diff. verg. van HAMILTON-JACOBI:

$$H\left(q_1 \ldots q_f \frac{\partial W}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = \alpha_1 = \textit{totale energie.}$$

Indien men een oplossing van deze vergelijking kan vinden die den vorm heeft:

$$W = \sum_i W_i(q_i \alpha_1 \ldots \alpha_f),$$

m. a. w. indien de variabelen $q_1 \ldots q_f$ *gesepareerd* kunnen worden, vindt men hieruit voor de p's uitdrukkingen van den vorm:

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = F_i(q_i \alpha_1 \ldots \alpha_f)$$

n overeenstemming met (7).

gende waarden ξ_i en η_i van q_i *nul van de orde 1/2*; tusschen ξ_i en η_i is F_i *reëel* [1]).

(2) Op een bepaald oogenblik ligt elke koordinaat q_i tusschen deze wortels ξ_i en η_i.

Dan kan bewezen worden dat elke q_i een *libratie-beweging* uitvoert tusschen deze grenzen [2]).

Bij deze systemen luiden de quantenformules:

$$2\pi P_k = \int\limits_{\leftrightarrow} p_k \, . \, d q_k = \int\limits_{\leftrightarrow} d q_k \, . \, F_k (q_k \alpha_1 \ldots \alpha_f) =$$
$$= I_k (\alpha_1 \ldots \alpha_f) = n_k \, . \, h \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Bij de integratie loopt q_k eenmaal tusschen ξ_k en η_k op en neer (aangeduid door $\leftrightarrow$ onder het integraalteeken te schrijven) [3]).

Deze quantiseering der z.g. „faze-integralen" I_k is voor systemen van 1 graad van vrijheid reeds ingevoerd door PLANCK, HASENÖHRL, DEBYE en EHRENFEST; op systemen van meer graden van vrijheid is ze uitgebreid door SOMMERFELD, EPSTEIN en SCHWARZSCHILD [4]).

Het bewijs dat deze quantenformules in overeenstemming zijn met § 10 en 11 zal hier achterwege gelaten worden; men zie hiervoor: K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 548, 1916 en P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 176, 1916.

Opmerkingen.

I) Bij de problemen der elektronen-beweging, en eveneens bij vele andere waar poolkoordinaten gebruikt worden, komt onder de koordinaten een azimuthale hoek φ voor, welke onbegrensd kan toenemen, terwijl de korrespondeerende p_φ (het moment van

[1]) In de gewoonlijk voorkomende gevallen is F_i de wortel uit een rationale funktie; b.v. bij harmonische trillingen:

$$p = F(q) = \sqrt{2 m \alpha - A q^2}$$

Zie verder de behandelde speciale problemen (hoofdstuk III).

[2]) Zie b.v. CHARLIER, Die Mech. d. Himmels I, p. 86, 100.

[3]) Deze integralen krijgen een eenvoudige beteekenis wanneer men q_i als komplexe variabele opvat. Cf. A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 500, 1916.

[4]) M. PLANCK, Congrès Solvay, 1911, p. 99. — F. HASENÖHRL, Phys. Zeitschr. **12**, p. 931, 1911. — P. DEBYE, Gött. Vorlesungen (Teubner 1913). — P. EHRENFEST, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, p. 453, 1913. — A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 425, vgl., 1915. — P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 489, 1916. — K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 548, 1916.

hoeveelheid van beweging dat bij φ behoort) een konstante is, of een periodieke funktie van φ (periode 2π). Dit geeft geen essentieele verandering in de quantenformules, daar de konfiguratie van het systeem periodiek is t.o.v. deze variabele; een toename van φ met 2π treedt hier in de plaats van het op en neer gaan tusschen de grenswaarden bij de andere koordinaten. De quantenvoorwaarde luidt in dit geval:

$$2\pi P = \int_0^{2\pi} p_\varphi \, . \, d\varphi = n \, . \, h \quad ^{1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Deze formule is de eerste geweest welke men op het atoommodel heeft toegepast; ze is daar ingevoerd door NICHOLSON en BOHR [2]). Tevoren was ze reeds door EHRENFEST voor de theorie van roteerende systemen gebezigd [3]).

II) „*Semi-periodieke systemen*" (ontaardingsgevallen).

In het bovenstaande was stilzwijgend aangenomen dat tusschen de middelbare bewegingen ω_i der hoekvariabelen [4]) geen rationale betrekkingen bestonden. Is hieraan niet voldaan, m. a. w. bestaan er tusschen de ω_i rationale betrekkingen van den vorm:

[1]) Men kan ook:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2p_\varphi} \, . \cos\varphi \\ y &= -\sqrt{2p_\varphi} \, . \sin\varphi = -\sqrt{2p_\varphi - x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(transf. v. POINCARÉ)}$$

als nieuwe variabelen invoeren om tot het algemeene geval der faze-integralen terug te komen. Dan is:

$$y \, . \, dx = p_\varphi \, . \, d\varphi - d\,(\tfrac{1}{2}\, p_\varphi \sin 2\varphi)$$

en dus:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, . \, d\varphi = \int_{\leftrightarrow} y \, . \, dx$$

[2]) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices Roy. Astr. Soc. **72**, p. 677, 1912.
N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 1, 1913.
J. W. NICHOLSON, Nature **92**, p. 199, 1913.

[3]) P. EHRENFEST, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, p. 453, 1913.

[4]) In overeenstemming met het in § 10 gezegde worden de ω_i gevonden door met behulp der formules (8) de totale energie (zij deze b.v. α_1) uit te drukken als funktie der P's. Dan is $\bar{\omega}_i = \partial\alpha_1 / \partial P_i$. Zie K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 548, 1916 en P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 178, 1916.

$$\sum_i m_i^\mu \cdot \omega_i = 0 \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \ldots \lambda \\ m_i^\mu = \text{geheel getal} \end{array} \right\},$$

dan moet in overeenstemming met hetgeen in § 10 en 11 gezegd is, door een lineaire substitutie met geheele koefficienten op een nieuw systeem van variabelen worden overgegaan. Zie voor den vorm der quantenformules de daar opgegeven citaten, en verder de in hoofdstuk III behandelde speciale problemen.

III) *Exakt periodieke systemen.*

Het systeem is exakt periodiek als alle ω_i geheele veelvouden van één grootheid ω_0 zijn:

$$\omega_i = m_i \cdot \omega_0$$

(de m_i zijn onderling onmeetbare geheele getallen).

Dan is de eenige te quantiseeren grootheid:

$$\mathbf{P}_0 = \sum_i m_i \cdot P_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

De periode van het systeem is:

$$\tau = 2\pi/_{\omega_0} = 1/_{\nu_0}.$$

$2\pi\,\mathbf{P}_0$ is gelijk aan de werkings-integraal uitgestrekt over een volle periode:

$$2\pi\,\mathbf{P}_0 = \sum_i m_i (2\pi P_i) = \sum_i m_i \int\limits_{\leftrightarrow} p_i\, d\, q_i = \int_0^\tau dt \,(\Sigma\, p_i \dot{q}_i) =$$

$$= \int_0^\tau dt \,.\, 2\,T = 2\,\overline{T}/_{\nu_0}\;[1]) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

d) In sommige gevallen kan men ook andere vormen van transformaties gebruiken om tot de hoekvariabelen te komen, doch deze verschillen in het algemeen principieel weinig van bovengenoemde. Eenige voorbeelden worden in hoofdstuk III gegeven.

[1]) P. Ehrenfest, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 412, 1916.
(Uit de formule blijkt dat een exakt periodiek systeem steeds eenduidig te quantiseeren is.)

§ 15. OPMERKINGEN OVER SYSTEMEN DIE NIET VOLDOEN AAN DE VOORWAARDE **B** VAN § 10.

a) *Translatie-bewegingen.* [vergelijk ook: § 16, **a**).]

Een mechanisch systeem waarop geen uitwendige krachten werken bezit steeds de drie integralen van hoeveelheid van beweging:

$$p_x = \text{konstante}$$
$$p_y = \quad ,,$$
$$p_z = \quad ,, \quad ,$$

waar p_x, p_y, p_z de komponenten van de totale hoeveelheid van beweging van het geheele systeem zijn. De bij deze momenten behoorende koordinaten x, y, z, welke de ligging van het geheele systeem in de ruimte aangeven, kunnen onbegrensd toenemen, en kunnen dus niet als periodieke funkties van hoekvariabelen worden uitgedrukt [1]).

In het algemeen heeft men voor de translatie-beweging geen quantenvoorwaarden ingevoerd; m. a. w. de waarden van p_x, p_y, p_z zijn niet door quantengetallen gebonden, maar kunnen een kontinu gebied doorloopen [2]).

In de *quantentheorie der ideale gassen* worden de translatie-bewegingen door sommige physici wel gequantiseerd. Hierbij worden twee verschillende methoden gevolgd:

1) Men herleidt de translatie-bewegingen van de molekulen tot *periodieke* bewegingen, hetzij door ze te beschouwen als een superpositie van sinustrillingen (geluidsgolven) [3]), hetzij door te

[1]) x, y, z zijn *cyklische* koordinaten.

[2]) Voor een dergelijk systeem is dus het aantal quantenformules minstens 3 kleiner dan het aantal vrijheidsgraden. [Zie § 16, **a**)].

[3]) Cf. H. Tetrode, Phys. Zeitschr. **14**, p. 212, 1913;
O. Lenz (A. Sommerfeld, Gött. Vorlesungen 1913);
W. H. Keesom, Versl. Akad. Amst. 1913, p. 98 (= Comm. Leiden, Suppl. 30 a).

letten op de beperkte ruimte waarin de molekulen zich bewegen [1]) [2]).

2) Op een — oogenschijnlijk — geheel andere wijze voert PLANCK bij ideale gassen de quantenvoorwaarden in [3]).

Zij p de totale hoeveelheid van beweging van een molekuul, V het volume van het gas, dan zijn de quantenbewegingen volgens PLANCK gegeven door:

$$\frac{4}{3}\pi p^3 . V = \alpha (n h)^3$$

Hierin is α een konstante, welke PLANCK gelijk stelt aan:

$$\alpha = N/e$$

wanneer N het totale aantal molekulen van het beschouwde gas is, terwijl e = de basis der natuurlijke logarithmen [4]).

Deze methoden kunnen echter niet toegepast worden wanneer men te doen heeft met een enkel systeem, en er niets gegeven is omtrent de ruimte waarin het systeem zich kan bewegen.

Voorloopig lijkt het me het beste voor de translatie-beweging van een afzonderlijk systeem geen quantenvoorwaarden in te voeren [5]).

In de theorie der spektra van eenvoudige systemen voert men (in overeenstemming met de opmerking van § 9) steeds een koordinatenstelsel in, ten opzichte waarvan het systeem rust; men kan dan de translatie-beweging verder buiten beschouwing laten.

b) *De hyperbolische beweging.*

EPSTEIN heeft formules gegeven voor de quantiseering van de

[1]) Cf. P. SCHERRER, Gött. Nachr. 1916 (zie in verband met dit artikel van van P. SCHERRER ook J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amst. XXV, p. 557, 1916).

[2]) Het in rekening brengen van de beperkte ruimte waarin de gasmolekulen zich bewegen komt essentieel neer op het invoeren van een uitwendig krachtveld.

[3]) M. PLANCK, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 653—667; speciaal: IIIer Teil, Eine grosse Anzahl von Atomen mit gegenseitig inkohärenten Freiheitsgraden, p. 665—667.

[4]) M. PLANCK, l.c. p. 666, form. (49)—(51).

[5]) Indien men de translatie-beweging van een afzonderlijk systeem wil quantiseeren komt men ook voor het probleem te staan: ten opzichte van welk koordinatenstelsel moet de snelheid gemeten worden?

hyperbolische beweging van een elektron om een atoomkern, welke op het volgende neerkomen: [1])

Gebruikt worden poolkoordinaten r, φ; de variabelen kunnen gesepareerd worden, en men vindt voor de momenten:

$$p_\varphi = konstante;\ p_r = p_\varphi \sqrt{C^2 \varepsilon^2 - (r^{-1} - C)^2}\ ^{2)} \quad \ldots \ldots (1)$$

Evenals steeds gedaan wordt kan men p_φ gelijk stellen aan een geheel veelvoud van $h/2\pi$. Wat echter de uitdrukking voor p_r betreft, deze vertoont een karakter eenigermate tegengesteld aan hetgeen in § 14, **c**) van de funkties F_i geëischt werd: p_r is reëel voor waarden van r grooter dan de grootste (η) der wortels, en voor waarden kleiner dan de kleinste (ξ) der wortels van de vergelijking:

$$C^2 \varepsilon^2 - (r^{-1} - C)^2 = 0.$$

Verder is:

$$\lim_{r=\infty} p_r = p_\infty = p_\varphi C \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Epstein voert nu de quantenvoorwaarde in:

$$2\int_\eta^\xi dr\,[p_r - p_\infty] = n_2\, h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

bij de integratie loopt r van η tot $+\infty$, en dan van $-\infty$ tot ξ. [3])

[1]) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **50**, p. 815, 1916. — Epstein houdt in zijn formules rekening met de formules van de relativistische mechanika; dit verandert echter het principe niet.

[2]) De drie hier ingevoerde konstanten p_φ, C, ε (waarvan slechts twee onafhankelijk zijn) hangen onderling en met de totale energie α aldus samen:

$$C = e\,E\,m\,p_\varphi^{-2};\ \alpha = \tfrac{1}{2}\, e^2\, E^2\, m\,(\varepsilon^2 - 1)\, p_\varphi^{-2}.$$

ε = excentriciteit; C^{-1} = parameter van de hyperbool.

[3]) De vergelijking van de hyperbool in poolkoordinaten (met de pool in een der brandpunten) luidt:

$$r = \frac{1}{C(1 + \varepsilon \cos \varphi)}.$$

De hoek die de asymptoten met de poolas maken is bepaald door:

$$\cos \varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Voor waarden van φ gelegen tusschen $-\varphi_0$ en $+\varphi_0$ is r positief; men heeft

Of EPSTEIN hierin juist gezien heeft, durf ik niet te beoordeelen. Misschien kunnen voor de studie van dergelijke problemen van nut zijn de opmerkingen die POINCARÉ maakt over de analytische voortzetting van banen die naar het oneindige loopen (Mécanique Céleste III, p. 168).

Verder doet zich hier de vraag voor: Kan men in dergelijke gevallen waar het integratie-gebied oneindig is, steeds op geschikte wijze tot *konvergente* integralen komen? In het bovenstaande probleem gelukte dit door van p_r de waarde voor $r = \infty$ af te trekken.

EPSTEIN past deze quantenformules toe op de theorie van het foto-elektrisch effekt, en op de beta-stralen van radioaktieve stoffen. Zie enkele opmerkingen hierover in hoofdstuk III, § 24.

Het probleem van de quantiseering dezer, in zekeren zin „instabiele" bewegingen [1]), schijnt mij toe van groot belang te zijn voor de theorie der quanta. Vooral lijkt het mij van gewicht te zijn voor de problemen die zich voordoen bij de systemen met meerdere elektronen (zie hoofdstuk IV, § 26).

Bij deze systemen beschouwt men gewoonlijk periodieke bewegingen der elektronen, b.v.: alle elektronen zijn op gelijke afstanden langs een cirkel verdeeld, en loopen met eenparige snelheid rond. In het algemeen zijn deze periodieke soluties der bewegingsvergelijkingen *instabiel*, in dien zin dat bij kleine storingen der beweging de elektronen naar het oneindige wegloopen, of op de kern kunnen vallen [2]). Deze stabiliteitsproblemen vormen de grootste moeilijkheid voor de theorie van atoommodellen met meer dan 1 elektron of met meerdere kernen.

Wanneer men quantenvoorwaarden had voor *alle* bewegingen

dan de tak van de hyperbool die het elektron doorloopt. De minimumwaarde van r (perihelium-afstand) is:

$$\xi = \frac{1}{C(1+\varepsilon)} .$$

Is $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$, dan is r *negatief* en steeds $\leqslant \eta = \frac{1}{C(1-\varepsilon)}$. Het punt r, φ beschrijft dan de andere tak van de hyperbool. In de integraal van EPSTEIN $\int dr\,[p_r - p_\infty]$ doorloopt r de *beide* takken van de hyperbool.

Men zie fig. 1 en 2 op bl. 823 en 824 van EPSTEIN's verhandeling.]

[1]) Zie de definities van stabiliteit in § 26, speciaal def. (1).

[2]) Cf. § 26, def. (2).

in de nabijheid van een periodieke solutie, dus ook voor de bewegingen waarbij de elektronen naar de kern loopen, of naar het oneindige gaan, en men onderstelt dat het systeem *slechts* de quantenbewegingen kan uitvoeren, dan zou het systeem vermoedelijk eerst door een storing van eindige grootte in een van de „instabiele" bewegingen kunnen overspringen [1]).

Misschien zou hierin een methode gelegen kunnen zijn om de moeilijkheid der instabiele bewegingen te overwinnen. [Men vergelijke Noot II bij § 26]. [2])

[1]) De *elliptische* beweging van een elektron om een kern in een krachtveld van NEWTON is stabiel; om deze te doen overgaan in een „instabiele" hyperbolische beweging moet men de energie met een bedrag van *eindige* grootte vermeerderen.

[[2]) Een betrekkelijk eenvoudig geval is de beweging van een punt in een tweedimensionaal krachtveld met potentiaal: $V = A^2 . r^{-4}$; in dit veld is een periodieke beweging mogelijk (cirkelbaan), welke instabiel is tegenover kleine storingen. De funktie van HAMILTON voor dit probleem is:

$$H = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{r^2} - \frac{A^2}{r^4} = \alpha$$

waarin $R = \dot{r}$ en $\Phi = \dot{\varphi} r^2$ (ter vereenvoudiging is de massa gelijk aan 1 gesteld). Men kan de variabelen separeeren en heeft:

$$\Phi = \text{konstante} = C = n_2 \frac{h}{2\pi}$$

$$R = \sqrt{2\alpha - C^2/r^2 + 2A^2/r^4}.$$

Voor de cirkelbeweging is:

$$R = 0; \quad \alpha = \alpha_0 = \frac{C^4}{16 A^2}; \quad r = \frac{2A}{C}.$$

Is $\alpha < \alpha_0$, dan zijn de bewegingen in twee groepen te verdeelen: banen tusschen de kern en een zekere maximum-afstand (I), en banen van een minimum-waarde van r naar het oneindige (II); voor $\alpha > \alpha_0$ gaan de banen van de kern naar het oneindige of omgekeerd (III). Men kan nu op het voetspoor van EPSTEIN als quantenvoorwaarden invoeren:

$$\text{Voor (I):} \quad 4 \int_0^{r_{max}} dr \left[\sqrt{2\alpha - C^2/r^2 + 2A^2/r^4} - \sqrt{2A^2/r^4} \right] = n_1 h;$$

$$\text{(II):} \quad 4 \int_{r_{min}}^{\infty} dr \left[\sqrt{2\alpha - C^2/r^2 + 2A^2/r^4} - \sqrt{2\alpha} \right] = n_1 h;$$

$$\text{(III):} \quad 2 \int_0^{\infty} dr \left[\sqrt{2\alpha - C^2/r^2 + 2A^2/r^4} - \sqrt{2A^2/r^4} - \sqrt{2\alpha} \right] = n_1 h.$$

Door de integralen uit te werken (met behulp van de theorie der elliptische

integralen, of door numerieke berekening) kan men de waarden van α vinden voor verschillende waarden van n_1 en n_2.

Uit de verkregen uitkomsten kan men dan vervolgens afleiden met welk bedrag de energie moet veranderen opdat de cirkelbeweging in een andere beweging omslaat. Deze sprongen zijn voor kleine waarden van de quantengetallen van dezelfde orde van grootte als α_0; m.a.w. ze zijn *relatief groot.* Hoe grooter echter de quantengetallen worden, hoe kleiner de relatieve veranderingen in de energie behoeven te zijn voor het omslaan.

Over de waarde van de hier gebezigde quantenformules durf ik echter niet te oordeelen.]

§ 16. VERSCHILLENDE OPMERKINGEN.

[a) Bij een mechanisch systeem van f graden van vrijheid dat niet door uitwendige krachten wordt beïnvloed, is het aantal der quantenvoorwaarden ten hoogste

$$f - 4.$$

Er vallen nl. vooreerst 3 quantenvoorwaarden weg in verband met de drie integralen der beweging van het zwaartepunt (zie § 15, **a**)); een vierde valt weg in verband met de integralen van het moment van hoeveelheid van beweging en de z.g. „*eliminatie der knoopen*" [1]).

Om dit te bewijzen kan men uitgaan van het probleem der beweging van n materieele punten onder den invloed van krachten die de punten onderling op elkaar uitoefenen, en dit reduceeren door middel van een stel kontakt-transformaties, gegeven door T. L. BENNETT [2]). Deze reduktie zal hier niet in haar geheel behandeld worden; ik wil me beperken tot een verkorte weergave, welke in iets algemeeneren vorm gehouden is.

Zij de funktie van HAMILTON voor het systeem:

$$H(p_1 \ldots p_{3n}\, q_1 \ldots q_{3n}),$$

waar $q_1 \ldots q_{3n}$ de rechthoekige koordinaten der n lichamen zijn, en $p_1 \ldots p_{3n}$ de overeenkomstige hoeveelheden van beweging. De funktie H behoeft slechts aan de voorwaarde te voldoen de genoemde 6 integralen toe te laten, is echter overigens geheel willekeurig [3]). Door middel van een eerste transformatie wordt nu overgegaan op het volgende systeem van variabelen: $q'_1\, q'_2\, q'_3,\ q'_4\, q'_5\, q'_6, \ldots q'_{3n-5}\, q'_{3n-4}\, q'_{3n-3}$ zijn de relatieve koor-

[1]) Zie WHITTAKER, Analytical Dynamics (Cambridge 1917), p. 341.

[2]) T. L. BENNETT, Mess. of. Mathematics **34**, p. 113, 1904.

[3]) Men mag dus b.v. de formules van de relativistische mechanika invoeren; ook mogen de punten werkingen op elkaar uitoefenen, welke niet slechts van hun standen, maar ook van hun snelheden afhankelijk zijn.

dinaten der eerste ($n-1$) lichamen ten opzichte van het n^e lichaam; $q'_{3n-2}\, q'_{3n-1}\, q'_{3n}$ zijn de absolute koordinaten van dit laatste; $p'_1\, p'_2\, p'_3 \ldots p'_{3n-5}\, p'_{3n-4}\, p'_{3n-3}$ zijn de hoeveelheden van beweging der eerste ($n-1$) lichamen; $p'_{3n-2}\, p'_{3n-1}\, p'_{3n}$ zijn de komponenten van de totale hoeveelheid van beweging van het geheele systeem. Tengevolge van de omtrent H gemaakte onderstelling moeten $q'_{3n-2}\, q'_{3n-1}\, q'_{3n}$ uit H wegvallen; $p'_{3n-2}\, p'_{3n-1}\, p'_{3n}$ zijn konstanten, welke men zonder bezwaar gelijk nul mag stellen (zie boven § 9). Hierdoor vallen reeds 3 koordinaten en 3 momenten weg.

Men denke zich een koordinatenstelsel $Oxyz$ aangebracht, evenwijdig aan het oorspronkelijke, met den oorsprong O in het n^e lichaam. Door een tweede transformatie voert BENNETT dan een beweeglijk stelsel $Ox'y'z'$ in met hetzelfde punt als oorsprong; het $x'y'$-vlak gaat door de lichamen ($n-2$), ($n-1$) en n, terwijl de x'-as ligt in het vlak Oxy. Om den momentanen stand van dit stelsel te bepalen zijn noodig de hoeken q''_{3n-4} (tusschen Ox en Ox') en q''_{3n-3} tusschen Oz en Oz'. Als variabelen worden ingevoerd:

(1) de koordinaten der lichamen ten opzichte van het systeem $Ox'y'z'$, waarvoor $3n-5$ grootheden $q''_1 \ldots q''_{3n-5}$ noodig zijn, daar voor de lichamen ($n-2$) en ($n-1$) de z'-koordinaat nul is, en voor het n^e lichaam alle koordinaten nul zijn;

(2) de reeds genoemde hoeken q''_{3n-4} en q''_{3n-3};

(3) de komponenten $p''_1 \ldots p''_{3n-9}$ der hoeveelheden van beweging van de eerste ($n-3$) lichamen parallel de assen Ox', Oy', Oz'; de komponenten p''_{3n-8}, p''_{3n-7} der hoeveelheid van beweging van het ($n-2$)^e lichaam, parallel Ox', Oy'; de komponenten p''_{3n-6}, p''_{3n-5} analoog voor het ($n-1$)^e lichaam;

(4) p''_{3n-4} = het tegengestelde van het moment van hoeveelheid van beweging van het geheele systeem om de as Oz, en p''_{3n-3} = het moment van hoeveelheid van beweging om de as Ox'.

In deze grootheden kunnen alle variabelen $q'_1 \ldots p'_{3n-3}$ worden uitgedrukt. Voegt men deze uitdrukkingen in de funktie van HAMILTON in, dan moet de koordinaat q''_{3n-4} hieruit wegvallen, daar de bewegingsvergelijkingen niet mogen veranderen zoo men het systeem $Oxyz$ over een zekeren hoek om de z-as wentelt. Een der integralen van het moment van hoeveelheid van beweging is dus:

(1) $$p''_{3n-4} = \textit{konstante} = k.$$

Het systeem moet verder een „invariabel vlak" bezitten, loodrecht op de richting van het totale moment van hoeveelheid van beweging. Kiest men het oorspronkelijke koordinatenstelsel zoo dat het vlak Oxy dit invariabele vlak is, dan zijn de beide andere integralen van moment van hoeveelheid van beweging:

(II) $$p''_{3n-3} = 0.$$

(III) *Moment van hoeveelheid van beweging om de as* $Oz' =$

$$- k \,.\, \cos q''_{3n-3}.$$

Tengevolge van (II) kan men p''_{3n-3} schrappen; door middel van (III) kan men $\cos q''_{3n-3}$ uitdrukken in de andere (dubbel geaccentueerde) variabelen. Voor de uitwerking hiervan wordt verwezen naar het geciteerde artikel van BENNETT.

Men komt tenslotte tot een funktie van HAMILTON H^*, welke slechts bevat $6n - 10$ variabelen: $q''_1 \ldots q''_{3n-5}\, p''_1 \ldots p''_{3n-5}$, en bovendien de konstante k, welke het totale moment van hoeveelheid van beweging van het geheele systeem bepaalt. De behandeling van de funktie H^* kan slechts leiden tot hoogstens $3n - 5$ hoekvariabelen (zoo geen verdere ontaardingen optreden) met de hierbij behoorende kanonische momenten. De in te voeren quantenformules moeten de waarden van deze kanonische momenten bepalen, en bovendien de waarde van het totale moment van hoeveelheid van beweging k van het systeem [1]); hun aantal is dus hoogstens:

$$3n - 5 + 1 = 3n - 4.$$

Bij het probleem der twee lichamen is het aantal quantenvoorwaarden hoogstens twee (b.v. relativistische KEPLER-beweging, zie § 19); verder kan hier genoemd worden de beweging van een vast lichaam (aantal vrijheidsgraden: 6; aantal der quantenvoorwaarden: 2; zie § 29).]

b) *Gemiddelde waarde van de kinetische energie.*

Volgens een bekend theorema der mechanika is de kinetische energie T van een systeem gelijk aan de volgende uitdrukkingen:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \tfrac{1}{2} \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \tfrac{1}{2} \sum p_i \dot{q}_i.$$

[1]) Deze laatste, de $(3n - 4)^e$, quantenvoorwaarde luidt:

Transformeert men op hoekvariabelen, dan is volgens verg. (4), bl. 42:

$$\sum_i p_i\, d\, q_i = \sum_i P_i\, d\, Q_i + d\, W,$$

en dus:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i P_i \dot{Q}_i + \frac{d\, W}{d\, t}.$$

Hieruit volgt voor de gemiddelde waarde van T:

$$\bar{T} = \underset{\tau = \infty}{Lim} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \,.\, T = \frac{1}{2} \sum_i P_i\, \omega_i + \frac{1}{2} \underset{\tau = \infty}{Lim} \frac{W_\tau - W_0}{\tau}$$ [1])

zoodat:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum_i P_i\, \omega_i = \frac{1}{2} \sum_i P_i \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$ [2])

Indien er rationale betrekkingen bestaan tusschen de middelbare bewegingen, kan men deze uitdrukking zoo transformeeren dat alleen de intensiteitskonstanten $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{f-\lambda}$ en de bij deze behoorende middelbare bewegingen voorkomen.

In het bizondere geval van een exakt periodiek systeem vindt men:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \mathsf{P}_0\, \omega_0 = \frac{n\, h\, \nu}{2}$$

Vergelijk form. (11), § 14.

$$\int_0^{2\pi} d\, q''_{3n-1} \,.\, p''_{3n-1} = 2\, x\, k = \textit{geheel veelvoud van } h.$$

[1]) Ondersteld is dat de funktie W voor alle waarden der Q's steeds beneden een eindige grenswaarde blijft. (Hiervoor is noodzakelijk dat aan de voorwaarde **D** 2 van § 10 voldaan is.)

[2]) *Opmerking.* Is de totale energie *kinetisch*, dan is $\bar{T} = T = K$; uit formule (I) volgt dat in dit geval K een *homogene funktie van den tweeden graad* in de P's moet zijn. (Voorbeeld: rotatie van een vast lichaam).

Bij harmonisch trillende systemen is K homogeen van den *eersten* graad in de P's; hier is: $\bar{T} = \frac{1}{2} K = \bar{V}$.

(In sommige gevallen kan men op eenvoudige wijze het verband tusschen de gemiddelde waarde van de kinetische en die van de potentieele energie aangeven: zie hiervoor: A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 456, 1915.)

[**c**) Vergelijkt men verschillende *gelijkvormige* bewegingstoestanden van een mechanisch systeem, waarvan de absolute grootte der banen wordt bepaald door 1 quantengetal n, dan is de energie dezer bewegingstoestanden *omgekeerd evenredig met* n^2, zoo de krachten tusschen de verschillende deelen van het systeem omgekeerd evenredig zijn met de kwadraten der afstanden. Men kan dit aldus aantoonen: in de verschillende toestanden zijn de overeenkomstige massa's dezelfde; de krachten (dimensies: $l m t^{-2}$) zijn omgekeerd evenredig met de tweede machten der lengten; de „werkingen" en de kanonische momenten P en $\mathbf{P}$ (dimensies: $l^2 m t^{-1}$) zijn evenredig met n. Dan moeten zijn:

lengten evenredig met n^2,
tijden evenredig met n^3;

waaruit volgt dat de energie (dimensies: $l^2 m t^{-2}$) evenredig is met n^{-2}.

Het eenvoudigste voorbeeld hiervan zijn de cirkelvormige elektronenbanen in het model van het waterstof-atoom volgens BOHR.]

d) *Positieve en negatieve waarden der quantengetallen, enz.*

1) Uit formule (8) § 11 volgt dat men door geschikte keuze van het teeken van Q_k steeds kan zorgen dat P_k *positief* is. In vele gevallen is hieraan onmiddellijk voldaan, b.v. wanneer de P's bepaald worden met de methode der faze-integralen.

Soms is het gemakkelijker niet hieraan vast te houden. Beschouw b.v. de rotatie van een lichaam om een vaste as. Is A het traagheids-moment, dan heeft men:

$$L = \frac{1}{2} A \dot{q}^2 \qquad H = \frac{1}{2A} p_q^2$$

Als hoekvariabele en kanonisch moment kunnen ingevoerd worden:

$$Q = q \qquad P = p_q$$

zoodat:

$$K = \frac{1}{2A} P^2$$

Hieruit volgt voor de frequentie:

$$\dot{Q} = \omega = \partial K / \partial P = P / A.$$

Het teeken van P hangt dus af van de richting der beweging. Wil men steeds met positieve P's werken, dan zou men in het geval van een rotatie in negatieven zin moeten stellen:

$$Q = -\varphi \qquad\qquad P = -p_\varphi$$

waardoor $\omega = -\omega = P/A$ positief wordt. Deze afhankelijkheid der transformatie-formules van de richting der beweging geeft evenwel onnoodige moeite.

Hetzelfde treedt op bij de rondloopende beweging van een elektron om een atoomkern, e.d.

2) Uit de formule voor de middelbare beweging:

$$\omega_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

volgt dat de energie bij een afname van de absolute waarde der quantengetallen zal afnemen, zoo de middelbare beweging van elke hoekvariabele hetzelfde teeken heeft als de bijbehoorende P. In dit geval is ook in de boven onder **b**) aangegeven vergelijking (I) voor T elke term positief.

In het algemeen komt dit uit; er zijn evenwel gevallen waar de midd. bew. en de intensiteitskonstante het tegengestelde teeken hebben. Een voorbeeld hiervan is de beweging van een niet door uitwendige krachten beïnvloede symmetrische tol (Verg. K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 565.) De funktie $K(P)$ is hier:

$$K = \frac{1}{2A} P_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) P_1^2 \quad ^{1)}$$

($P_2 =$ totaal moment van hoeveelheid van beweging; $P_1 =$ komponente hiervan langs de figuur-as van de tol.) De middelbare beweging van Q_1 is:

[1]) Zie § 29.

$$\dot{Q}_1 = \omega_1 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) P_1 .$$

In het geval: $A < C$ (afgeplatte tol) is ω_1 / P_1 *negatief* (men heeft dan retrograde precessie).

e) *Intensiteit en polarisatie der uitgezonden spektraallijnen.*

1) Door SOMMERFELD zijn voorloopige regels opgesteld voor de intensiteit der uitgezonden spektraallijnen [1]). Deze hebben betrekking op de beweging van een elektron om een atoomkern, waarbij rekening wordt gehouden met de relativiteitskorrekties. Zijn n en n' de quantengetallen voor de azimuthale en de radiale beweging [2]), dan komt SOMMERFELD tot de resultaten:

a) Steeds geldt dat $n + n'$ afneemt bij de emissie van een spektraallijn [3]); onder normale omstandigheden neemt n' nooit toe; in sommige gevallen kan dit echter wel gebeuren, de lijnen zijn dan zwak.

b) Uit de proeven van PASCHEN [4]) is gebleken dat bij sterke ontladingen door gassen zoowel n' als n kan toenemen. In dit geval kan men bij benadering de intensiteit van elke lijn voorstellen door het produkt van twee getallen, waarvan het eene betrekking heeft op de beginbaan, het andere op de eindbaan:

$$I = W_1 \,.\, W_2 .$$

Hier is W_1 een funktie der quantengetallen n_1, n'_1 van de beginbaan, W_2 een funktie van de quantengetallen n_2, n'_2 van de eindbaan. Vergelijkt men de lijnen die ontstaan bij die overgangen waarvoor $n_1 + n'_1$ en $n_2 + n'_2$ beide steeds dezelfde

[1]) A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 23, 1916; Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1917, p. 83—109.

[2]) Deze quantengetallen hangen samen met de faze-integralen:

$$n\,h = \int_0^{2\pi} p_\varphi \,.\, d\varphi \quad ; \quad n'\,h = \oint p_r \,.\, dr .$$

Vergelijk verder hoofdstuk III, § 19. — Tusschen de hier ingevoerde quantengetallen n en n' eenerzijds, en de daar gebezigde n_1, n_2 anderzijds, bestaan de betrekkingen:

$$n = n_2 \quad ; \quad n = n_1 - n_2 .$$

[3]) Dit is noodzakelijk opdat de *energie afneemt* bij het overspringen van de eene beweging in de andere. (Zie de formules in § 17 en § 19, hoofdstuk III.)

[4]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **50**, p 901, 1916.

waarden hebben, dan kunnen de funkties W voorgesteld worden door:

$$W_1 = n_1/(n_1 + n'_1), \text{ enz.}$$

of een andere dergelijke uitdrukking [1]).

c) Werkt men met gelijkstroom dan schijnen andere regels te gelden [2]). — Men vergelijke verder de diskussie van de waarnemingen over het STARK-effekt, door EPSTEIN [3]) en SOMMERFELD [4]).

2) Uit hetgeen waargenomen wordt omtrent de polarisatie-toestand der lijnen bij het ZEEMAN-effekt en bij het STARK-effekt schijnt men den volgenden regel te mogen afleiden [5]):

Is n_3 het quantengetal voor de komponente van het moment van hoeveelheid van beweging volgens de richting der z-as [6]), dan zijn de uitgezonden trillingen *evenwijdig* aan deze, indien n_3 met een *even* bedrag toe- of afneemt; een verandering van n_3 met een *oneven* bedrag geeft *cirkulaire* trillingen, loodrecht op de z-as. Lichtstralen die in de + richting der z-as worden uitgezonden zijn *rechts cirkulair* gepolariseerd als n_3 *toeneemt*, *links cirkulair* als n_3 *afneemt*. [7])

Men schijnt hier te doen te hebben met een emissie van moment van hoeveelheid van beweging:

Bij de emissie van links cirkulair gepolariseerd licht is de rotatie van den elektrischen vektor volgens de elektromagnetische lichttheorie passend bij de richting van den lichtstraal; dus voor lichtstralen in de + richting der z-as uitgezonden linksom loopend (voor een waarnemer die van de zijde der pos. z-as naar het xy-vlak ziet). In dit geval neemt n_3 af, en is er dus een positief bedrag aan moment van hoeveelheid van beweging uitgestraald [8]).

[1]) Cf. A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1917, p. 104.

[2]) Idem, p. 108.

[3]) P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 514, 1916. (Zie ook beneden § 21.)

[4]) A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1917, p. 109.

[5]) A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 491, 1916, en P. S. EPSTEIN, l.c.

[6]) De z-as is genomen in de richting der magnetische of der elektrische krachtlijnen.

[7]) Vergelijk hoofdstuk III, § 20 en 21 en fig. 5 bij § 20.

[8]) Dit bedrag aan moment van hoeveelheid van beweging moet men volgens de klassieke theorie terug kunnen vinden in het elektromagnetische veld. (Zie b.v. M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität, II.)

HOOFDSTUK III.

PROBLEMEN DIE BETREKKING HEBBEN OP DE BEWEGING VAN EEN ENKEL ELEKTRON.

(QUANTENTHEORIE DER ATOMEN, BESTAANDE UIT EEN POSITIEF GELADEN KERN, WAAROMHEEN ÉÉN ELEKTRON LOOPT.)

Bij de studie der quantenbewegingen en der lichtemissie van zoo eenvoudig mogelijke atomen wordt in overeenstemming met het voorgaande aangenomen:

a) Kern en elektron mogen als puntvormig worden beschouwd;

b) De aantrekking tusschen beide is gegeven door de wet van Coulomb:

$$f = \frac{e\,E}{r^2};$$

c) Het systeem straalt geen energie uit naar het veld, zoolang het elektron een quantenbeweging uitvoert; de berekening der quantenbewegingen kan geschieden met behulp van de gewone mechanika, zonder de reaktie-krachten van het eigenveld van het elektron in rekening te brengen;

d) Bij groote snelheden is de massa van het elektron afhankelijk van de snelheid, overeenkomstig de formules der relativiteitstheorie.

§ 17. BEWEGING VAN EEN ELEKTRON OM EEN VASTSTAAND ATTRAKTIE-CENTRUM, MET VERWAARLOOZING VAN DE AFHANKELIJKHEID DER MASSA VAN DE SNELHEID.

De volgende theorie van de spektra van Waterstof en van positief geladen Helium is essentieel reeds door BOHR gegeven in zijn eerste verhandeling [1]; de hier gebruikte methode van behandelen sluit zich echter meer aan bij die van SOMMERFELD [2], om de overeenstemming met de in het voorgaande hoofdstuk gegeven regels te laten uitkomen.

De lading van het elektron zij $-e$; de massa m, welke voor de in aanmerking komende snelheden als konstant wordt beschouwd. De kern heeft de lading $+E$; aangenomen wordt dat deze stilstaat. Voert men een rechthoekig koordinatenstelsel in met de kern als oorsprong, dan is de funktie van LAGRANGE:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eE.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en die van HAMILTON:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - eE.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad . \; . \quad (2)$$

In poolkoordinaten uitgedrukt:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2.\dot{\vartheta}^2 + r^2.\sin^2\vartheta.\dot{\varphi}^2) + eE/r \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1a)$$

resp.:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + p_\vartheta^2/r^2 + p_\varphi^2/r^2\sin^2\vartheta) - eE/r \quad . \; . \; . \quad (2a)$$

A. *Afleiding der quantenformules volgens de methode der fazeintegralen.*

[1] N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 1, 487, 1913.

[2] A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 425; Ann. d. Phys. **51**, p. 1 vgl., 1916.

Vergelijk ook: P. DEBYE, Phys. Zeitschr. **17**, p. 512, 1916.

De funktie van HAMILTON (2a) laat separatie der variabelen toe; voor de momenten worden de uitdrukkingen gevonden:

$$p_\varphi = \alpha_3 \;\; ; \;\; p_\vartheta = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2\vartheta}} \;\; ;$$

$$p_r = \sqrt{2\,m\,\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2\,m\,e\,E}{r}} \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Beteekenis der 3 integratie-konstanten: $\alpha_1 =$ totale energie; $\alpha_2 =$ totaal moment van hoeveelheid van beweging; $\alpha_3 =$ de komponente hiervan met betrekking tot de as van het koordinatensysteem (z-as). α_1 moet negatief zijn opdat de baan zich niet tot in het oneindige uitstrekt.

Voor de faze-integralen vindt men:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi P_3 &= \int_0^{2\pi} p_\varphi \,.\, d\varphi = 2\pi\alpha_3 \\ 2\pi P_2 &= \int_{\leftrightarrow} p_\vartheta \,.\, d\vartheta = 2\pi(\alpha_2 - \alpha_3) \\ 2\pi P_1 &= \int_{\leftrightarrow} p_r \,.\, dr = 2\pi\left(\frac{m\,e\,E}{\sqrt{-2\,m\,\alpha_1}} - \alpha_2\right) \end{aligned}\right\} \text{[1]} \; . \; . \; (4)$$

dus:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= P_3 \\ \alpha_2 &= P_2 + |P_3| \\ \alpha_1 &= -\tfrac{1}{2}\,m\,e^2\,E^2 \,.\, (P_1 + P_2 + |P_3|)^{-2} = K(P_1\,,\,P_2\,,\,P_3) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (5)$$

De totale energie hangt dus slechts af van de *som* van P_1, P_2 en P_3. De middelbare bewegingen der korrespondeerende hoekvariabelen zijn gelijk; men heeft hier te doen met een geval van ontaarding: het systeem is *exakt periodiek*. Overeenkomstig hetgeen in hoofdstuk II, § 10 is gezegd moet men nu door een lineaire substitutie met geheele koefficienten en determinant ± 1 op een ander systeem van hoekvariabelen en bijbehoorende intensiteitskonstanten overgaan, zoodat twee der nieuwe hoekvariabelen de middelbare beweging nul hebben; men kan hiervoor nemen:

[1]) P_1 en P_2 zijn steeds positief; het teeken van P_3 hangt af van de richting der rondloopende beweging (verg. § 16, **d**). — In de formule voor de energie komt de *absolute* waarde van P_3 voor.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{Q}_1 = Q_1 & \mathbf{P}_1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ \mathbf{Q}_2 = Q_2 - Q_1 & \mathbf{P}_2 = \qquad P_2 + P_3 \ (= \alpha_2) \\ \mathbf{Q}_3 = Q_3 \mp Q_2 & \mathbf{P}_3 = \qquad\qquad P_3 \ (= \alpha_3) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$ [1])

B. *Andere methode van behandeling.*

Voordat hiermee verder wordt gegaan, zal nog een andere behandelingswijze gegeven worden, welke meer aan de methodes der astronomische mechanika herinnert, en direkt tot de **P**'s leidt [2]).

Op de in rechthoekige koordinaten geschreven funktie van Hamilton (verg. 2) wordt de kontakt-transformatie toegepast, gegeven door:

$$x = \partial W_1/\partial p_x \quad , \quad p_i = \partial W_1/\partial q_i \text{, enz.} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

waar:

$$W_1 = (p_y \sin q_3 + p_x \cos q_3)\,.\,q_1 \cos q_2 + \sqrt{p_z^2 + (p_y \cos q_3 - p_x \sin q_3)^2}\,.\,q_1 \sin q_2 \quad \ldots \quad (8)$$

Fig. 4. Elliptische beweging van een elektron.
K = atoomkern; E = elektron.
N = klimmende knoop.
P = perihelium.
$KE = q_1$; $\frown NE = q_2$; $\frown XN = q_3$.
$NP = \mathbf{Q}_2$; $\frown XN = \mathbf{Q}_3$.

De beteekenis der nieuwe variabelen q_1, q_2, q_3 is te zien uit bijgaande figuur. Beteekenis der nieuwe p's:

[1]) Men moet $\mathbf{Q}_3 = Q_3 - Q_2$, resp. $\mathbf{Q}_3 = Q_3 + Q_2$ nemen, al naar dat P_3 positief of negatief is, daar steeds voldaan moet worden aan de betrekking:

$$P_1\,dQ_1 + P_2\,dQ_2 + P_3\,dQ_3 = \mathbf{P}_1\,d\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_2\,d\mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_3\,d\mathbf{Q}_3.$$

[2]) Zie b.v. Whittaker, Anal. Dynamics, Cambr. 1917, p. 348 en 419.

$p_1 = m\dot{q}_1$;
$p_2 =$ totaal moment van hoeveelheid van beweging;
$p_3 =$ komponente hiervan om de z-as.

De funktie van Hamilton gaat over in:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2/q_1^2\right) - eE/q_1 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Daarna past men de kontakttransformatie toe:

$$\mathsf{Q}_i = \partial W_2/\partial \mathsf{P}_i \quad , \quad p_i = \partial W_2/\partial q_i \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$W_2 = \int_\xi^{q_1} d\,q_1 \sqrt{-\frac{m^2 e^2 E^2}{\mathsf{P}_1^2} + \frac{2meE}{q_1} - \frac{\mathsf{P}_2^2}{q_1^2}} + \mathsf{P}_2 q_2 + \mathsf{P}_3 q_3 \quad . (11)$$

($\xi =$ de minimumwaarde van $q_1 =$ de perihelium-afstand.)
Deze doet de funktie van Hamilton overgaan in:

$$H = \mathsf{K}(\mathsf{P}) = -\frac{m e^2 E^2}{2\,\mathsf{P}_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

De hier ingevoerde P's zijn dezelfde als boven onder **A**) zijn aangegeven (verg. (6)).

Beteekenis van $\mathsf{Q}_1\ \mathsf{Q}_2\ \mathsf{Q}_3$:

$\mathsf{Q}_1 =$ middelbare anomalie van het elektron in de baan;
$\mathsf{Q}_2 =$ lengte perihelium, gerekend vanaf de klimmende knoop;
$\mathsf{Q}_3 =$ lengte klimmende knoop, gerekend vanaf de x-as. (zie fig.)

Q_2 en Q_3 hebben de middelbare beweging *nul*: de elliptische baan staat vast in de ruimte. [1])

[1]) $\mathsf{P}_1\ \mathsf{P}_2\ \mathsf{P}_3\ \mathsf{Q}_1\ \mathsf{Q}_2\ \mathsf{Q}_3$ stemmen overeen met de elementen van Delaunay voor een planetenbaan; de rechthoekige koordinaten $x\ y\ z$ kunnen, zooals bekend is, in Fourier-reeksen naar $\mathsf{Q}_1\ \mathsf{Q}_2\ \mathsf{Q}_3$ ontwikkeld worden. Zie b.v. Charlier, Die Mechanik des Himmels I, p. 210.

Verband van de P's met de afmetingen en de stand van de baan:

Zij a de halve groote as van de ellips; ε de excentriciteit; i de helling van het baanvlak t. o. v. het xy-vlak; dan is:

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{P}_1 &= \sqrt{meEa} \\ \mathsf{P}_2 &= \sqrt{meEa(1-\varepsilon^2)} \\ \mathsf{P}_3 &= \sqrt{meEa(1-\varepsilon^2)}\,.\cos i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Dus: halve groote as: $a = \mathsf{P}_1^2/meE$
halve kleine as: $b = \mathsf{P}_1\,\mathsf{P}_2/meE$ $\quad \ldots\ldots\ldots (14)$
$b/a = \mathsf{P}_2/\mathsf{P}_1$

C. *Quantenformules.*

Volgens hetgeen in § 10 besproken is, moet nu P_1 gequantiseerd worden; stel derhalve:

$$\mathsf{P}_1 = n\,h/2\,\pi \quad \text{. . . . . (15)}$$

dan wordt de energie:

$$\alpha = -\frac{2\,\pi^2 m e^2 E^2}{n^2\,h^2} \quad \text{[1] [2] . . . . (16)}$$

Opmerking over de quantiseering van P_2 en P_3.

a) Quantiseert men P_2, dan wordt de *excentriciteit* van de baan vastgelegd; dit is gedaan door SOMMERFELD [3]). Men kan deze handelwijze rechtvaardigen door de beweging te beschouwen als ontaarding van de relativistische planetenbeweging; de formules voor de laatste vertoonen groote overeenkomst met die van het hier behandelde probleem, echter is de middelbare beweging van Q_2 niet gelijk nul, zoodat P_2 gequantiseerd *moet* worden [4]) [5]).

Gaat men evenwel uit van de beweging bij aanwezigheid van een elektrisch veld (theorie van het STARK-effekt), en laat men deze ontaarden door het elektrische veld tot nul te laten afnemen, dan komt men op een ander systeem van banen [6]).

[1]) Men kan deze uitkomst ook direkt afleiden uit de quantenformule voor exakt periodieke systemen: $2\,T/\nu = n\,h$, door T en ν in α uit te drukken.

[2]) Het is duidelijk dat in deze formule *n niet gelijk aan nul* kan zijn.

Uit form. (13), en eveneens uit (4) en (6), blijkt dat P_1 en dus n een positief getal is.

[3]) A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 436; Ann. d. Phys. **51,** p. 17, 1916.

[4]) Vergelijk § 19, bl. 100.

[5]) Stelt men $\mathsf{P}_2 = n_2 \dfrac{h}{2\pi}$, terwijl $\mathsf{P}_1 = n_1 \dfrac{h}{2\pi}$ is, dan volgt uit (14) voor de assenverhouding der ellipsen: $b/a = n_2/n_1$.

Uit (13) blijkt $\mathsf{P}_2 \leqq \mathsf{P}_1$, dus: $n_2 \leqq n_1$.

SOMMERFELD sluit de waarde $\mathsf{P}_2 = 0\,(\varepsilon = 1)$ uit; dit zou rechtlijnige banen geven, waarbij het elektron door de kern zou moeten gaan („Pendelbahnen"). Zie hierover: A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 445; Ann. d. Phys. **51,** p. 21, 1916. (Vergelijk ook: P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50,** p. 500, 1916.)

Houdt men rekening met de afhankelijkheid der massa van de snelheid, dan is de energie wel afhankelijk van de waarde van P_2 (zie § 19); de verschillende ellipsen worden „uiteengehaald". Vergelijk in verband hiermee een opmerking van SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 449, 459.

[6]) Verg. P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50,** p. 500, 1916 en **51,** p. 181, 1916.

b) $\mathsf{P}_3 / \mathsf{P}_2 = \cos i$ bepaalt de helling der baan t.o.v. het xy-vlak. Daar dit vlak echter willekeurig in de ruimte gekozen kan worden, zou het geen zin hebben door quantiseering van P_3 de hoek i vast te leggen. (Indien een uitwendig magnetisch veld aanwezig is, waarvan de krachtlijnen in de richting der z-as loopen, krijgt Q_3 een middelbare beweging (draaiing van de knoopenlijn: precessiebeweging van het baanvlak): in dit geval moet P_3 gequantiseerd worden. Cf. § 20) [1]).

Men vergelijke overigens § 13.

Het al of niet quantiseeren van P_2 en P_3 heeft echter geen invloed op de waarde van de energie, en dus ook niet op de spektraalformule.

Uit (16) volgt als formule voor het spektrum:

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \text{ [2]) } \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

D. *Diskussie der formules.*
Toepassing op Waterstof en positief geladen Helium.

Waterstof.

Een waterstof-atoom wordt beschouwd als te bestaan uit een positief geladen kern, waaromheen zich één elektron beweegt. De lading van de kern is numeriek gelijk aan die van het elektron. De formule voor de energie wordt dus:

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16a)$$

Neemt men voor de hierin voorkomende grootheden de waarden:

$$e = 4{,}774 \,.\, 10^{-10} \; E.\,S.\,E.$$
$$e/m = 5{,}31 \,.\, 10^{+17} \; E.\,S.\,E./\text{gram}$$
$$h = 6{,}57 \,.\, 10^{-27} \; \text{erg. sek.} \text{ [3])}$$

[1]) Verg. ook: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 28, 1916.
[2]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 8, 487, 1913.
[3]) Deze waarden zijn ontleend:
e en h aan R. MILLIKAN, Phys. Rev. VII, p. 219, 1916;
e/m aan een artikel van M. WOLFKE, Phys. Zeitschr. **17**, p. 199, 1916.
[Zie voor h ook bl. 31, noot 3)].

dan wordt gevonden:

voor de halve groote as van de baan: $a = 0{,}53 \,.\, 10^{-8} \,.\, n^2$ cm;

voor de energie: $\alpha = -2{,}14 \,.\, 10^{-11} \,.\, n^{-2}$ erg;

voor de spektraalformule: $\nu = 3{,}25 \,.\, 10^{15} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \ldots (18)$

In den normalen toestand kan men aannemen: $n = 1$; dus is dan de baan een ellips (vermoedelijk een cirkel) met halve groote as: $0{,}53 \,.\, 10^{-8}$ cm, wat in grootteorde overeenstemt met de waarden uit de kinetische gastheorie afgeleid voor de afmetingen der molekulen en atomen. — De arbeid, noodig om het elektron van de kern weg te halen is: $2{,}14 \,.\, 10^{-11}$ erg; hieruit volgt voor de ionisatie-spanning van waterstof:

$$2{,}14 \,.\, 10^{-11} / 4{,}774 \,.\, 10^{-10} \text{ E. S. E.} = \text{ca. } 13{,}4 \text{ Volt}$$ [1].

Experimenteel is gevonden: 11 Volt [2].

De mooiste resultaten geeft evenwel de formule voor het spektrum.

Stelt men in form. (18): $n_2 = 2$, $n_1 = 3, 4, 5,$ *enz.* dan krijgt men de bekende formule van Balmer voor het gewone spektrum van Waterstof:

$$\nu = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_1^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (18a)$$

waarin volgens de metingen R de waarde heeft:

$$1{,}097 \,.\, 10^5 \,.\, 3 \,.\, 10^{10} = 3{,}29 \,.\, 10^{15}$$ [3])

Dit resultaat, het eerste dat Bohr bereikt heeft [4]), is een der verrassendste van de quantentheorie van het atoom; aan deze theorie is het dus gelukt de konstante van Rydberg R terug te brengen tot reeds bekende fysische konstanten:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

[1]) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, p. 5, 488, 1913.

[2]) Zie: J. J. Thomson, Phil. Mag. **24**, p. 218, 1912;
J. Franck & G. Hertz, Phys. Zeitschr **17**, p. 413, 1916;
J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, p. 413, 1916.

[3]) Zie b.v. M. Konen, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, p. 78 (Braunschweig 1913).

[4]) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, p. 4, 1913.

wat tevoren nog langs geen anderen weg bereikt was [1]). Ook de quantitatieve overeenstemming is bizonder goed [2]) [3]).

Stelt men: $n_2 = 3$, $n_1 = 4, 5, \ldots$ dan krijgt men een reeks lijnen in het ultrarood, waarvan de eerste twee waargenomen zijn door PASCHEN [4]). — De reeksen voor $n_2 = 4, 5$, enz., welke nog verder in het ultrarood liggen, zijn nog niet gevonden.

$n_2 = 1$ geeft een reeks in het ultraviolet; deze was nog niet waargenomen toen BOHR zijn theorie publiceerde [5]). Twee lijnen ervan ($n_1 = 2, 3$) zijn kort daarop gevonden door LYMAN [6]).

In verband met het bovenstaande kan nog het volgende opgemerkt worden:

1) Bij proeven met vakuumbuizen heeft men nooit meer dan 13 lijnen van de BALMER-reeks gevonden; daarentegen vond men in de spektra van sommige nevelvlekken 29 of 33 lijnen [7]). Volgens de theorie van BOHR is de diameter der baan voor $n = 15 : 2{,}4 \,.\, 10^{-6}$ cm, wat de gemiddelde afstand der molekulen is bij een gasdruk van 1 à 2 mm kwik; voor $n = 35$ is de diameter: $13 \,.\, 10^{-6}$ cm, de gemiddelde afstand bij ca. 0,01 mm kwikdruk. Bij proeven met vakuumbuizen kan

[1]) Verschillende methodes ter afleiding der formule van BALMER zijn voorgesteld door W. RITZ; zie: Oeuvres, p. 1 vgl. (Inaug.-Diss. Gött.); p. 91, 95, 98, 175. RITZ maakt in geen van zijn afleidingen gebruik van quantenonderstellingen. — Door F. HASENÖHRL (Phys. Zeitschr. **12,** p. 931, 1911) is een afleiding gegeven welke hiervan wel gebruik maakt; HASENÖHRL heeft echter niet de tweede quantenhypothese over de emissie van lichttrillingen, en identifieert de frequenties van de BALMER-reeks met frequenties van elektronenbewegingen in het atoom.

[2]) In de formule komt e in de 4e, h in de 3e macht voor; ze is dus zeer gevoelig voor kleine fouten in deze grootheden. Voor een goede beoordeeling der overeenstemming is het noodig rekening te houden met den invloed van de beweging van de kern en met de relativistische korrekties. Zie hiervoor: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 90, 1916 en F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **50,** p. 901, 1916.

[3]) Vergelijk ook een opmerking van WOLFKE, Phys. Zeitschr. **17,** p. 198, 1916.

[4]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **27,** p. 565, 1908.

[5]) N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 9, 1913.

Beide reeksen waren reeds vermoed door W. RITZ op grond van zijn kombinatieprincipe. Zie: W. RITZ, Oeuvres, p. 141 (Phys. Zeitschr. **9,** p. 521, 1908).

[6]) TH. LYMAN, Nature **93,** p. 241, 1914.

[7]) H. KAYSER, Handbuch der Spektroskopie (Leipzig 1910) V, p. 482, 483.

men het gas niet voldoende verdund nemen, om meer dan de 15e baan toe te laten; bij grootere verdunningen, welke noodig zijn om grootere banen en dus meer lijnen te verkrijgen, is het spektrum te lichtzwak [1]).

2) *Absorbtie-spektrum van waterstofgas.*

Om licht van de golflengte eener lijn van de BALMER-reeks te absorbeeren moet de waterstof in den toestand zijn waarin ze zelf deze lijnen uitzendt [2]). Dit is in overeenstemming met de theorie van BOHR: om de BALMER-frequenties te absorbeeren moeten in het gas atomen aanwezig zijn, waarin het elektron op de 2e baan loopt. Deze komen onder normale omstandigheden niet voor: vooreerst zijn dan bijna alle *H*-atomen tot molekulen vereenigd, en ten tweede bevinden zich in de meeste losse atomen de elektronen op de binnenste baan [3]) [4]).

3) STARK heeft een onderzoek ingesteld naar den *tijdsduur* van de emissie van het licht der verschillende spektraallijnen bij *H*, *He* en andere elementen [5]), en komt tot de konklusie dat deze tijdsduur stijgt met het rangnummer van de lijn in de reeks. M. a. w.: hoe verder beginbaan en eindbaan uiteenliggen, des te langer duurt de emissie. (Als schatting van een bovenste grens voor de emissieduur geeft STARK ca. 4.10^{-7} sek.)

4) Volgens STARK worden de bovenvermelde reeksen uitgezonden door het positieve waterstof-ion (H^+) [6]). STARK besluit dit uit het optreden van het DOPPLER-effekt bij deze lijnen in het spektrum der kanaalstralen van waterstof, terwijl hij vaststelt dat de drager de massa heeft van het waterstof-atoom. De dragers van deze lijnen moeten dus een groote snelheid verkregen hebben. Om dit te verklaren moet men aannemen dat ze zich

[1]) Dit is opgemerkt door N. BOHR, l. c. p. 9.

[2]) Zie: H. KAYSER, l. c. p. 486; M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe (Braunschweig 1913), p. 295.

[3]) N. BOHR, l. c. p. 16.

[4]) Over de statistische verdeeling der elektronen over de verschillende ringen zie: K. F. HERZFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 261, 1916.

Cf. beneden: hoofdstuk VI, § 42.

[5]) J. STARK, Ann. d. Phys. **49**, p. 731, 1916.

Men vergelijke ook een artikel van L. VEGARD, Ann. d. Phys. **52**, p. 72, vgl., 1917 (speciaal p. 90—93).

[6]) J. STARK, Ann. d. Phys. **49**, p. 179, 1916;
50, p. 61, 1916;
52, p. 251, 1916.

als positieve ionen in het elektrische veld tusschen kathode en anode bevonden, en daar sterk versneld werden. Met de theorie van BOHR zou dit in overeenstemming gebracht kunnen worden. door te veronderstellen dat deze ionen dan onderweg een elektron opvangen. Dit elektron zal eerst in een der buitenste banen komen (de hierbij vrijkomende energie is zeer gering, en zou lijnen ver in het ultrarood geven); daarna valt het van deze baan op een die meer naar binnen ligt, b.v. de 1e, 2e of 3e waarbij een der lijnen van bovengenoemde reeksen wordt uitgezonden [1]) [2])

5) Van de spektra van waterstof blijven nog onverklaard:

a) het z.g. witte of veellijnen-spektrum;

b) de beide spektra van SCHUMANN in het ultra-violet;

c) de bandenspektra (twijfelachtig?) [3]).

STARK schrijft a) toe aan het H_2^+-ion [4]); verder behooren volgens hem: b) gedeeltelijk aan het neutrale H-atoom, gedeeltelijk aan het neutrale H_2-molekuul; c) aan de „quantenparen": H^+-ion plus neg. elektron, en H_2^+-ion plus neg. elektron [5]). Hoe dit in verband met bovenstaande theorie opgevat moet worden, is nog niet bekend.

6) Tenslotte blijven er nog eenige lijnen-reeksen over die verband houden met de reeks van BALMER, en langen tijd aan waterstof toegeschreven zijn: de z.g. 2e nevenreeks, en de beide hoofdreeksen, deels door PICKERING in het spektrum van ζ Puppis en van andere hemellichamen gevonden, deels door FOWLER bij sterke elektrische ontladingen door een mengsel van waterstof en Helium waargenomen.

Volgens de theorie van BOHR behooren deze reeksen aan *Helium*.

Helium.

Men onderstelt dat een Helium-atoom bestaat uit een kern

[1]) Misschien gebeurt het terugvallen met meerdere trappen. Echter zullen slechts die overgangen waargenomen worden, welker lichtemissie binnen het onderzochte spektraalgebied valt.

[2]) Voor zoover ik kan nagaan schijnen mij de argumenten van STARK de theorie van BOHR niet te weerleggen. — In verband hiermee vergelijke men:

L. VEGARD, Über die Lichterregung bei den Kanalstrahlen, Ann. d. Phys. **52**, p. 72—100, 1917. — (Zie ook noot [1]) op bl. 91).

[3]) Zie: H. KAYSER, l. c. p. 487—492.

[4]) J. STARK, Ann. d. Phys. **51**, p. 221, 1916.

Vergelijk ook: K. GLITSCHER, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 125.

[5]) J. STARK, Ann. d. Phys. **52**, p. 253, 255, 1917.

met lading $E = 2e$, waaromheen twee elektronen loopen. Indien het atoom een der elektronen verloren heeft krijgt men het z.g. positief geladen Helium [1]); hierop kan bovenstaande theorie worden toegepast. De spektraalformule (17) wordt:

$$\nu = \frac{8\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = 4R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \quad . \ . \ . \ . \ (20)$$

$n_2 = 4$; $n_1 = 6, 8, 10$, enz. geeft een reeks welke samenvalt met de BALMER-reeks van waterstof [2]).
$n_2 = 4$; $n_1 = 5, 7, 9$, enz. geeft de reeks door PICKERING in ζ Puppis ontdekt.
$n_2 = 3$; $n_1 = 4, 5$, enz. geeft de beide z.g. „hoofdreeksen van waterstof'', door FOWLER gevonden.

Dat deze lijnen inderdaad aan Helium toebehooren is gebleken:
a) door exaktere formules te berekenen, waarin de korrektie voor het meebewegen van de kern is aangebracht, welke korrektie voor waterstof een grootere waarde heeft dan voor Helium (BOHR) en door deze formules met de gemeten golflengten te vergelijken [3]);
b) door een onderzoek van EVANS [4]), die de lijnen (3 . 4) en (4 . 5) waarnam in een buis met Helium, welke geen spoor van de waterstoflijnen gaf;
c) door het bizonder nauwkeurige onderzoek van PASCHEN [5]).

Opmerkingen.

1) Tweevoudig positief geladen **Lithium**, d. w. z. Lithium-atomen welke in plaats van 3 elektronen er slechts 1 bezitten, zouden volgens de theorie van BOHR een spektrum moeten vertoonen, gegeven door de formule:

$$\nu = \frac{18\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = 9R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \quad . \ . \ . \ (20^*).$$

[1]) De alpha-deeltjes zijn *He*-kernen die beide elektronen missen.
[2]) Zie echter § 18.
[3]) N. BOHR, Nature **92**, p. 231, 1913.
A. FOWLER, idem p. 232.
Zie beneden § 18.
[4]) EVANS, Phil. Mag. **29**, p. 284, 1915.
[5]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **50**, p. 901, 1916.

BOHR meent dat een aantal lijnen, welke in het spektrum der WOLF-RAYET-sterren (sterren van het spektraaltype 0: worden beschouwd als de heetste sterren) voorkomen, door middel van deze formule verklaard kunnen worden [1]).

2) De reeksen, die zooals de door de formule (20) voorgestelde, de konstante $4R$ bezitten, behooren tot een type, dat men in navolging van NORMAN LOCKYER met den naam: „vonk-reeksen" of „versterkte reeksen" aanduidt („*enhanced series*"). Ze komen ook bij vele andere elementen voor. — Deze reeksen onderscheiden zich van de gewone reeksen met de konstante R door de volgende bizonderheden:

a) ze treden op bij hooge temperaturen (sterke elektrische ontladingen: „condensed spark");
b) de detailstruktuur van de lijnen dezer reeksen is op 16 maal grootere schaal gebouwd dan die van de lijnen der gewone reeksen [2]).

De Lithium-reeks (20*) zal vermoedelijk eerst bij zeer sterke elektrische ontladingen optreden; ik weet niet of men dergelijke reeksen ook bij andere elementen heeft waargenomen [3]).

Spektra van andere elementen.

Bij elementen met hoogere atoomnummers zal de toestand

[1]) Zie: N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 490/491, 1913;
J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **73,** p. 382, 1913;
74, p. 119, 1913/14.

In het spektrum van de WOLF-RAYET-sterren komen voor de lijnen: (6.10), (6.13), (6.14), (4.5); de eerste drie waren reeds door NICHOLSON in een reeks van het type (20*) ondergebracht (M. N. **73,** l.c.).

In het spektrum dezer sterren komt ook voor de lijn: $He+$ (3.4); NICHOLSON merkt op dat de WOLF-RAYET-sterren sterke elektrische ladingen moeten bezitten, indien de opvatting van BOHR juist is (M. N. **74,** l.c.).

[2]) Zie de formules voor de detailstruktuur, beneden § 19; voor meer uitvoerige beschouwingen wordt verwezen naar A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 62, vgl., 1916.

[3]) J. STARK (Jahrb. Rad. u. Elektr. XIV, p. 139, vgl., 1917) vermeldt iets over Ar+++, wat in de theorie van BOHR zou overeenkomen met Ar++.

Verder zij vermeld het z.g. „super-spark-spectrum" van zuurstof, gevonden door A. FOWLER & J. BROOKSBANK (Monthly Notices **77,** p. 511, 1917), waarvan sommige lijnen ook in het spektrum der W.-R.-sterren voorkomen. Een formule voor de lijnen is echter niet medegedeeld, evenmin gegevens over de detailstruktuur.

waarin de kern alle elektronen op één na mist, praktisch nooit voorkomen, zoodat form. (17) niet toegepast kan worden.

Er zijn echter twee grensgevallen waarin deze formule approximatief geldt:

a) alle elektronen op één na bevinden zich vrij dicht om de kern; het laatste elektron beschrijft op grooten afstand banen om dit systeem. Bij benadering werkt het geheele systeem als een kern met lading $E = e$; de energie van het buitenste elektron heeft dus tennaastenbij de door (16) gegeven waarde. De termen van de spektraalformules zullen dus voor groote waarden van n tot den vorm R/n^2 moeten naderen [1]). Dit is in overeenstemming met de theorie van RYDBERG, e. a. [2]) [3]).

b) een elektron beweegt zich vlak om de kern; de andere zijn verder weg, en ongeveer symmetrisch verdeeld, zoodat ze slechts een zeer geringen invloed uitoefenen vergeleken met de sterke werking van de kern. In form. (16) is dan E ongeveer gelijk aan de werkelijke kernlading; de energie stijgt met het kwadraat hiervan, zoodat de frequenties zeer hoog worden. Bij hooge atoomnummers komt men zoo tot de formules voor de Röntgenspektra [4]).

Opmerking bij a).

Over de „versterkte" spektra („enhanced spectra") van vele elementen welke optreden bij hooge temperaturen (sterke elektrische ontladingen) zie men:

A. FOWLER, Proc. Roy. Soc. **A 90**, p. 426, 1914.
(Series Lines in Spark Spectra).

De in deze spektra voorkomende reeksen hebben de konstante $4\,R$, evenals het spektrum van pos. geladen Helium; ze moeten worden toegeschreven aan atomen die 1 elektron verloren hebben; van de overige elektronen loopt er één op betrekkelijk

[1]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 12, 1913.

[2]) Zie b.v. H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe (Braunschweig 1913).

[3]) Voor een nadere uitwerking hiervan wordt verwezen naar: A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 131, 1916. Zie ook: Hoofdstuk IV, § 28 [en 28*].

[4]) Verg. H. G. MOSELEY, Phil. Mag. **26**, p. 1032, 1913.

De theorie der Röntgenspektra (met inachtname van de relativiteitskorrekties) is uitvoerig ontwikkeld door A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 125, 1916. [Later zijn door DEBIJE en VEGARD eenigszins gewijzigde theorieën uitgewerkt; zie de in § 28 geciteerde artikelen].

grooten afstand om het atoom, terwijl de rest vrij dicht om de kern zit [1]).

[1]) Men zie ook: J. STARK, Die Träger der Spektren der chemischen Elemente, Jahrb. Rad. u. Elektr. XIV, p. 139, vgl., 1917.

Om de uitkomsten van STARK met de theorie van BOHR te vergelijken, moet men de door STARK opgegeven pos. ladingen der ionen met 1 verminderen.

§ 18. INVLOED VAN DE BEWEGING VAN DE ATOOMKERN.

In de voorgaande paragraaf is, om in het eerste overzicht de formules eenvoudiger te houden, aangenomen dat de kern van het atoom vast stond. Dit mag slechts gebeuren als de massa van de kern zeer vele malen grooter is dan die van het elektron. Bij het waterstof-atoom is de verhouding dezer massa's ca. 1850 : 1; deze verhouding is niet zoo groot dat ze bij de nauwkeurigheid der spektraalmetingen buiten rekening gelaten mag worden.

Bij de studie van den invloed der kernbeweging komen hoofdzakelijk de volgende faktoren ter sprake:

1) Kern en elektron bewegen beide om hun gemeenschappelijk zwaartepunt. De invloed hiervan is van de orde m/M (m = massa van het elektron, M = massa van de kern). Zie beneden [1].

2) Kern en elektron oefenen behalve de elektrische aantrekking, ook magnetische krachten op elkaar uit [2]. Indien men veronderstelt dat de snelheden en versnellingen zoo klein zijn dat de beweging als quasi-stationnair opgevat mag worden, kunnen de elektrische en magnetische krachten tezamen het gemakkelijkst aldus in rekening gebracht worden:

De koordinaten van het elektron zijn: x, y, z; die van de kern: X, Y, Z. Dan zijn de potentialen door de kern op de plaats van het elektron veroorzaakt:

$$\varphi = \frac{E}{r}\,;\; a_x = \frac{E\dot{X}}{rc},\; a_y = \frac{E\dot{Y}}{rc},\; a_z = \frac{E\dot{Z}}{rc}\ ^{3)}.$$

De LAGRANGE-funktie van het systeem wordt derhalve:

[1]) Vergelijk N. BOHR, Nature **92**, p. 231, 1913. — Verder: A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 440; Ann. d. Phys. **51**, ca. p. 90, 1916.

[2]) Cf. A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 467.

[3]) $r = \{ (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 \}^{1/2}$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) +$$
$$+ \frac{eE}{r}\left(1 - \frac{\dot{x}\dot{X} + \dot{y}\dot{Y} + \dot{z}\dot{Z}}{c^2}\right) \text{ [1]} \ldots\ldots (21)$$

Hieruit blijkt dat de magnetische krachten t. o. v. de elektrische van de orde $vV/c^2 = mv^2/Mc^2$ zijn (v = snelheid elektron: V = snelheid kern) [2]. Zelfs bij hooge atoomnummers (groote waarden van v) is de invloed nog zeer gering (voor nadere uitwerking zie men de noot bij deze §).

3) De retardeering der potentialen.

In het bovenstaande is gerekend alsof de elektrische en magnetische krachten zich met een oneindige snelheid voortplanten, wat echter niet het geval is. De werkingen die het elektron van de kern ondervindt en omgekeerd, zijn te danken aan de potentialen die een tijd r/c te voren zijn uitgezonden. Dit heeft o. m. ten gevolge dat de richting der elektrische aantrekking niet meer van het elektron naar de kern wijst, maar e. w. naar voren (d. w. z. naar de bewegingsrichting toe) afwijkt.

Men heeft hiermee geen rekening gehouden bij de studie der spektra. (Dit zou nog des te lastiger worden, doordat men niet met zekerheid kan aangeven tot hoever de klassieke elektronentheorie mag worden toegepast.) [3]

Beweging van kern en elektron om hun gemeenschappelijk massacentrum.

Volgens de gewone formules der mechanika is de funktie van HAMILTON voor het systeem elektron plus kern:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2M}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) - \frac{eE}{r} \, . \quad (22)$$

Door middel van een kontakttransformatie kan men op de relatieve koordinaten ξ, η, ζ van het elektron overgaan; stel hiertoe [4]:

[1]) Cf. K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. 1903, p. 127.

[2]) Men kan dit ook langs meer direkten weg aantoonen.

[3]) G. A. SCHOTT heeft in zijn berekeningen over elektronen-bewegingen de retardeering niet verwaarloosd (Zie: Electromagnetic Radiation (Cambridge 1912) b.v. p. 168, 186.)

[4]) Naar WHITTAKER, Anal. Dynamics, p. 348 (eenigszins gewijzigd).

$$\left.\begin{aligned} W &= p_\xi (x - X) + p'_\xi \frac{m\,x + M\,X}{m + M} + \text{enz.} \\ p_x &= \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad \xi = \frac{\partial W}{\partial p_\xi}\,, \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

Dan is:

$$\begin{aligned} \xi &= x - X & p_x &= + p_\xi + p'_\xi \frac{m}{m + M} \\ \xi' &= \frac{m\,x + M\,X}{m + M} & p_X &= - p_\xi + p'_\xi \frac{M}{m + M} \end{aligned} \quad \text{enz.} \ldots (24)$$

De funktie van HAMILTON wordt:

$$H = \frac{1}{2\,\mu}\,(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{M + m}\,(p'^2_\xi + p'^2_\eta + p'^2_\zeta) - \frac{e\,E}{r} \ldots (25)$$

waar:

$$\mu = {}^{m\,M}\!/_{(M + m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

p'_ξ, p'_η, p'_ζ zijn konstant: het zwaartepunt van het systeem heeft een eenparige rechtlijnige beweging. Aangenomen wordt dat het zwaartepunt in rust is, zoodat de term:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(M + m)}\,(p'^2_\xi + p'^2_\eta + p'^2_\zeta)$$

weggelaten kan worden [1]). Dan wordt de funktie van HAMILTON:

$$H = \frac{1}{2\,\mu}\,(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{e\,E}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} \ldots (25a)$$

Deze kan evenzoo verder behandeld worden als in § 17 gedaan is; men komt tenslotte tot de energie-formule:

$$\alpha = -\,\frac{2\,\pi^2\,\mu\,e^2\,E^2}{n^2\,h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Van de vroegere formule (16), bl. 82, verschilt deze slechts hierin dat de massa van het elektron m vervangen is door de grootheid μ.

De konstante van RYDBERG wordt dientengevolge:

[1]) Vergelijk in verband hiermee: § 9 en § 15, **a**).

$$R = \frac{2\,\pi^2 \mu\, e^4}{h^3} = R_\infty \frac{M}{M+m}\,,$$

waar:

$$R_\infty = \frac{2\,\pi^2\, m\, e^4}{h^3}\,.$$

Neemt men $m/M_H = 1/1850$, dan is:

$$R_H = 0{,}999460\ R_\infty$$
$$R_{He} = 0{,}999865\ R_\infty$$
$$R_{He}/R_H = 1{,}000405.$$

Experimenteel is dit schitterend bevestigd.
Zie: a) N. Bohr, Nature **92**, p. 231, 1913;
A. Fowler, „ „ p. 232, „ ;
en vooral:
b) F. Paschen, Ann. d. Phys. **50**, p. 935, 1916.

Paschen geeft op: $R_H/c = 109677{,}691 \pm 0{,}06$ [1])
$R_{He}/c = 109722{,}144 \pm 0{,}04$
$R_\infty/c = 109737{,}18 \pm 0{,}06$.

Hieruit: $m/M_H = 1/1843{,}7$
(nauwkeurig tot op ca. 2,5 $^0/_{00}$).

Noot.

Berekening van den invloed der „magnetische termen" op de energie-formule.

Als uitgangspunt dient de in verg. (21) gegeven Lagrange-funktie van het systeem elektron plus kern; hieruit leidt men af voor de funktie van Hamilton (met verwaarloozing van termen die c^4 in den noemer hebben):

$$H = \frac{1}{2\,m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2\,M}\,(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) -$$
$$- \frac{e\,E}{r}\left\{1 - \frac{p_x p_X + \cdots\cdots}{m M c^2}\right\} \quad \ldots\ldots \ (28)$$

Deze wordt op dezelfde wijze getransformeerd als boven gedaan is (verg. 24). Na de substitutie komen ξ', η', ζ' niet voor; dus zijn p'_ξ, p'_η, p'_ζ konstanten (integralen v/d beweging van het

[1]) Voor de berekening dezer getallen zijn door Paschen de gemeten golflengten op vakuum gereduceerd.

zwaartepunt). Aangenomen zal worden dat het systeem als geheel geen translatie heeft: dan zijn deze grootheden gelijk nul. De substitutie-vergelijkingen zijn dan:

$$p_x = p_\xi \quad , \quad p_X = -p_\xi \quad , \quad x - X = \xi, \text{ enz.}$$

zoodat H wordt:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{eE}{r}\left\{1 + \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{mMc^2}\right\}.$$

Uitgedrukt in poolkoordinaten (evenals bij de vroegere problemen is de baan een plat vlak, dus is het niet noodig de ϑ-koordinaat in te voeren):

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2) - \frac{eE}{r}\left\{1 + \frac{1}{mMc^2}(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2)\right\}.$$

Hierin zijn de variabelen te separeeren; met dezelfde verwaarloozingen als boven vindt men voor de faze-integralen:

$$2\pi p_\varphi = 2\pi P_2$$

$$2\pi\left\{\frac{\mu e E}{\sqrt{-2\mu\alpha_1}}\left(1 + \frac{2\alpha_1}{Mc^2}\right) - |p_\varphi| + \frac{2me^2E^2}{M|p_\varphi|c^2}\right\} = 2\pi P_1$$

De formule voor de energie wordt tenslotte:

$$\alpha_1 = \mathsf{K}(\mathsf{P}) = -\frac{\mu e^2E^2}{2\mathsf{P}_1^2} - \frac{2m^2e^4E^4}{Mc^2\mathsf{P}_1^3|\mathsf{P}_2|} + \frac{m^2e^4E^4}{Mc^2\mathsf{P}_1^4} \text{ [1]} \quad .\;.\;.\;. \quad (29)$$

waarin onmiddellijk $P_1 + |P_2| = \mathsf{P}_1$; $P_2 = \mathsf{P}_2$ gesteld is.

De extratermen zijn t. o. v. den hoofdterm van de orde van grootte:

$$\frac{me^2E^2}{Mc^2\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2} = \text{ca. } 2.10^{-8}\frac{Z}{n_1 n_2} \quad \left\{\begin{array}{l} Z = \text{atoomnummer} = E/e; \\ \mathsf{P}_1 = n_1 h/2\pi; \mathsf{P}_2 = n_2 h/2\pi \end{array}\right\}$$

[1]) Uit de verg. blijkt dat er een perihelium-beweging ter grootte van: $\dot{\mathfrak{Q}}_2 = \frac{2m^2e^4E^4}{Mc^2\mathsf{P}_1^3\mathsf{P}_2^2}$ is. A. SOMMERFELD (Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 467) geeft dezelfde waarde op, echter met het tegengestelde teeken.

§ 19. INVLOED VAN DE VERANDERLIJKHEID DER MASSA MET DE SNELHEID [1]).

Volgens de formules der relativistische mechanika is voor een bewegend massa-punt de LAGRANGE-funktie:

$$L = -m\,c^2 \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1\right] - U \quad \ldots\ldots {}^{2)} \quad (30)$$

($U =$ potentieele energie). — Beweegt een elektron zich in het veld van een vaststaande kern, dan wordt dit:

$$L = -m\,c^2 \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1\right] + \frac{e\,E}{r} \quad \ldots\ldots (30a)$$

waaruit volgt voor de funktie van HAMILTON:

$$H = +m\,c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2\,c^2}} - 1\right] - \frac{e\,E}{r} \quad \ldots (31)$$

Wil men ook de beweging van de kern in rekening brengen, dan kan volstaan worden met in formule (31) m te vervangen door μ (cf. form. 26). Hierdoor worden slechts grootheden verwaarloosd welke t. o. v. de relativistische termen van de orde van grootte m/M zijn [3]).

A. In poolkoordinaten geschreven wordt H:

$$H = m\,c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2\,c^2}\left(p_r^2 + p_\vartheta^2/r^2 + p_\varphi^2/r^2\sin^2\vartheta\right)} - 1\right] - \frac{e\,E}{r} \quad \ldots (31a)$$

[1]) Het eerst berekend door N. BOHR, Phil. Mag. **29**, p. 332, 1915. — Zie verder: A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 459; Ann. d. Phys. **51**, p. 1, 1916; en P. DEBYE, Phys. Zeitschr. **17**, p. 512, 1916.

[2]) Vergelijk § 6.

[3]) Vergelijk de noot bij deze §. — Men zie de formules gegeven door: N. BOHR, Phil. Mag. **29**, p. 332, 1915; F. PASCHEN, Ann d. Phys. **50**, p. 907, 1916; A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 91, 1916.

Daar het mogelijk is de variabelen te separeeren, kan men de quantenvoorwaarden het eenvoudigste opstellen met behulp van de methode der faze-integralen [1]); men vindt dan (verg. ook § 17, **A**):

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= \alpha_3 \\ p_\vartheta &= \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2/\sin^2\vartheta} \\ p_r &= \sqrt{-\frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2m\left(\frac{eE}{r}+\alpha_1\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{eE}{r}+\alpha_1\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Faze-integralen:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi P_3 &= 2\pi\alpha_3 \\ 2\pi P_2 &= 2\pi(\alpha_2 - |\alpha_3|) \\ 2\pi P_1 &= 2\pi\left\{\frac{eE(m+\alpha_1/c^2)}{\sqrt{-2m\alpha_1 - \alpha_1^2/c^2}} - \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{e^2E^2}{c^2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Met benadering tot op termen van de 1e orde in v^2/c^2 vindt men voor de energie:

$$\alpha_1 = -\frac{m e^2 E^2}{2(P_1+P_2+|P_3|)^2} - \frac{m e^4 E^4}{8c^2}\cdot\left[\frac{4P_1}{(P_2+|P_3|)(P_1+P_2+|P_3|)^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(P_1+P_2+|P_3|)^4}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Deze blijkt slechts van twee lineaire kombinaties met geheele koefficienten $\mathbf{P}_1 = P_1 + P_2 + |P_3|$ en $\mathbf{P}_2 = P_2 + |P_3|$ der P's af te hangen:

$$\alpha_1 = -\frac{m e^2 E^2}{2\mathbf{P}_1^2} - \frac{m e^4 E^4}{8c^2}\left[\frac{4}{\mathbf{P}_1^3\mathbf{P}_2} - \frac{3}{\mathbf{P}_1^4}\right] \quad \ldots\ldots \quad (34a)$$

B. Op analoge wijze als in § 17, **B** is gedaan kan men ook hier met behulp van kontakttransformaties de funktie van HAMILTON herleiden. Deze worden hier nog kort vermeld. In rechthoekige koordinaten is H gegeven door verg. (31); dezelfde transformatie als in § 17 (form. 7, 8) gebruikt is, doet H overgaan in:

[1]) P. DEBYE, l.c.

$$H = m c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} (p_1^2 + p_2^2/q_1^2) } - 1 \right] - \frac{e E}{q_1} \quad . \; . \; (35)$$

De tweede transformatie wordt in plaats van de door (10) en (11) gegevene:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{\partial W_2^*}{\partial \mathbf{P}_i} \quad , \quad p_i = \frac{\partial W_2^*}{\partial q_i} \text{, enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

$$W_2^* = \int_{\xi}^{q_1} d q_1 \sqrt{ - \mathbf{P}_2^2/q_1^2 + 2 m \left(\frac{e E}{q_1} + \mathbf{A} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{e E}{q_1} + \mathbf{A} \right)^2 } +$$
$$+ \mathbf{P}_2 q_2 + \mathbf{P}_3 q_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

waar **A** een afkorting is voor:

$$\mathbf{A} = - \frac{m e^2 E^2}{2 \mathbf{P}_1^2} - \frac{m e^4 E^4}{8 c^2} \left[\frac{4}{\mathbf{P}_1^3 \mathbf{P}_2} - \frac{3}{\mathbf{P}_1^4} \right] \quad . \; . \; . \; (37a)$$

Hierdoor wordt de funktie van HAMILTON:

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}) = \mathbf{A} = - \frac{m e^2 E^2}{2 \mathbf{P}_1^2} - \frac{m e^4 E^4}{8 c^2} \left[\frac{4}{\mathbf{P}_1^3 \mathbf{P}_2} - \frac{3}{\mathbf{P}_1^4} \right] = \alpha_1 \quad . \; . \; (34a)$$

evenals boven.

Beteekenis der ingevoerde hoekvariabelen:

De baan ligt in een plat vlak; ze is een ellips met perihelium-beweging.

$\mathbf{Q}_3$ = lengte van de klimmende knoop, gerekend vanaf de x-as.

$\dot{\mathbf{Q}}_3 = 0$: de knoopenlijn staat vast. De helling van het baanvlak, welke gegeven is door: $\cos i = \mathbf{P}_3 / \mathbf{P}_2$, is natuurlijk eveneens konstant.

$\mathbf{Q}_2$ = lengte van het perihelium, gerekend vanaf de klimmende knoop. Er is een perihelium-beweging ter grootte van:

$$\omega_2 = \dot{\mathbf{Q}}_2 = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}_2} = \frac{m e^4 E^4}{2 c^2 \mathbf{P}_1^3 \mathbf{P}_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38)$$

$\mathbf{Q}_1$ = middelbare anomalie t.o.v. het momentane perihelium.

C. *Quantenformules.*

Vergelijkt men het verkregen resultaat met dat van § 17, dan blijkt dat de beweging niet meer exakt periodiek is: de perio-

den der r- en der φ-beweging zijn uit elkaar gehaald; echter zijn die der φ- en der ϑ-beweging onderling gelijk gebleven. Er moeten nu twee quantenvoorwaarden ingevoerd worden:

$$\mathsf{P}_1 = n_1 \, {}^{h}\!/_{2\pi} \; ; \; \mathsf{P}_2 = n_2 \, {}^{h}\!/_{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

Daarbij is steeds: $n_1 \geqslant n_2 > 0$ [1]).

De formule voor de energie wordt dus in eerste benadering:

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{n_1^2 h^2} - \frac{2\pi^4 e^4 E^4}{h^4 c^2}\left[\frac{4}{n_1^3 n_2} - \frac{3}{n_1^4}\right] \; {}^{2)} \quad \ldots (40)$$

Voor de banen van verschillende excentriciteit die bij eenzelfde waarde van n_1 behooren zijn dus de waarden van de energie verschillend. M. a. w.: de waarde van n_2 heeft invloed op de ligging der spektraallijnen; de lijnen die volgens de formules van § 17 over elkaar zouden vallen zijn nu gesplitst. De hierdoor teweeggebrachte detailstruktuur is door SOMMERFELD zeer nauwkeurig nagegaan [3]): zijn resultaten zijn experimenteel voor een groot deel bevestigd door het reeds meermalen genoemde werk van PASCHEN [4]).

Uit de formules blijkt dat de grootte van de relativiteitskorrektie stijgt met de vierde macht van de kernlading (dus met de vierde macht van het atoomnummer). Van zeer groot belang is ze dientengevolge bij de theorie der Röntgenstralen, waar het noodig is ook de volgende termen in de berekening op te nemen.

Voor de verdere uitwerking van de theorie der detailstruktuur en voor de theorie der Röntgenspektra wordt verwezen naar het werk van A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 1 en 125, 1916. — Het is aan SOMMERFELD gelukt vele bizonderheden van de Röntgenspektra te verklaren, en voor een aantal lijnen zeer goede formules af te leiden; er blijven evenwel ook verscheidene pun-

[1]) Vergelijk bl. 82, noot [5]); P_1 en P_2 hebben hier bij benadering dezelfde beteekenis als in § 17.

SOMMERFELD schrijft: $n_2 = n$; $n_1 = n + n'$.

[2]) Voor de korrektie-termen van hoogere orde zie: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 54, vgl., 1916.

[3]) A. SOMMERFELD, l.c. p. 62, vgl.

[4]) F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **50**, p. 901, 1916.

ten onopgehelderd, welke vermoedelijk samenhangen met den invloed der omringende elektronen [1]).

Opmerkingen.

1) Met betrekking tot de z.g. „grenswaarde van het moment van hoeveelheid van beweging" $p_0 = e^2/c$ zie men:

M. PLANCK, Ann. d. Phys. **50,** p. 401—404, 1916;

A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 49, 57, 1916;

Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 131.

Door de onderzoekingen van SOMMERFELD schijnt met zekerheid vastgesteld te zijn dat de quantenformule voor het moment van hoeveelheid van beweging moet luiden: $\mathsf{P}_2 = n_2\, h/2\,\pi$ en *niet:* $\mathsf{P}_2 - p_0 = n_2\, h/2\,\pi$.

2) Over de *spiraalbanen* van een elektron om een vaststaande kern zie men:

G. H. DARWIN, Phil. Mag. **25,** p. 201, 1913;

A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 49, 1916 [2]) [3]).

SOMMERFELD vermoedt dat deze banen in verband staan met het z.g. witte of veellijnen-spektrum van waterstof. Vergelijk hierover ook: K. GLITSCHER, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 125.

3) De bovenstaande theorie van SOMMERFELD berust op de onderstelling dat de hoeveelheid van beweging van het elektron zich gedraagt volgens de formules der relativiteitstheorie, of — wat op hetzelfde neerkomt — volgens de door LORENTZ gegeven formules voor de elektromagnetische hoeveelheid van beweging van een elektron dat bij de beweging van vorm verandert [4]).

Door GLITSCHER zijn de formules voor de detailstruktuur der spektraallijnen ook berekend voor het geval dat de hoeveelheid van beweging van het elektron voldoet aan de formules

[1]) Zie in verband hiermee het in § 28 geciteerde artikel van P. DEBYE [en dat van L. VEGARD], waarin eenigszins gewijzigde opvattingen omtrent het ontstaan der Röntgenspektra ontwikkeld worden.

[2]) Voor het geval van een bewegende kern zie men de opmerkingen van A. SOMMERFELD in de Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 131.

[3]) De analoge bewegingen in de gravitatie-theorie zijn onderzocht door J. DROSTE, Diss. Leiden, bl. 28.

[4]) H. A. LORENTZ, Versl. Akad. Amst. 1904, p. 986. — Volgens de theorie van Prof. LORENTZ is het elektron in rust bolvormig; beweegt het elektron zich dan is het een rotatie-ellipsoide, afgeplat in de richting der beweging.

welke ABRAHAM heeft afgeleid voor een elektron van onveranderlijken vorm [1] [2].

De resultaten waartoe GLITSCHER komt zijn de volgende:

a) *detailstruktuur* der spektraallijnen van Waterstof, Helium, enz. De voor de splitsing dezer lijnen waargenomen grootte wordt door de formules van de theorie van BOHR en SOMMERFELD slechts dan exakt weergegeven, indien de massa van het elektron gehoorzaamt aan de formules van LORENTZ en EINSTEIN. Bij toepassing van de formules van ABRAHAM is een overeenstemming op geene wijze te verkrijgen [3].

b) *Röntgenspektra*, speciaal het z.g. L-doublet [4].

Berekent men den z.g. L-term [5], in de onderstelling dat het elektron zich gedraagt volgens de formules van ABRAHAM, dan vindt men voor den noemer $(1{,}892)^2$ in plaats van $(2{,}000)^2$, welke laatste waarde gevonden wordt met de formules van LORENTZ-EINSTEIN. Indien de noemer echter niet het kwadraat van een geheel getal is zou de geheele theorie moeten vervallen en zou men niets meer kunnen besluiten [6].

Beide gedeelten van GLITSCHER's onderzoek spreken ten gunste van de formules van LORENTZ-EINSTEIN.

Noot.

Korrektie voor het meebewegen van de kern.

a) Volgens § 18, Noot (verg. 29) is de magnetische invloed van de kernbeweging ongeveer $4\,m/M$ keer de relativ.-korrektie [7].

b) Met verwaarloozing van de „magnetische termen" wordt de funktie van HAMILTON voor het systeem elektron plus kern:

$$H = m\,c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2\,c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} - 1 \right] +$$
$$+ Mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{M^2\,c^2}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2)} - 1 \right] -$$
$$- Ec \left\{ (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 \right\}^{-1/2} \quad . \; . \; . \; . \quad (41)$$

[1]) K. GLITSCHER, Inaug.-Dissert. München, 1917.

[2]) M. ABRAHAM, Gött. Nachr. 1902, p. 20; Ann. d. Phys. **10**, p. 105, 1903.

[3]) K. GLITSCHER, l. c. p. 19.

[4]) Zie A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 125, vgl., 1916.

[5]) A. SOMMERFELD, l. c.

[6]) K. GLITSCHER, l. c. p. 30.

[7]) Vergelijk ook A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 467.

Na ontwikkeling tot op termen van de 1e orde in v^2/c^2:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2M}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) - Ee\,\{\ldots\}^{-1/2} -$$

$$- \frac{1}{8c^2}\left[\frac{1}{m^3}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^2 + \frac{1}{M^3}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2)^2\right] + \ldots \quad (41a)$$

Pas hierop de kontakttransformatie toe gegeven door de formules (23) en (24) van § 18. In de funktie van HAMILTON komen na de substitutie $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ niet voor; de korrespondeerende hoeveelheden van beweging $p'_\xi\, p'_\eta\, p'_\zeta$ zijn dus konstant (integralen van de beweging van het zwaartepunt [1])).

Aangenomen wordt dat het systeem als geheel in rust is: $p'_\xi, p'_\eta, p'_\zeta$ worden gelijk nul gesteld. Dan worden de substitutieformules:

$$p_x = p_\xi;\ p_X = -p_\xi;\ x - X = \xi, \text{ enz.}$$

zoodat de funktie van HAMILTON overgaat in:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{eE}{r} - \frac{1}{8c^2}\frac{M^3 + m^3}{M^3 m^3}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2)^2 + \ldots$$

Vervangt men dit door:

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{eE}{r} - \frac{1}{8c^2}\frac{1}{\mu^3}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2)^2 + \ldots \quad (42)$$

dan is de gemaakte fout:

$$\frac{1}{8c^2}\frac{3M^2 m + \ldots}{M^3 m^3}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2)^2$$

dus ongeveer gelijk aan $3\,m/M$ keer de relativiteitsterm.

[1]) De beweging van het zwaartepunt is niet eenparig rechtlijnig: $\dot\xi', \dot\eta', \dot\zeta'$ blijken niet alleen van $p'_\xi, p'_\eta, p'_\zeta$ af te hangen, maar ook van p_ξ, p_η, p_ζ.

§ 20. SPLITSING DER SPEKTRAALLIJNEN DOOR EEN MAGNETISCH VELD (ZEEMAN-EFFEKT) [1].

Aangenomen wordt dat de kern van het atoom vast staat, en dat de relativistische termen verwaarloosd mogen worden [2]. De krachtlijnen van het magnetische veld M zijn parallel de z-as gericht. Het veld kan beschreven worden met den vektorpotentiaal:

$$a_x = -\ {}^1/_2\, \mathsf{M}\, y\,; \quad a_y = +\ {}^1/_2\, \mathsf{M}\, x\,; \quad a_z = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

De LAGRANGE-funktie wordt dus:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\,E}{r} - \frac{e\,\mathsf{M}}{2\,c}(x\dot{y} - y\dot{x}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

de funktie van HAMILTON:

$$H = \frac{1}{2\,m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e\,E}{r} + \gamma\,(x\,p_y - y\,p_x) + \\ + \frac{m\,\gamma^2}{2}(x^2 + y^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

waar:

$$\gamma = \frac{e\,\mathsf{M}}{2\,mc}.$$

I. Indien men den term met γ^2 verwaarloost [3], en door middel van dezelfde transformaties als in § 17, **B** gebruikt zijn, de elementen van DELAUNAY voor de momentane elliptische baan invoert, gaat H over in:

$$H = \mathsf{K}\,(\mathsf{P}) = -\frac{mc^2\,E^2}{2\,\mathsf{P}_1^2} + \gamma\,\mathsf{P}_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

---

[1]) P. DEBYE, Gött. Nachr. 1916, p. 142; Phys. Zeitschr. **17**, p. 507, 1916. A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 491, 1916.

[2]) Voor de berekening met inachtname der relativistische termen zie: § 23, II.

[3]) Schatting van de orde van grootte der termen van verg. (45) voor $\mathsf{M} = 50000$ Gauss: $p^2/2\,m = m\,v^2/2 =$ ca. 10^{-11}; $e\,E/r =$ ca. 10^{-11}; $\gamma\,(x\,p_y - y\,p_x) =$ ca. 10^{-16}; $m\,\gamma^2\,(x^2 + y^2)\,/\,2 =$ ca. 10^{-20}. Hierbij is de straal v/d baan gelijk ca. 1 Å.E. genomen, wat slechts geldt voor lage rangnummers. Zie verder II.

K hangt af van twee der intensiteitskonstanten: $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_3$. $\dot{\mathbf{Q}}_3 = = \omega_3 = \partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{P}_3 = \gamma$ geeft het vooruitloopen der knoopenlijn [1]). Het magnetisch veld heeft de periode der q-beweging veranderd: deze verschilt nu van de (onderling gelijke) perioden der r- en der ϑ-beweging.

$\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_3$ moeten beide gequantiseerd worden:

$$\mathbf{P}_1 = n_1 \, h/_{2\pi} \quad ; \quad \mathbf{P}_3 = n_3 \, h/_{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Splitsing der spektraallijnen.

De energie der quantenbewegingen is gegeven door:

$$\alpha = -\frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{n_1^2 h^2} + \frac{\gamma}{2\pi} n_3 h \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

zoodat de spektraalformule wordt:

$$\nu = R \left(\frac{E}{e} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(n''_1)^2} - \frac{1}{(n'_1)^2} \right\} + \frac{\gamma}{2\pi} (n'_3 - n''_3) \ldots \quad (49)$$

De eerste term geeft de gewone lijnen van de in § 17 vermelde reeksen; de tweede term geeft bij elke lijn hiervan een reeks begeleiders, die op onderling gelijke afstanden:

$$(\Delta\nu)_{\text{norm.}} = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{e\,\mathbf{M}}{4\pi m c} \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

staan. De twee binnenste vormen met de hoofdlijn het z.g. *normale triplet*: de hier voor den afstand gevonden waarde is dezelfde als door LORENTZ is afgeleid uit de elektronentheorie [2]). — Van meerdere equidistante lijnen (wier aantal zou moeten toenemen met het rangnummer van de lijn in de reeks [3])) is echter nooit iets waargenomen, — aan den anderen kant geven de formules niets omtrent het anomale ZEEMAN-effekt, zooals dat b.v. bij de BALMER-lijnen van waterstof optreedt [4]).

[1]) De helling van het baanvlak is konstant.

[2]) H. A. LORENTZ, Theory of Electrons, p. 101. — Het is merkwaardig dat in de formules (49) en (50) h juist weggevallen is.

[3]) Volgens form. (13) § 17 is steeds $\mathbf{P}_3 \leqq \mathbf{P}_1$, en dus $n_3 \leqq n_1$.

[4]) Bij de lijnen H_α, H_β, H_γ van waterstof is waargenomen: splitsing in triplets, *grooter* dan het normale triplet, met anomale intensiteitsverdeeling en polarisatie-toestand. Bij groote veldsterkten krijgt men het normale triplet (PA-

Polarisatie-toestand der lijnen.

Volgens hetgeen in § 16, bl. 76, meegedeeld is, wordt de volgende regel aangenomen:

a) is $|n'_3 - n''_3|$ *even*, dan zijn de trillingen van het licht parallel aan de z-as (dus parallel aan de magnetische krachtlijnen);

b) is $|n'_3 - n''_3|$ *oneven*, dan zijn de trillingen cirkulair; de cirkels staan loodrecht op de z-as.

Lichtstralen die in de richting der positieve z-as worden uitgezonden (dus in de + richting der magnetische kracht) zijn *rechts* cirkulair gepolariseerd als $n'_3 - n''_3$ negatief is; *links* cirkulair in het tegenovergestelde geval (Zie fig. 5).

Voor de binnenste drie lijnen is dit in overeenstemming met de klassieke theorie.

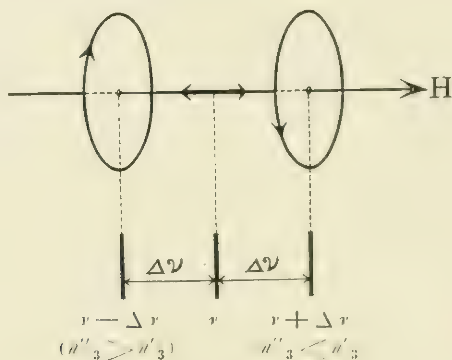


Fig. 5. Splitsing van een spektraallijn door een magnetisch veld. Normaal triplet.
De pijltjes geven de richting der lichttrillingen aan. — **H** = richting der magnetische krachtlijnen.
De spektraallijn met de grootste frequentie (in de figuur: rechts) is links cirkulair gepolariseerd.

II. Men kan zich afvragen of een betere overeenstemming te bereiken is, indien men den term met γ^2 niet verwaarloost [1]). Het blijkt dat in dit geval de quantenformules wel eenigszins

SCHEN-BACK-effekt). Vergelijk: H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe (Braunschweig 1913), p. 288 (hier is ook verdere literatuur opgegeven); en TH. V. LOHUIZEN, Arch. Musée Teyler (III) **2**, p. 165, 1914.

[1]) Vergelijk A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 503, 1916.

gewijzigd worden, doch dat de invloed op het eindresultaat (tenminste voor bijna cirkelvormige banen) gering is.

De formules die hierop betrekking hebben zullen in het kort vermeld worden.

De transformatie (7)—(8), bl. 80, doet de funktie van HAMILTON overgaan in:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) - \frac{eE}{q_1} + \gamma p_3 + \\ + \frac{m\gamma^2}{2}\, q_1^2 \left(\cos^2 q_2 + \frac{p_3^2}{p_2^2}\sin^2 q_2\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Na invoering der elementen van DELAUNAY (form. (10)—(11), § 17) wordt dit:

$$H = -\frac{m e^2 E^2}{2\mathbf{P}_1^2} + \gamma \mathbf{P}_3 + \\ + \frac{m\gamma^2}{2} \sum_{hk} \left[A_{hk}\,(\mathbf{P}_1\, \mathbf{P}_2\, \mathbf{P}_3) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (h\,\mathbf{Q}_1 + k\,\mathbf{Q}_2) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

De behandeling van deze HAMILTON'sche funktie vertoont in zooverre een moeilijkheid doordat in den hoofdterm van H de intensiteitskonstante $\mathbf{P}_2$ *niet* voorkomt, zoodat de middelbare beweging van $\mathbf{Q}_2$ in eerste benadering nul is [1]). Men moet nu de volgende substitutie uitvoeren [2]):

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{P}_1 = \tilde{\omega}_1 \;; & \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = w_1 \;; & \sqrt{2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)}\, \cos \mathbf{Q}_2 = \xi \\ \mathbf{P}_3 = \tilde{\omega}_3 \;; & \mathbf{Q}_3 = w_3 \;; & -\sqrt{2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)}\, \sin \mathbf{Q}_2 = \eta \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (53)$$

De nieuwe variabelen: w_1, ξ, w_3, $\tilde{\omega}_1$, η, $\tilde{\omega}_3$ zijn kanonisch.

De funktie van HAMILTON wordt dientengevolge:

$$H = -\frac{m e^2 E^2}{2\,\tilde{\omega}_1^2} + \gamma\, \tilde{\omega}_3 + \frac{m\gamma^2}{2} \sum_h \left[B_h\,(\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_3\, \xi\, \eta) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} h\, w_1 \right] \quad . \quad . \quad (54)$$

De koefficienten B_h kunnen ontwikkeld worden naar opklimmende machten van ξ en η [3]). — Men overtuigt zich gemakkelijk dat om de energie tot op termen van de orde van γ^2 te be-

[1]) Cf. H. POINCARÉ, Mécanique Céleste II, p. 133. Verg. ook de opmerkingen in § 13 over de behandeling van ingewikkelde systemen als storingsprobleem van een eenvoudig systeem.

[2]) Verg. H. POINCARÉ, l.c. I, p. 30; II, p. 57.

[3]) Verg. H. POINCARÉ, Mécanique Céleste I, p. 30; C. L. CHARLIER, Die Mechanik des Himmels I, p. 295.

rekenen, het voldoende is acht te geven op den term van de reeks welke onafhankelijk is van de „snelle variabele" w_1. Voor dezen term wordt gevonden:

$$\frac{m\,\gamma^2}{2} B_0 = \frac{\gamma^2\,\tilde{\omega}_1^4}{4\,m\,e^2\,E^2}\left[1 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{\tilde{\omega}_1^2} + \xi^2\,\frac{4}{\tilde{\omega}_1} + \eta^2\,\frac{5\,\tilde{\omega}_3^2 - \tilde{\omega}_1^2}{\tilde{\omega}_1^3} + \ldots\right] \quad (55)$$

waar de ontwikkeling afgebroken is bij termen van den tweeden graad in ξ en η [1]). Stelt men nu tenslotte:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \sqrt{2\,\tilde{\omega}_2/\omega}\,\cos w_2\\ \eta &= -\sqrt{2\,\tilde{\omega}_2\,\omega}\,\sin w_2\end{aligned}\right\}\ \text{waar: } \omega^2 = \frac{4\,\tilde{\omega}_1^2}{5\,\tilde{\omega}_3^2 - \tilde{\omega}_1^2}\ ^{2)} \ldots\ldots\ldots (56)$$

dan wordt de energie-formule:

$$\alpha = -\frac{m\,e^2\,E^2}{2\,\tilde{\omega}_1^2} + \gamma\,\tilde{\omega}_3 + \frac{\gamma^2\,\tilde{\omega}_1^4}{4\,m\,e^2\,E^2}\left[1 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{\tilde{\omega}_1^2} + \frac{8}{\omega}\,\frac{\tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1}\ \ldots\right] \ldots (57)$$

Nu zijn w_1, w_2, w_3 de drie hoekvariabelen; $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ de intensiteitskonstanten, die gequantiseerd moeten worden. Berekent men de orde van grootte der drie termen van α, dan wordt gevonden:

eerste term = ca. $10^{-11}/n_1^2$ erg;
tweede term = ca. $10^{-16}/n_3$ erg;
derde term = ca. $10^{-21}\,.\,n_1^4$ erg.

De derde term heeft dus een zeer geringen invloed op de eerste lijnen der BALMER-reeks, waar n_1 klein is; voor grootere waarden, b.v. $n_1 = 12$ komt deze term echter in aanmerking [3]) [4]).

[1]) Deze ontwikkeling geldt dus slechts voor kleine waarden van $\frac{P_1 - P_2}{P_1}$, d. w. z. voor banen van kleine excentriciteit ($\varepsilon^2 = (\xi^2 + \eta^2)/\tilde{\omega}_1$). — (Dan moet ook zijn: $\tilde{\omega}_2 << \tilde{\omega}_1$).

[2]) Aangenomen wordt dat $5\,\tilde{\omega}_3^2 - \tilde{\omega}_1^2 > 0$ is (helling van het baanvlak kleiner dan ca. 63°). Ik heb niet nagegaan hoe de invloed wordt bij grootere hellingen.

[3]) K. HERZFELD komt in zijn theorie van het ZEEMAN-effekt bij het atoommodel van BOHR (zie opm. 3 beneden) voor cirkelvormige banen tot bijna hetzelfde resultaat (er is slechts een verschil van een getallenfaktor 2 of 4). Daar bij HERZFELD de ligging van de baan in de ruimte niet bepaald is, krijgt hij een verbreeding der lijnen; dit treedt volgens bovenstaande theorie niet op: hier is de ligging van de baan vastgelegd door:

$$\cos i = \text{ca. } \tilde{\omega}_3/\tilde{\omega}_1 = n_3/n_1$$

bij nagenoeg cirkelvormige banen (bij niet cirkelvormige banen komt ook $\tilde{\omega}_2$ in de formule voor).

[4]) Indien men zich beperkt tot banen in een plat vlak, loodrecht op de mag-

III. *Opmerking over den invloed van het magnetisch veld op de beweging van een anisotroop gebonden elektron.*

Aangenomen wordt dat een elektron zich beweegt in een anisotroop krachtveld (b.v. het veld van een willekeurig asymmetrisch molekuul, dat niet roteert); dan luidt de funktie van Hamilton in poolkoordinaten uitgedrukt (de z-as van het systeem is in de richting van het magnetisch veld gedacht):

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\vartheta^2/r^2 + p_\varphi^2/r^2 \sin^2\vartheta\right) + V(r, \vartheta, \varphi) + \gamma\, p_\varphi = \, . \, . \quad (59)$$

$$= H_0 + \gamma\, p_\varphi \quad \ldots \quad (59a)$$

Ondersteld wordt dat van het door H_0 gekarakteriseerde probleem (magnetisch veld afwezig) een oplossing bekend is, en dat voor deze oplossing de koordinaten en momenten uitgedrukt kunnen worden met behulp van drie hoekvariabelen $Q_1\ Q_2\ Q_3$ en de korrespondeerende intensiteitskonstanten $P_1\ P_2\ P_3$. Verder wordt nog ondersteld dat tusschen de middelbare bewegingen der drie hoekvariabelen geen rationale betrekkingen bestaan.

In het bizonder zij de uitdrukking voor p_φ:

$$p_\varphi = \Phi_0 (P_1\, P_2\, P_3) +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{*} \left[\Phi_{m_1\, m_2\, m_3} (P_1\, P_2\, P_3) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m_1\, Q_1 + m_2\, Q_2 + m_3\, Q_3) \right] {}^{1)} \quad . \ (60)$$

Om nu oplossingen voor de door het magnetisch veld gestoorde beweging te vinden, substitueert men de uitdrukkingen voor: $r\ \vartheta\ \varphi\ p_r\ p_\vartheta\ p_\varphi$ in (59a), waardoor deze overgaat in:

$$H = K(P) = \alpha_0 (P_1\, P_2\, P_3) + \gamma\, \Phi_0 (P_1\, P_2\, P_3) +$$

$$+ \gamma \sum{}^{*} \left[\Phi_{m_1\, m_2\, m_3} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (-) \right] \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

netische krachtlijnen, kan het probleem iets eenvoudiger behandeld worden; in poolkoordinaten geschreven is in dit geval de funktie van Hamilton:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{e\,E}{r} + \gamma\, p_\varphi + \frac{m\,\gamma^2}{2}\, r^2 \quad \ldots \ (58)$$

Hierin zijn de variabelen te separeeren, zoodat men de faze-integralen kan berekenen.

[1]) Met $\sum^*$ is bedoeld: sommatie over alle waarden der m's, met uitzondering van den term waarin alle drie m's *gelijktijdig nul* zijn.

Deze funktie van HAMILTON kan behandeld worden volgens de methode van DELAUNAY [1]); met beperking tot op termen van de eerste orde in γ vindt men voor de oplossing:

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \mathbf{P}_i + \gamma \sum{}^* \left[\gamma_{m_1\, m_2\, m_3} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (m_1 \mathbf{Q}_1 + m_2 \mathbf{Q}_2 + m_3 \mathbf{Q}_3) \right] \\ Q_i &= \mathbf{Q}_i + \gamma \sum{}^* \left[\delta_{m_1\, m_2\, m_3} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (\text{————————}) \right] \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Hierin zijn $\mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2\ \mathbf{Q}_3$ nieuwe hoekvariabelen, en $\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3$ de er bij behoorende kanonische momenten [2]). Voor de energie wordt gevonden:

$$\alpha = \mathbf{K}(\ ) = \alpha_0 (\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3) + \gamma\, \Phi_0 (\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3) \quad . \ . \ . \ (63)$$

of als funktie der drie quantengetallen geschreven:

$$\alpha = \alpha_0 (n_1\, n_2\, n_3) + \gamma\, \Phi_0 (n_1\, n_2\, n_3) \quad \dots \dots \dots \ (63a)$$

Hieruit volgt voor de spektraalformule:

$$\nu = \frac{\alpha_0 (n'_1\, n'_2\, n'_3) - \alpha_0 (n''_1\, n''_2\, n''_3)}{h} + \gamma \frac{\Phi_0 (n'_1\, n'_2\, n'_3) - \Phi_0 (n''_1\, n''_2\, n''_3)}{h} =$$

$$= \nu_0 + \frac{\gamma}{h} (\Phi'_0 - \Phi''_0) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (64)$$

Diskussie van formule (64).

Uit formule (64) zou men besluiten dat elke spektraallijn door het magnetisch veld verschoven wordt over een bedrag:

$$\Delta\nu = \frac{\gamma}{h} (\Phi'_0 - \Phi''_0) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (64a)$$

Dit bedrag is dus afhankelijk van de gemiddelde waarde Φ_0 van het moment van hoeveelheid van beweging p_φ in de beide bewegingstoestanden [3]).

Nu is echter duidelijk dat indien men alle bewegingen in het *ongestoorde* probleem omkeert, de waarde van de energie α_0 dezelfde blijft, terwijl daarentegen het teeken van het moment

[1]) Zie b.v. E. T. WHITTAKER, Analytical Dynamics (Cambr. 1917) p. 420.

[2]) In het gestoorde probleem zijn $\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3$ konstanten, en zijn $\mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2\ \mathbf{Q}_3$ lineaire funkties van t. — $\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3$ moeten gequantiseerd worden.

[3]) Indien de gemiddelde waarde van het moment van hoeveelheid van beweging nul is, geeft het magn. veld in eerste benadering geen verschuiving. Dit is b.v. het geval bij de beweging in een anisotroop quasi-elastisch krachtveld.

van hoeveelheid van beweging omkeert. In het gestoorde probleem zal voor deze bewegingen de energie (volgens formule 63 en 63a) in tegengestelden zin veranderen. In het algemeen zal dus elke oorspronkelijke term van de spektraalformules twee termen opleveren. Elke spektraallijn kan dus in het algemeen in een quadruplet gesplitst worden.

Deze splitsing moet het meest algemeene geval zijn. (Om splitsing in meerdere komponenten te krijgen, zouden er verschillende quantenbewegingen moeten bestaan, waarvoor α_0 dezelfde waarde heeft, doch Φ_0 verschillende waarden [1]). Voor $\gamma = 0$ geven deze bewegingen aanleiding tot emissie van dezelfde spektraallijn ν_0, doch bij aanwezigheid van een magnetisch veld worden ze uiteengehaald.)

IV. De invloed van de beweging van de kern van het atoom op de splitsing der spektraallijnen heb ik niet nagegaan.

(Daar E/M voor de kern een geheel andere waarde heeft dan e/m voor het elektron, ondergaat de beweging van de kern een andere beïnvloeding door het magnetisch veld dan die van het elektron).

Verdere opmerkingen.

1) Uit het bovenstaande blijkt dat de invloed van een magnetisch veld op de emissie van de spektraallijnen door de formules der quantentheorie slechts onvolkomen wordt verklaard. Omtrent het PASCHEN-BACK-effekt geven de formules niets [2]).

[2) Over den invloed van een magnetisch veld op atomen met meerdere elektronen vergelijke men § 28*, **3.**]

3) Vóór DEBYE en SOMMERFELD waren reeds door BOHR en door HERZFELD theorieën over het ZEEMAN-effekt ontwikkeld [3]).

[1]) Dit was inderdaad het geval in het boven onder I behandelde probleem.

[2]) Ook van de asymmetrie, welke in sommige gevallen bij het ZEEMAN-effekt schijnt op te treden (verg. een opmerking bij H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, BRAUNSCHWEIG 1913, bl. 285) blijkt niets uit de afgeleide formules.

[3]) N. BOHR, Phil. Mag. **27**, p. 506, 1914.
K. HERZFELD, Phys. Zeitschr. **15**, p. 193, 1914.

BOHR neemt aan dat bij aanwezigheid van een magn. veld de gewone emissie-formule vervangen moet worden door:

$$\nu = \frac{\alpha' - \alpha''}{h} \pm \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Volgens deze formule zou steeds het normale triplet moeten optreden.

HERZFELD maakt van verschillende onderstellingen gebruik, en berekent het effekt zoowel voor het model van BOHR als voor dat van J. J. THOMSON en van F. HASENÖHRL [1]).

4) Over den invloed van de relativistische termen op het ZEEMAN-effekt zie men § 23, II.

5) Over den invloed van een *inwendig* magnetisch veld op de beweging der elektronen zie men: hoofdstuk IV, § 28 (bl. 159) [2]).

6) *Het inverse* ZEEMAN-*effekt*.

Op grond van de hypothese omtrent de absorptie van licht (zie bl. 35), zal het z.g. „inverse ZEEMAN-effekt" (de invloed van een magnetisch veld op een absorbtie-spektrum) geheel moeten overeenstemmen met den invloed op het emissie-spektrum, dus met het direkte ZEEMAN-effekt. (Het is mogelijk dat de kwestie van den polarisatie-toestand der lijnen hierbij nog een bizonder onderzoek verlangt.)

7) Men vergelijke ook Noot II bij § 37 over den invloed van het aanzetten van het veld op de beweging der elektronen.

[1]) F. HASENÖHRL, Phys. Zeitschr. **12**, p. 931, 1911.

[2]) Deze invloed is ter sprake gebracht door H. G. STANLEY ALLEN (Phil. Mag. **29**, p. 40, 140, 1915), welke aannam dat de kern van het atoom een magnetisch moment zou bezitten, en door A. SOMMERFELD (Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 166) bij een onderzoek over het effekt van een elektronenring dicht om de kern op de beweging van een meer naar buiten gelegen elektron.

§ 21. INVLOED VAN EEN ELEKTRISCH VELD OP DE SPEKTRAALLIJNEN (THEORIE VAN HET STARK-EFFEKT)[1].

Over de splitsing der spektraallijnen door een elektrisch veld zullen hier slechts enkele opmerkingen gemaakt worden; voor de nadere uitwerking wordt verwezen naar de oorspronkelijke artikelen van Epstein en Schwarzschild.

De behandeling van het probleem wordt het eenvoudigste als men het volgende (parabolische) koordinatenstelsel invoert: als as van het systeem (z-as) dient de richting van het elektrische veld $\mathbf{E}$; door deze as brengt men meridiaanvlakken, wier azimuth bepaald is door een hoek φ. In deze meridiaanvlakken wordt de ligging van een punt beschreven met de koordinaten ξ en η, welke met de cilinderkoordinaten z en ϱ verbonden zijn door de vergelijking:

$$\frac{1}{2}(\xi + \eta \sqrt{-1})^2 = z + \varrho \sqrt{-1}$$

Voor de funktie van Hamilton, uitgedrukt in deze koordinaten, wordt gevonden:

$$H = \frac{1}{2\,m\,(\xi^2+\eta^2)} \Big[p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\varphi^2 (\xi^{-2} + \eta^{-2}) - \\ - 4\,m\,e\,E - m\,e\,\mathbf{E}\,(\xi^4 - \eta^4) \Big] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Hierin zijn de variabelen te separeeren, zoodat men de faze-integralen kan berekenen. Epstein komt tenslotte voor de energie tot de formule:

[1]) Een voorloopige theorie is gegeven door N. Bohr, Phil. Mag. **27,** p. 506, 1914. Volledig uitgewerkt is het probleem door P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **50,** p. 489, 1916 (zie ook Ann. d. Phys. **51,** p. 183, 1916) en door K. Schwarzschild, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 556. — Men vergelijke ook een opmerking van E. Warburg, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15,** p. 1259, 1913.

$$\alpha = -\frac{m\,e^2\,E^2}{2\,(P_1 + P_2 + P_3\;)^2} - \frac{3\,\mathbf{E}}{2\,m\,E}(P_1 + P_2 + P_3\;)(P_1 - P_2) + \ldots{}^{1)} \quad (67)$$

waar:

$$2\,\pi\,P_1 = \int\limits_{\leftrightarrow} p_\xi\,d\,\xi = n_1\,h, \text{ enz.}$$

Uit de uitdrukking voor de energie komt men op de gewone manier onmiddellijk tot de spektraalformule [2]).

Voor de diskussie der formule en de vergelijking met de waarnemingen van STARK wordt verwezen naar het artikel van EPSTEIN. Hier zij slechts het volgende vermeld:

a) De theoretisch afgeleide splitsing der eerste 4 lijnen van de BALMER-reeks van waterstof blijkt bizonder goed met de experimenteel gevondene overeen te komen; ook de quantitatieve overeenstemming is zeer goed.

b) Om alle waargenomen lijnen te kunnen verklaren, moet men aannemen:

1) dat in sommige gevallen het derde quantengetal (n_3) bij het overspringen van de eene baan in de andere met 1 toeneemt;

2) dat er z.g. „Pendelbahnen" voorkomen, waarbij het elektron langs de z-as rechtlijnig heen en weer schommelt, en oneindig dicht bij de kern komt [3]).

De lijnen waarbij deze overgangen of deze banen optreden zijn evenwel zeer zwak.

c) *Polarisatie-regel.* (Vergelijk § 16, bl. 76.)

Indien bij het overspringen van de eene baan in de andere n_3 met een even bedrag verandert, zijn de uitgezonden lichttrillingen parallel aan de richting van het elektrische veld; verandert n_3 met een oneven bedrag, dan is de trillingsrichting loodrecht op de elektrische krachtlijnen.

Opmerking.

Indien men het probleem van het STARK-effekt laat ontaarden door de intensiteit van het elektrische veld tot nul te laten af-

[1]) Zie P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 508. — Ontwikkelt men tot op hoogere machten van **E**, dan komt ook P_3 afzonderlijk voor, zoodat men hier niet met een geval van ontaarding te doen heeft (cf. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 183/184, 1916).

[2]) Zie EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 509, 1916.

[3]) Vergelijk noot [5]) op bl. 82.

nemen, terwijl men voor de quantenvoorwaarden denzelfden vorm behoudt, dan blijken de hier ingevoerde intensiteitskonstanten P_1, P_2, P_3 niet in de in § 17, **A** voor de elliptische beweging ingevoerde grootheden over te gaan. Slechts is de *som* dezer drie grootheden in beide gevallen dezelfde, terwijl bovendien de P_3's met elkaar overeenstemmen, zoo men in beide gevallen dezelfde richting tot z-as gekozen heeft. [1])

Deze kwestie hangt samen met de volgende:

Men kan het STARK-effekt opvatten als een storing van de gewone KEPLER-beweging. Drukt men de funktie van HAMILTON uit in de elementen van DELAUNAY (§ 17, **B**), dan heeft ze den vorm:

$$H = -\frac{m e^2 E^2}{2\,\mathsf{P}_1^2} - \frac{\mathsf{E}\,\mathsf{P}_1^2}{m E}\sqrt{1-\mathsf{P}_3^2/\mathsf{P}_2^2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\mathsf{P}_2^2/\mathsf{P}_1^2}\,\sin \mathsf{Q}_2 + \right.$$
$$\left. + \sum_k{}^{*} B_k(\mathsf{P}_1\,\mathsf{P}_2\,\mathsf{P}_3)\sin(\mathsf{Q}_2 + k\,\mathsf{Q}_1)\right] \quad \ldots\ldots (68)$$

In den hoofdterm komt P_2 niet voor, zoodat de middelbare beweging van Q_2 in eerste benadering nul is (hetzelfde geldt voor Q_3, doch deze variabele komt niet voor in de storings-termen). Men heeft hier dus dezelfde moeilijkheid als in § 20, II. Voor banen van kleine excentriciteit en kleine helling kan men het probleem behandelen door de transformatie van POINCARÉ uit te voeren [2]):

$$\begin{aligned} \tilde\omega_1 &= \mathsf{P}_1 &&: \xi_1 = \sqrt{2(\mathsf{P}_1-\mathsf{P}_2)}\cos(\mathsf{Q}_2-\mathsf{Q}_3) &&: \xi_2 = \sqrt{2(\mathsf{P}_2-\mathsf{P}_3)}\cos\mathsf{Q}_3 \\ w_1 &= \mathsf{Q}_1-\mathsf{Q}_2+\mathsf{Q}_3 &&: \eta_1 = \sqrt{2(\mathsf{P}_1-\mathsf{P}_2)}\sin(\mathsf{Q}_2-\mathsf{Q}_3) &&: \eta_2 = \sqrt{2(\mathsf{P}_2-\mathsf{P}_3)}\sin\mathsf{Q}_3 \end{aligned}$$

waardoor H overgaat in: (de ontwikkeling is afgebroken bij termen van den tweeden graad in $\xi_1\,\eta_1\,\xi_2\,\eta_2$):

$$H = -\frac{m e^2 E^2}{2\,\tilde\omega_1^2} - \frac{\mathsf{E}\,\tilde\omega_1}{m E}\left[\frac{3}{2}(\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1) + \ldots \right.$$
$$\left. + \sum_k{}^{*} C_k(\tilde\omega_1\,\xi_1\,\eta_1\,\xi_2\,\eta_2)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} k\,w_1\right] \quad \ldots\ldots\ldots (70)$$

Om de energie tot op termen van de eerste orde in E te bepalen behoeft men slechts rekening te houden met den term van deze reeks welke w_1 niet bevat: $-\frac{\mathsf{E}\,\tilde\omega_1}{m E}\cdot\frac{3}{2}(\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1) + \ldots$

[1]) Vergelijk ook § 13, bl. 53.

[2]) H. POINCARÉ, Mécanique Céleste I, p. 30; II, p. 57.

Door de substitutie [1]):

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= +\sqrt{\tilde\omega_2}\cos w_2 + \sqrt{\tilde\omega_3}\cos w_3\\ \eta_1 &= -\sqrt{\tilde\omega_2}\sin w_2 - \sqrt{\tilde\omega_3}\sin w_3\\ \xi_2 &= -\sqrt{\tilde\omega_2}\sin w_2 + \sqrt{\tilde\omega_3}\sin w_3\\ \eta_2 &= -\sqrt{\tilde\omega_2}\cos w_2 + \sqrt{\tilde\omega_3}\cos w_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

kan men nieuwe hoekvariabelen $w_2\, w_3$ en de korrespondeerende intensiteitskonstanten $\tilde\omega_2\, \tilde\omega_3$ invoeren; hierdoor gaat H over in:

$$H = -\frac{m\, e^2\, E^2}{2\, \tilde\omega_1^2} + \frac{3}{2}\, \frac{\mathbf{E}\, \tilde\omega_1}{m\, E}\, (\tilde\omega_2 - \tilde\omega_3) + \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Quantiseert men de intensiteitskonstanten $\tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \tilde\omega_3$, dan levert deze formule hetzelfde resultaat als die van EPSTEIN. Ze is echter slechts voor banen van geringe excentriciteit en helling afgeleid, en mist dus het algemeene karakter van de formule van EPSTEIN.

[1]) H. POINCARÉ, Mécanique Céleste II, p. 42.

§ 22. OPMERKING OVER HET SPEKTRUM VAN ROTEERENDE MOLEKULEN [1]).

Indien een elektron zich beweegt in het veld van een willekeurig asymmetrisch molekuul dat om een vaste as roteert, heeft de rotatie van het molekuul op de spektraallijnen een invloed welke eenigszins te vergelijken is met die van een magnetisch veld.

De formules voor dit probleem zullen hier in 't kort weergegeven worden.

Ingevoerd worden poolkoordinaten; de as van het systeem valt samen met de rotatie-as van het molekuul. De koordinaten van het elektron zijn: r, ϑ, φ_1; de stand van het molekuul is bepaald door φ_2. De potentieele energie V van het systeem is een funktie van r, ϑ en $\varphi_1 - \varphi_2$ [2]). Stelt men:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 \,; \; \chi = \varphi_2$$

dan wordt voor de funktie van HAMILTON gevonden:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}\right) + \frac{(p_\chi - p_\psi)^2}{2A} + V(r, \vartheta, \psi) \; . \; . \quad (73)$$

Het totale moment van hoeveelheid van beweging van het systeem, p_χ, is een konstante.

Indien $p_\chi = 0$ is, wordt de beweging van het elektron bepaald door:

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}\right) + \frac{p_\psi^2}{2A} + V(r, \vartheta, \psi) \; . \; . \; . \; . \quad (73a)$$

Ondersteld wordt dat men voor het door H_0 gekarakteriseerde (het niet door de rotatie „gestoorde”) probleem een oplossing kan vinden, en dat de koordinaten en momenten uitgedrukt kunnen worden als funkties van 3 hoekvariabelen $Q_1\, Q_2\, Q_3$ en de korrespondeerende kanonische momenten $P_1\, P_2\, P_3$.

[1]) Vergelijk: J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amsterdam XXVI, p. 115, 1917.
[2]) In V moet $\varphi_1 - \varphi_2$ noodzakelijk voorkomen, daar anders de rotatie van het molekuul geen invloed kan hebben op de beweging van het elektron.

Verder wordt nog aangenomen dat tusschen de middelbare bewegingen der drie Q's geen lineaire betrekkingen bestaan.

Het „gestoorde" probleem, bepaald door de funktie (73), kan dan op dezelfde wijze behandeld worden als in § 20, III gedaan is; men komt tenslotte voor de energie tot de formule:

$$\alpha = \mathbf{K}(\mathbf{P}) = \alpha_0(\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3) - \frac{\mathbf{P}_4}{A}\,\Psi_0(\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3) + \frac{\mathbf{P}_4^2}{2A} + \ldots \quad (74)$$

Ψ_0 is de gemiddelde waarde van het moment van hoeveelheid van beweging p_ψ van het elektron. — De vierde intensiteitskonstante $\mathbf{P}_4 \,(= p_\chi)$ is het totale moment van het geheele systeem [1]).

Als funktie der quantengetallen geschreven wordt de energieformule:

$$\alpha = \alpha_0(n_1\,n_2\,n_3) - n_4\,h\,\frac{\Psi_0(n_1\,n_2\,n_3)}{2\,\pi\,A} + n_4^2\,\frac{h^2}{8\,\pi^2\,A} \quad \ldots \quad (74a)$$

Hieruit volgt voor de spektraalformule:

$$\nu = \frac{\alpha'_0 - \alpha''_0}{h} - \frac{n'_4\,\Psi'_0 - n''_4\,\Psi''_0}{2\,\pi\,A} + (n'^2_4 - n''^2_4)\,\frac{h}{8\,\pi^2\,A} \quad \ldots \quad (75)$$

$$= \nu_0 - enz. \quad \ldots \quad (75a)$$

Voor de diskussie dezer formule wordt naar het boven aangehaalde artikel verwezen. Hier worden slechts de volgende punten vermeld:

1) Is $n'_4 = n''_4 = 0$, dan is de uitgezonden frequentie:

$$\nu = \nu_0 \quad \ldots \quad (76a)$$

2) Is $n'_4 = n''_4 \gtrless 0$, dan vindt men:

$$\nu = \nu_0 - n'_4\,\frac{\Psi'_0 - \Psi''_0}{2\,\pi\,A} \quad \ldots \quad (76b)$$

De oorspronkelijke lijn ν_0 wordt dus naar weerszijden begeleid door equidistante satellieten. Dergelijke systemen zijn waargenomen in de absorbtiebanden van sommige gassen, b.v. waterdamp [2]).

3) Is $n'_4 \gtrless n''_4$, zoodat men de algemeene formule (75a) houdt,

[1]) Vergelijk bl. 60, opmerking 1 [en bl. 71].

[2]) Zie o.m. EVA VON BAHR, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, p. 780, 1150, 1913; H. RUBENS & G. HETTNER, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 167, 1916.

Voor de struktuur dezer absorbtiebanden is het eerst door N. BJERRUM een theorie opgesteld (Nernst-Festschrift, p. 93, 1912); BJERRUM nam hierbij aan dat het molekuul een trillende resonator droeg, welke het licht uitzond. — Zie in verband hiermee het geciteerde artikel van BURGERS. [Vergelijk ook beneden opmerking 4.]

dan blijkt elke lijn ν_0 een tweevoudig oneindig stel satellieten te bezitten, waarvan de afstanden gegeven zijn door een kwadratische formule. Deze formule stemt in vorm overeen met die welke door DESLANDRES en anderen voor de bandenspektra opgesteld zijn [1]). Een dergelijke formule is het eerst door SCHWARZSCHILD uit de quantentheorie afgeleid [2]); deze heeft er ook op gewezen dat indien men uit de koefficient van $(n'^2_4 - n''^2_4)$ het traagheidsmoment A van het molekuul berekent, de gevonden waarden van de goede orde van grootte zijn.

Opmerkingen.

1) Het zou zeer wenschelijk zijn dat het probleem van den invloed der rotatie van een molekuul algemeener behandeld werd door rekening te houden met de precessiebeweging van het molekuul.

2) Het is niet onmogelijk dat een onderzoek over den gelijktijdigen invloed van de rotatie van het molekuul en van een uitwendig magnetisch veld iets zou kunnen leeren over het ZEEMAN-effekt in bandenspektra, vooral indien men de rotaties niet beperkt tot die om een vaste as.

3) De „edele" gassen (*He, Ar, Ne, Kr, Xe*) hebben *geen* bandenspektra (cf. H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe). Deze gassen zijn steeds eenatomig, en komen nooit in verbindingen voor, zoodat men hier geen asymmetrische molekulen kan krijgen.

[4) Boven is opgemerkt en in het geciteerde artikel in de Versl. Akad. Amst. is dit nader uiteengezet, dat de afgeleide formule o.a. zou kunnen dienen ter verklaring van de struktuur der absorbtiebanden bij verschillende gassen in het ultrarood waargenomen. Bij nader inzien schijnt mij evenwel een groot bezwaar hiertegen te bestaan: daar de spektraallijnen het resultaat zijn van het overspringen van een elektron uit de eene baan in een andere, zullen de frequenties ν_0 in het algemeen

[1]) Zie b.v. H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913, p. 214.

[2]) K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 566, 1916. SCHWARZSCHILD neemt echter aan dat de rotatie van het molekuul geen invloed op de beweging van het elektron uitoefent, wat in het bovenstaande een noodzakelijke onderstelling was. In de formule van SCHWARZSCHILD ontbreken daardoor de termen lineair in n'_4 en n''_4.

liggen in het zichtbare en ultraviolette spektrum, of in het ultrarood van *kleine* golflengte. Dit blijkt o.a. ook uit de als voorbeeld gegeven formule in het artikel in de Versl. Akad. Amst. (p. 122):

$$\nu_1 = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \left(\frac{1}{n_1''^2} - \frac{1}{n_1'^2} + \ldots\right) + \frac{2 n_3 n_4 h}{4\pi^2 A} =$$

$$= N\left(\frac{E}{e}\right)^2 \left(\frac{1}{n_1''^2} - \frac{1}{n_1'^2}\right) + \text{enz.}$$

waar N de konstante van RYDBERG is. Neemt men E zoo klein mogelijk, dus gelijk aan e, dan stemt de hoofdterm overeen met de formule van BALMER voor waterstof. — De waargenomen absorbtiebanden hebben echter *groote* golflengten:

H_2O		6,26 μ
HCl	ca.	3,5 μ
HBr	ca.	3,9 μ

In de theorie van BJERRUM werd de frequentie welke bij het midden van de band behoort toegeschreven aan de trillingen van tegengesteld elektrisch geladen atomen; tengevolge van de groote massa's der atomen zijn deze trillingen zooveel langzamer dan elektronenbewegingen. — In verband hiermee is het niet onaardig nog de volgende punten te vermelden:

a) Tweeatomige elementgassen (H_2, O_2, N_2, Cl_2, Br_2, enz.) hebben dergelijke absorbtiebanden niet [1]); de banden zijn dus gebonden aan de aanwezigheid van ongelijksoortige atomen in het molekuul. [2])

b) BRINSMADE en KEMBLE hebben „harmonische boventonen" dezer frequenties gevonden bij sommige gassen [3]); b.v.:

CO	: primaire band : maxima bij	4,60 μ en	4,72 μ
	„oktaaf"	2,36 μ	2,39 μ
HCl	: primaire band	3,394 μ	3,557 μ
	„oktaaf"	1,742 μ	1,783 μ

Voor bizonderheden (o.a. het dichter bijeen liggen van de

[1]) W. C. MANDERSLOOT, Ann. d. Phys. **49**, p. 730, 1916.

[2]) Men vergelijke hiermee het feit dat eenatomige kristallen, zooals Diamant, geen reststralen geven, wel daarentegen $NaCl$, KCl, enz.

[3]) J. B. BRINSMADE & E. C. KEMBLE, Proc. Nat. Acad. Sciences **3**, p. 420, 1917; E. C. KEMBLE, Phys. Rev. VIII, p. 701, 1916.

maxima in de sekundaire band) vergelijke men de geciteerde artikelen.

Het is me niet gelukt een quantentheoretisch model te vinden dat deze banden op de goede plaats geeft. Men zou natuurlijk het eerst denken aan een tweeatomig molekuul, waarvan de atomen volgens hun verbindingslijn kunnen trillen, terwijl het geheel een rotatie uitvoert, juist zooals in de theorie van BJERRUM. Men kan dan zoowel de trillingen als de rotatie quantiseeren; beide bewegingen zijn geheel onafhankelijk van elkaar, en de formule voor de energie wordt: [1])

$$\alpha = n_1 h \nu_1 + \frac{n_2^2 h^2}{8 \pi^2 A} \;{}^{2})$$

Hieruit volgt de spektraalformule:

$$\nu = (n_1' - n_1'') \nu_1 + \frac{(n_2'^2 - n_2''^2) h}{8 \pi^2 A}$$

De eerste term geeft het centrum van de band, en de boventonen; de tweede, van de rotatie afkomstige, term kan echter *geen volledig stel* equidistante satellieten geven: stelt men $\frac{h}{8 \pi^2 A} = d$, dan zijn de waarden van $\frac{\Delta \nu}{d}$:

$$\frac{\Delta \nu}{d} = 0,\ 1,\ *,\ 3,\ 4,\ 5,\ *,\ 7,\ 8,\ 9, \ldots$$

hierin *ontbreken*: 2, 6, ...

Het boven besproken model schijnt me daarentegen wel geschikt voor de theorie van de bandenspektra.]

[1]) Deze quantiseering is reeds aangegeven door E. C. KEMBLE, Phys. Rev. VIII, p. 701, 1916. KEMBLE onderstelt echter dat de absorbtie van lichttrillingen op de klassieke wijze geschiedt (evenals in de tweede quantentheorie van PLANCK).

[2]) Daar het traagheidsmoment van het molekuul om de figuuras gelijk nul gesteld mag worden, heeft men slechts te doen met rotaties om een dwarsas; het moment van hoeveelheid van beweging hiervoor is gelijk aan: $n_2 h/2\pi$, zoodat de energie van de rotatie is:

$$\alpha_R = \frac{n_2^2 h^2}{8 \pi^2 A}.$$

(A = traagheidsmoment van het molekuul om de dwarsas.)

§ 23. ENKELE OPMERKINGEN OVER KOMBINATIES VAN VERSCHILLENDE STORINGEN (ZEEMAN-EFFEKT MET INACHTNAME DER RELATIVISTISCHE KORREKTIES, e. d.).

I. Uit het voorgaande is gebleken dat men bij de gewone elliptische beweging van een elektron om een atoomkern te doen heeft met een geval van ontaarding: er is slechts 1 grondfrequentie, zoodat ook slechts 1 quantenvoorwaarde kan worden ingevoerd, ofschoon het probleem drie vrijheidsgraden bezit.

Indien deze beweging gestoord wordt, b.v. door de veranderlijkheid der massa, de invloed van een magnetisch of elektrisch veld, enz., zoodat de exakte periodiciteit verdwijnt, moet men meerdere quantenvoorwaarden invoeren (zooveel als het aantal der grondfrequenties bedraagt), waarbij de nieuw ingevoerde quantenvoorwaarden bij de verschillende problemen in het algemeen geheel anders zullen zijn. Men vergelijke de opmerkingen in § 13. De quantenvoorwaarden voor de verschillende gestoorde problemen gaan dus niet in elkaar over, wanneer men de storingsfunkties tot nul laat naderen.

Interessant is het nu na te gaan wat de quantenvoorwaarden worden, indien meerdere storende invloeden gelijktijdig werkzaam zijn; het is te verwachten dat men dan in het algemeen geen eenvoudige superpositie dezer effekten zal krijgen. — Het blijkt dat men bij dergelijke problemen tot quantenformules komt, die overgangen vormen tusschen de formules voor „enkelvoudig gestoorde" systemen.

Het berekenen dezer formules is bij het atoommodel van waterstof nogal bewerkelijk, en ik kan dan ook slechts enkele aanwijzingen erover geven. Ter illustratie zij hier echter een probleem ingelascht dat gemakkelijk te behandelen is, en waarop ik gekomen ben door een opmerking van Prof. EHRENFEST [1]).

[1]) Cf. P. EHRENFEST, Versl. Akad. Amst. XXV, p. 426 of 427, 1916; Ann. d. Phys. **51**, p. 343, 1916.

Hierin is het krachtveld van de atoomkern vervangen door een isotroop quasi-elastisch krachtveld, terwijl ter vereenvoudiging de beweging tot twee vrijheidsgraden wordt beperkt. De beweging is hier eveneens exakt periodiek, en de eenige quantenvoorwaarde luidt:

$$\overline{2\,T}/\nu = n\,h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Men kan de periodiciteit storen:

a) door het veld *anisotroop* te maken; dan moeten de beide hoofdtrillingen afzonderlijk gequantiseerd worden.

b) door loodrecht op het vlak der beweging een magnetisch veld aan te brengen; in dit geval zijn de quantenvoorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{moment v. hoev. v. beweging} = n_2 \dfrac{h}{2\pi} \\ \oint p_r\, dr = n_1\, h \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

[1]) [2])

Indien beide storende invloeden tegelijk aanwezig zijn, is de funktie van HAMILTON (ter vereenvoudiging is de massa $m = 1$ gesteld):

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \gamma\left(p_y\, x - p_x\, y\right) + \frac{1}{2}\left(\varkappa + \gamma^2\right) x^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\lambda + \gamma^2\right) y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

De oplossing luidt, uitgedrukt met behulp van twee hoekvariabelen:

$$Q_1 = \omega_1\, t + \varepsilon_1 \;;\; Q_2 = \omega_2\, t + \varepsilon_2\,,$$

waar $\pm\, i\,\omega_1$, $\pm\, i\,\omega_2$ de wortels zijn van de vergelijking:

$$\omega^4 + \omega^2\left(\varkappa + \lambda + 4\,\gamma^2\right) + \varkappa\,\lambda = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = c_1 \cos Q_1 + c_2\, \dfrac{\lambda - \omega_2^2}{2\,\gamma\,\omega_2} \sin Q_2 \\ y = c_2 \cos Q_2 - c_1\, \dfrac{\varkappa - \omega_1^2}{2\,\gamma\,\omega_1} \sin Q_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

[1]) Verg. EHRENFEST, l.c.

[2]) Men zou als storing kunnen invoeren een term van den vorm: $A\,.\,r^k$ ($k > 2$ of < 0) in de potentieele energie, doch dit maakt de berekening ingewikkelder.

met analoge uitdrukkingen voor p_x en p_y (c_1 en c_2 zijn twee integratiekonstanten).

Volgens § 11 zijn de quantenvoorwaarden:

$$n_1 h = 2\pi P_1 = \int_{Q_1=0}^{Q_1=2\pi} (p_x\,dx + p_y\,dy) = $$

$$\left.\begin{aligned} &= 2\pi c_1^2 \,.\, \frac{\varkappa^2 + 4\varkappa\gamma^2 - 2\varkappa\omega_1^2 + \omega_1^4}{8\,\omega_1\,\gamma^2} \\ n_2 h = 2\pi P_2 = &= 2\pi c_2^2 \,.\, \frac{\lambda^2 + 4\lambda\gamma^2 - 2\lambda\omega_2^2 + \omega_2^4}{8\,\omega_2\,\gamma^2} \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

De energie-formule wordt:

$$\alpha = K(P) = \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83)$$

Men kan nu de volgende twee grensgevallen beschouwen:

1) Bij eindige anisotropie verdwijnt het magnetisch veld. Dan wordt:

$$x = c_1 \cos Q_1 \;;\; y = c_2 \cos Q_2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\varkappa} \qquad P_1 = \frac{1}{2} c_1^2 \sqrt{\varkappa}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\lambda} \qquad P_2 = \frac{1}{2} c_2^2 \sqrt{\lambda}$$

De beweging is een superpositie van twee enkelvoudige harmonische trillingen, welke loodrecht op elkaar staan en elk afzonderlijk gequantiseerd zijn.

2) De anisotropie neemt tot nul af, terwijl het magnetisch veld aanwezig blijft. De beide hoofdtrillingen zijn dan cirkulair; bij Q_1 behoort de positieve trilling (linksom-loopend); bij Q_2 de negatieve (rechtsom). De formules worden:

$$x = c_1 \cos Q_1 + c_2 \sin Q_2$$

$$y = c_1 \sin Q_1 + c_2 \cos Q_2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\varkappa + \gamma^2} + \gamma = \omega_0 + \gamma \qquad P_1 = c_1^2 \sqrt{\varkappa + \gamma^2}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\varkappa + \gamma^2} - \gamma = \omega_0 - \gamma \qquad P_2 = c_2^2 \sqrt{\varkappa + \gamma^2}$$

energie $= \alpha = K(P) = \omega_0 (P_1 + P_2) + \gamma (P_1 - P_2)$.

P_1 en P_2 zijn de absolute waarden der momenten van hoeveelheid van beweging van de beide cirkulaire trillingen.

(Had men in dit laatste geval onmiddellijk poolkoordinaten ingevoerd en de faze-integralen gequantiseerd, dan was men op twee intensiteitskonstanten P_1 en P_2 gekomen, die met de boven ingevoerde samenhangen door de formules:

$$\mathsf{P}_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\leftrightarrow} p_r \, dr = \textit{de kleinste der beide grootheden } P_1, P_2 ;$$

$$\mathsf{P}_2 = \quad p_\varphi \quad = P_1 - P_2 .$$

$$\text{energie} = \alpha = \omega_0 (2 \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2) + \gamma \mathsf{P}_2 .$$

Deze beide methoden van quantiseering komen dus op hetzelfde neer.)

II. Opmerking over het ZEEMAN-effekt, berekend met inachtname der relativistische korrekties.

Vergelijk: A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 495, 1916.

In het volgende zal een berekening gegeven worden welke bruikbaar is voor groote banen, met kleine excentriciteit en kleine helling; in dit geval mag men aannemen dat de relativistische korrekties slechts tot op termen van de eerste orde, de magnetische tot op termen van de tweede orde berekend moeten worden [1]).

Indien men onderstelt dat de kern van het atoom in rust is wordt de funktie van LAGRANGE:

$$L = -mc^2 \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right] + e\varphi - \frac{e}{c} (a_x \dot{x} + a_y \dot{y} + a_z \dot{z}) \,..\, (84)$$

en de funktie van HAMILTON:

$$H = -e\varphi + mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left\{ \left(p_x + \frac{e\, a_x}{c} \right)^2 + (\,\ldots)^2 + (\,\ldots)^2 \right\}} - 1 \right] \text{[2]}) \;(85)$$

Hierin wordt gesteld:

[1]) Bij de grootere banen worden de relativiteitskorrekties kleiner, verg. A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 54, vgl., 1916, en de boven in § 19 gegeven formules; de magnetische termen der tweede orde worden grooter, zie § 20, II.

Houdt men slechts rekening met de termen v/d eerste orde in de magn veldsterkte, dan krijgt men een eenvoudige superpositie der beide effekten; verg. A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. l. c.

[2]) Deze vorm van de funktie van HAMILTON is ook gegeven door G. HERGLOTZ (zie A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. l. c. p. 498).

$$\varphi = \frac{E}{r};\ a_x = -\frac{\mathbf{M}}{2}\, y;\ a_y = +\frac{\mathbf{M}}{2}\, x;\ a_z = 0;\ \gamma = \frac{e\,\mathbf{M}}{2\,m\,c}$$

waardoor H overgaat in:

$$H = -\frac{e\,E}{r} +$$

$$+ m\,c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left\{ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2\,m\,\gamma\,(p_y x - p_x y) + m^2 \gamma^2 (x^2 + y^2) \right\}} - 1 \right] \quad (85)$$

Op deze funktie wordt de kontakttransformatie (7)—(8), § 17, toegepast, terwijl de wortelvorm tot op den boven aangegeven graad van benadering wordt ontwikkeld; men komt dan tot:

$$H = -\frac{e\,E}{q_1} + \frac{1}{2\,m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) - \frac{1}{8\,m^3\,c^2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right)^2 + \ldots$$

$$+ \gamma\,p_3 + \frac{m\,\gamma^2}{2}\, q_1^2 \left(\cos^2 q_2 + \frac{p_3^2}{p_2^2} \sin^2 q_2\right) + \ldots \quad (86)$$

Door toepassing der kontakttransformatie (36)—(37), § 19, gaat dit over in:

$$H = -\frac{m\,e^2 E^2}{2\,\mathbf{P}_1^2} - \frac{m\,e^4\,E^4}{8\,c^2}\left\{\frac{4}{\mathbf{P}_1^3\,\mathbf{P}_2} - \frac{3}{\mathbf{P}_1^4}\right\} + \gamma\,\mathbf{P}_3 + \mathfrak{S} \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

Hierin stelt $\mathfrak{S}$ voor de laatste term van verg. (86): $\frac{m\,\gamma^2\,q_1^2}{2}\left(\cos^2 q_2 + \frac{p_3^2}{p_2^2}\sin^2 q_2\right)$, ontwikkeld in een trigonometrische reeks naar de hoekvariabelen $\mathbf{Q}_1$ en $\mathbf{Q}_2$. Indien men de energie wil berekenen tot op termen van de orde van γ^2, hebben die termen van $\mathfrak{S}$ welke de „snelle variabele" $\mathbf{Q}_1$ bevatten geen invloed; de termen echter welke alleen de „langzame variabele" $\mathbf{Q}_2$ bevatten kunnen wel invloed hebben, zoo de middelbare beweging van $\mathbf{Q}_2$:

$$\dot{\mathbf{Q}}_2 = \omega_2 = \frac{m\,e^4\,E^4}{2\,c^2\,\mathbf{P}_1^3\,\mathbf{P}_2^2}$$

klein is.

De termen van $\mathfrak{S}$ welke $\mathbf{Q}_1$ niet bevatten zijn:

$$\mathrm{R} = \frac{\gamma^2\,\mathbf{P}_1^4}{4\,m\,e^2\,E^2}\left[1 + \frac{\mathbf{P}_3^2}{\mathbf{P}_2^2} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\mathbf{P}_2^2}{\mathbf{P}_1^2}\right)\left(1 + \frac{\mathbf{P}_3^2}{\mathbf{P}_2^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{\mathbf{P}_2^2}{\mathbf{P}_1^2}\right)\left(1 - \frac{\mathbf{P}_3^2}{\mathbf{P}_2^2}\right)\cos 2\,\mathbf{Q}_2 + \ldots\right] \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

(Bij deze ontwikkeling is afgezien van de relativistische korrekties daar $\mathfrak{R}$ reeds de faktor γ^2 heeft; men zou deze desgewenscht in rekening kunnen brengen, wat echter een belangrijke vergrooting van het rekenwerk zou geven.)

Men kan nu de funktie van HAMILTON transformeeren met behulp van de substitutie (53) van § 20, III; daardoor gaat ze over in:

$$H = -\frac{m\,e^2\,E^2}{2\,\tilde{\omega}_1^2} - \frac{m\,e^4\,E^4}{8\,c^2\,\tilde{\omega}_1{}^4} + \gamma\,\tilde{\omega}_3 + \frac{\gamma^2\,\tilde{\omega}_1^4}{4\,m\,e^2\,E^2}\left(1+\frac{\tilde{\omega}_3^2}{\tilde{\omega}_1^2}\right) +$$
$$+\,\xi^2\left\{\frac{\gamma^2\,\tilde{\omega}_1^3}{m\,e^2\,E^2} - \frac{m\,e^4\,E^4}{4\,c^2\,\tilde{\omega}_1^5}\right\} + \eta^2\left\{\frac{\gamma^2\,\tilde{\omega}_1\,(5\,\tilde{\omega}_3^2 - \tilde{\omega}_1^2)}{4\,m\,e^2\,E^2} - \frac{m\,e^4\,E^4}{4\,c^2\,\tilde{\omega}_1^5}\right\} + \,.\,. \quad (89)$$

Deze funktie kan verder behandeld worden op dezelfde wijze als in § 20, II is gedaan. Dit zal hier niet worden uitgewerkt [1]).

III. Opmerking over het STARK-effekt, berekend met inachtname der relativistische korrekties [2]).

De funktie van HAMILTON luidt in rechthoekige koordinaten:

$$H = m\,c^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{m^2\,c^2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)} - 1\right] - \frac{e\,E}{r} - e\,\mathbf{E}\,z \quad (90)$$

Na toepassing der kontakttransformatie (7)—(8), § 17:

$$H = m\,c^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{m^2\,c^2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}\right)} - 1\right] -$$
$$-\frac{e\,E}{q_1} - e\,\mathbf{E}\,q_1\sqrt{1-\frac{p_3^2}{p_2^2}}\sin q_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (91)$$

of na ontwikkeling tot op termen van de eerste orde in $1/c^2$:

[1]) In de koefficienten der variabelen ξ^2 en η^2 komen termen voor welke afkomstig zijn van de relativistische korrekties (ontstaan uit den term: $-\dfrac{m\,e^4\,E^4}{2\,c^2\,\mathbf{P}_1^3\,\mathbf{P}_2}$ van de funktie (87)) en termen welke afkomstig zijn van het magnetisch veld, en vermenigvuldigd zijn met γ^2.

Deze beide „storingen" worden hier om zoo te zeggen „door elkaar heen gewerkt".

[2]) Cf. A. SOMMERFELD, Phys. Zeitschr. **17**, p. 505, 1916.

Het is aan SOMMERFELD niet gelukt het probleem door te rekenen met de methode der faze-integralen.

$$H = -\frac{eE}{q_1} + \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) - \frac{1}{8m^3c^2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right)^2 -$$

$$- e\mathbf{E}\, q_1 \sqrt{1 - \frac{p_3^2}{p_2^2}} \sin q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91^*)$$

Door toepassing van de transformatie (36)—(37), § 19, wordt dit:

$$H = -\frac{m e^2 E^2}{2\mathbf{P}_1^2} - \frac{m e^4 E^4}{8c^2}\left\{\frac{4}{\mathbf{P}_1^3\mathbf{P}_2} - \frac{3}{\mathbf{P}_1^4}\right\} +$$

$$+ \frac{\mathbf{E}\mathbf{P}_1^2}{mE}\sqrt{1 - \frac{\mathbf{P}_3^2}{\mathbf{P}_2^2}}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{\mathbf{P}_2^2}{\mathbf{P}_1^2}} \sin \mathbf{Q}_2 +\right.$$

$$\left. + \sum_k{}^{*} B_k \sin(\mathbf{Q}_2 + k\mathbf{Q}_1)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Bij de verdere behandeling hiervan kan men twee gevallen onderscheiden:

a) Het elektrisch veld $\mathbf{E}$ is zeer zwak, zoodat:

$$\frac{\mathbf{E}\mathbf{P}_1^2}{mE}\cdot\frac{1}{\omega_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

($\omega_2 = \frac{m e^4 E^4}{2c^2\mathbf{P}_1^3\mathbf{P}_2^2}$ = middelbare beweging van $\mathbf{Q}_2$ in eerste benadering) *klein is ten opzichte van* $\mathbf{P}_2$ (b.v.: $\mathbf{E} < 10^{-3}$ *E. S. E.*).

Dan kan men de met $\mathbf{E}$ vermenigvuldigde storingstermen in (92) behandelen volgens de methode van DELAUNAY: en men komt tot het resultaat:

De formule voor de energie is — bij verwaarloozing van termen welke met $\mathbf{E}^2$, *enz., vermenigvuldigd zijn — dezelfde als men vindt voor* $\mathbf{E} = 0$.

M. a. w.: Het STARK-effekt is in eerste orde *nul*.

b) Indien het elektrisch veld sterk is, zoodat de door (93) gegeven verhouding niet verwaarloosd mag worden tegenover $\mathbf{P}_2$, moet men zijn toevlucht nemen tot dergelijke substituties als toegepast zijn in § 21, Opmerking.

Deze berekening — welke overeenkomst vertoont met de boven onder II uitgevoerde — zal hier worden weggelaten.

§ 24. OPMERKING OVER HYPERBOLISCHE BEWEGINGEN [1]).

Over de door EPSTEIN gevolgde methode voor het opstellen van quantenformules voor de hyperbolische bewegingen is reeds gesproken in § 15, **b**).

Ter herinnering zij hier vermeld dat de door EPSTEIN ingevoerde quantenformules luiden:

$$2 \int d\,r\,(p_r - p_{\infty}) = n'\,h; \quad p_{\varphi} = n\,\frac{h}{2\,\pi} \quad \ldots\ldots \quad (94)$$

waar p_{∞} de waarde van p_r is voor $r = \infty$, terwijl de integratie uitgestrekt is over het geheele interval waarin de funktie $p_r(r)$ reëel is [2]).

EPSTEIN vindt voor de energie der hierdoor bepaalde quantenbewegingen:

a) wanneer rekening gehouden wordt met de relativistische korrekties:

$$\alpha = m\,c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{A^2}{R^2}} - 1 \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

waarin:

$$R^2 = \frac{\pi^2}{4} \left\{ n \sqrt{1 - \frac{A^2}{n^2}} + n' \right\}^2 - n^2 \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

en:

$$A = \frac{2\,\pi\,e\,E}{h\,c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

b) wanneer men deze korrekties verwaarloost:

$$\alpha_0 = \frac{2\,\pi^2\,m\,e^2\,E^2}{h^2\,R_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95^*)$$

waarin:

---

[1]) P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50**, p. 815 - 840, 1916.

[2]) P. S. EPSTEIN, l.c. p. 820, vgl.
Zie speciaal fig. 1 en 2 op p. 823 en 824.

$$R_0^2 = \frac{\pi^2}{4}(n+n')^2 - n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96^*)$$

EPSTEIN past deze formules toe op de theorie van het foto-elektrisch effekt, en op de theorie der beta-stralen.

Hierover zij het volgende vermeld:

1) *Foto-elektrisch effekt.*

Zij α_e de (negatieve) energie van het elektron wanneer het op een elliptische baan loopt; α_h de (positieve) energie behoorende bij een hyperbolische baan.

Dan neemt EPSTEIN aan dat indien op het atoom licht valt van een frequentie ν welke voldoet aan:

$$h\,\nu \geqq \alpha_h - \alpha_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

het elektron uit de elliptische baan met energie α_e in de hyperbolische baan met energie α_h geworpen kan worden.

Het elektron vliegt dan uit het atoom met de energie α_h, en kan tegen een potentiaal oploopen, gegeven door:

$$V = \frac{\alpha_h}{e} = \frac{13{,}52}{R_0^2} \text{ Volts}^{1)\,2)} \quad \ldots\ldots \quad (99)$$

Voor de toepassing hiervan op waterstof wordt naar het artikel van EPSTEIN verwezen.

2) Wat de *beta-stralen* betreft tracht EPSTEIN met behulp van de formule (95) de homogene groepen van beta-stralen te verklaren, welke men bij verschillende radioaktieve stoffen heeft waargenomen [3]). Hierbij wordt aangenomen dat de uit de kern komende beta-deeltjes slechts langs een der hyperbolische banen het atoom kunnen verlaten [4]).

Zie verder het artikel van EPSTEIN.

[1]) Cf. P. S. EPSTEIN, l. c. p. 828, 829, vgl.

[2]) Men vergelijke in verband hiermee beneden § 34, **f**).

[3]) Zie literatuur bij: E. RUTHERFORD, Radioaktive Substanzen, enz. (MARX Handbuch II), p. 208, vgl., p. 552; en bij P. S. EPSTEIN, l. c. p. 833.

[4]) Het zij vergund hier de volgende opmerking te maken: Zouden de radioaktieve transformaties misschien beschouwd moeten worden als het overspringen der elektronen *in* de kern uit de eene quantenbeweging in de andere? Men zou kunnen onderstellen dat deze elektronen twee typen van quantenbewegingen kunnen uitvoeren: *a*) in of vlak om de kern, waarvan zoo goed als niets bekend is, en *b*) hyperbolische bewegingen. Bij een beta-transformatie zou dan de beweging van het type *a*) in het type *b*) overslaan.

§ 25. OPMERKING OVER DE VERSCHUIVING VAN SPEKTRAALLIJNEN DOOR DRUK.

Indien men het spektrum van een damp onder hooge drukking waarneemt worden de spektraallijnen in het algemeen verplaatst; gewoonlijk krijgen ze een verschuiving naar de *roode* zijde van het spektrum [1]).

In de klassieke theorie heeft men dit soms verklaard door te veronderstellen dat de binding van een elektron aan een bepaald atoom verzwakt werd door de aantrekking der omringende atomen; de frequentie der trillingen van het elektron werd dan kleiner, waardoor de uitgezonden spektraallijnen naar het rood verschoven [2]).

Op een dergelijke wijze zou men een verklaring kunnen geven op grond der formules van de quantentheorie. Het volgende wordt meegedeeld als een vluchtige schets hiervan.

Aangenomen wordt dat het elektrische veld, veroorzaakt door de omringende atomen een potentiaal heeft, die naar opklimmende machten van r (de afstand van het elektron tot de atoomkern, waarbij het behoort) kan worden ontwikkeld. De totale potentiaal van het veld is dan:

$$V = + \frac{E}{r} + \sum_{0}^{\infty} A_i \, r^i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

en de funktie van HAMILTON:

---

[1]) Zie b.v. H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, Braunschweig 1913, p. 310.

De grootte der verschuiving houdt verband met de spektraalreeksen, terwijl bij bandenspektra zeer ingewikkelde betrekkingen optreden.

De verschuiving schijnt bepaald te worden door de *totale druk* van het gas, niet door de partieele druk van de damp waarvan men het spektrum onderzoekt.

Grootte-orde der verschuiving: bij ijzer is $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{4000} \times 2{,}3$ $\mathring{A}.E.$ per atmosfeer (F. KAYSER, Handb. d. Spektroskopie).

De waterstof-lijnen $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$ worden in een vlamboog door druk zeer sterk verbreed, ongeveer evenredig met de druk en met de derde of vierde macht der frequentie. De verschuiving is hier niet te meten.

[2]) Zie b.v. CAMPBELL, Moderne Elektrizitätslehre (Duitsche vertaling door U. MEYER, Dresden-Leipzig 1913), bl. 213.

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\varphi^2/_{r^2}\right) - \frac{eE}{r} - e\sum A_i\, r^i \text{ [1]} \quad . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

De quantenvoorwaarden kunnen worden ingevoerd met behulp van de faze-integralen; men krijgt dan:

$$p_\varphi = P_2 = n_2 \frac{h}{2\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{III})$$

$$\oint p_r\, dr = \oint dr \sqrt{2m\alpha + \frac{2meE}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2} + 2me\sum A_i\, r^i} =$$

$$= 2\pi P_1 = n_1 h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{IV})$$

De koefficienten A_i worden als zeer klein beschouwd, zoodat de kwadraten en hoogere machten ervan verwaarloosd mogen worden; men kan dan in vergelijking (IV) de wortelvorm ontwikkelen. Door de integraties uit te voeren komt men tot:

$$P_1 = + \frac{meE}{\sqrt{-2m\alpha}} - |P_2| - \sum_0^\infty A_i \,.\, B_i\,(P_1, P_2) \quad . \; . \; . \; (\mathrm{V})$$

In de koefficienten B_i is α vervangen door de eerste benadering:

$$\alpha_0 = -\frac{me^2E^2}{2\,(P_1 + |P_2|)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{VI})$$

Deze koefficienten B_i zijn allen *positief* [2].

Uit (V) leidt men tenslotte de energie-vergelijking af:

[1] Uit de onderstelling omtrent den potentiaal van het krachtveld volgt direkt dat de baan in een *plat vlak* ligt. Het is dus niet noodig drie koordinaten in te voeren. (Deed men dit wel, dan zou men in het eindresultaat een hoekvariabele krijgen — de lengte van de klimmende knoop van het baanvlak — welke de middelbare beweging *nul* heeft.)

[2] De koefficienten B_i zijn gegeven door de integralen:

$$B_i = \oint dr \frac{m\, e\, r^{i+1}}{\sqrt{2m\alpha r^2 + 2meEr - P_2^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{Va})$$

Hierin is r steeds positief (r ligt tusschen twee pos. wortels ingesloten); dr heeft steeds hetzelfde teeken als de wortelvorm.

Opmerking. Met betrekking tot de grenzen der integralen (Va) voor de berekening van B_i vergelijke men:

A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. **17**, p. 504, 1916.

$$\alpha = -\frac{m e^2 E^2}{2 (P_1 + P_2)^2} - \sum_0^{\infty} A_i . C_i (P_1, P_2) \quad . . . (VII)$$

waarin de koefficienten C_i allen *positief* zijn, en in het algemeen met toenemende waarden van P_1 en P_2 aangroeiën.

De eersten dezer koefficienten zijn:

$$C_0 = e$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{3 P_1^2 + 6 P_1 P_2 + 2 P_2^2}{2 m E} \\ C_2 &= \frac{(P_1 + P_2)^2 (5 P_1^2 + 10 P_1 P_2 + 2 P_2^2)}{2 m^2 e E^2} \end{aligned}\right\} \quad . . (VIII)$$

enz.

Speciaal voor cirkelvormige banen ($P_1 = 0$) wordt de formule voor de energie:

$$\alpha = -\frac{m e^2 E^2}{2 P_2^2} - \sum_0^{\infty} e A_i \left(\frac{P_2^2}{m e E}\right)^i \quad . . . . . . (IX)$$

Gaat men van de formule voor de energie over op de spektraalformule, dan vindt men:

$$\nu = \nu_0 - \Delta \nu \quad . . . . (X)$$

waar ν_0 de lijnen der gewone reeksen geeft (zie § 17), en $\Delta \nu$, zoo de A_i positief zijn (aantrekking door de omringende molekulen), een *positief* bedrag is, dat de verschuiving van de lijnen naar de *roode* kant van het spektrum bepaalt.

Voor cirkelvormige banen is de volledige spektraalformule:

$$\nu = \frac{2 \pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \left(\frac{1}{n''^2} - \frac{1}{n'^2}\right) - \sum_1^{\infty} e A_i \frac{(n')^{2i} - (n'')^{2i}}{m^i e^i E^i} \quad . . (XI)$$

n' heeft betrekking op de oorspronkelijke baan; n'' op de eindbaan; dus is $n' > n''$.

De verschuiving neemt toe met het rangnummer der lijn in de reeks.

De grootte der verschuiving hangt af van de grootte der koefficienten A_i.

HOOFDSTUK IV.

SYSTEMEN MET MEERDERE ELEKTRONEN.

§ 26. ALGEMEENE BESCHOUWINGEN.

De in het vorige hoofdstuk besproken problemen hebben bijna alle betrekking op een zeer speciaal geval van het vraagstuk der atoomstruktuur: nl. de beweging van één enkel elektron om een atoomkern. De verkregen resultaten kunnen voor het meerendeel slechts worden toegepast op waterstof en positief geladen helium; bij andere elementen kunnen ze in enkele gevallen als een eerste benadering dienen.

Het is natuurlijk van het grootste belang dat ook de bewegingen van elektronen in ingewikkelder systemen bestudeerd worden: eerst hierdoor kan men hopen een inzicht te krijgen in den bouw der atomen, en in het periodiek systeem en de vele daarmee samenhangende vraagstukken.

De studie van deze systemen met meerdere elektronen biedt echter buitengewoon groote moeilijkheden: er is ook nog betrekkelijk weinig over onderzocht, terwijl het karakter dezer onderzoekingen geheel anders is dan dat van die welke op waterstof betrekking hebben. Een algemeene berekening der bewegingen zooals in hoofdstuk III voor een enkel elektron gegeven werd, is voor een systeem met meerdere elektronen tot nog toe onmogelijk: men heeft hier te doen met problemen der beweging van n lichamen, waarvan de oplossing nog niet gevonden is. Ook omtrent het algemeene karakter der oplossingen (vooral wat betreft de stabiliteit) is zoo goed als niets bekend [1]).

[1]) Bij de elektronenbeweging is de moeilijkheid in sommige opzichten nog grooter dan bij de astronomische problemen:

Men moet zich hier tevreden stellen met partikuliere oplossingen der bewegingsvergelijkingen; hierbij komen in de eerste plaats in aanmerking de z.g. „periodieke soluties" en de soluties in de nabijheid hiervan, welke ook voor de theorie der planetenbeweging van zoo groot gewicht zijn [1]).

Zeer belangrijk is de vraag naar de **stabiliteit** der bewegingen. Men kan de stabiliteit van uit twee verschillende gezichtspunten beschouwen, welke als volgt gekarakteriseerd kunnen worden:

(**1**) in aansluiting aan H. POINCARÉ, Mécanique Céleste III, p. 141:

Bewegingen heeten stabiel indien aan de volgende voorwaarden is voldaan:

a) geen der elektronen verwijdert zich tot in het oneindige;

b) geen der elektronen valt op de kern; m. a. w. de afstand kern—elektron kan niet beneden een zekere eindige grenswaarde dalen;

c) het systeem passeert een onbegrensd aantal malen willekeurig dicht langs de oorspronkelijke ligging [2]).

(**2**) Men kan vragen naar de stabiliteit van een partikuliere oplossing (welke oplosssing zelve stabiel is in bovengenoemden zin) tegenover *kleine storingen* der beweging.

Als definitie van stabiliteit kan men hier gebruiken: een oplossing is stabiel tegenover storingen, indien de gestoorde baan zich nergens onbegrensd ver van de ongestoorde verwijdert [3]).

a) De massa's van de elektronen zijn wel zeer klein t.o. van de massa van het centrale lichaam, maar de ladingen die de onderlinge krachten bepalen zijn van dezelfde orde van grootte als de lading van de kern.

b) Vermoedelijk is de moeilijkheid ook grooter doordat de elektronen onderling elkaar *afstooten*. (Vergelijk in verband hiermee ook een opmerking van J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27**, p. 546, 1914).

[1]) Vergelijk b.v. E. T. WHITTAKER, Anal. Dynamics, p. 386.

[2]) Is alleen aan (1), *c*) voldaan, dan heeft men „stabilité à la POISSON" (zie POINCARÉ, l.c.). Dit treedt op als in de reeksontwikkelingen voor de koordinaten termen van den vorm: $a. t. \sin (b. t + \varepsilon)$ voorkomen.

[3]) Over de verschillende definities van de stabiliteit van een bepaalde oplossing tegenover storingen vergelijke men: KLEIN-SOMMERFELD, Theorie des Kreisels, p. 343, vgl. Als strenge definitie geven zij: Een beweging is stabiel in den zin van (2) als ze overeenstemt met de limiet waartoe de gestoorde beweging nadert, indien de storing onbegrensd afneemt (l.c. p. 350).

Omtrent de definitie van stabiliteit met behulp van de „karakteristieke exponenten" vergelijke men: WHITTAKER, l.c. p. 400; H. POINCARÉ, l.c. I. Zie ook beneden, bl. 141.

Het is duidelijk dat de bewegingen der elektronen in een atoom stabiel moeten zijn in den zin van definitie (1), opdat men van een stationnairen bewegingstoestand kan spreken. In de tweede plaats komt dan in aanmerking of deze bewegingen stabiel zijn tegenover kleine storingen.

De in hoofdstuk III beschouwde problemen bezitten een algemeene klasse van oplossingen (approximatief te karakteriseeren door de negatieve waarde van de totale energie) welke stabiel zijn in den zin van definitie (1) [1]). Deze oplossingen vullen in de ruimte der integratiekonstanten een $2f$-dimensionaal gebied van eindige grootte kontinu, zoodat alle oplossingen in de nabijheid van een stabiele oplossing eveneens stabiel zijn. Hieruit volgt dat elke oplossing ook stabiel is in den zin van definitie (2).

Bij het probleem der beweging van n elektronen kan men geen dergelijke algemeene groepen van oplossingen aangeven welke in den zin van (1) stabiel zijn; men kent slechts enkele partikuliere periodieke soluties.

De meest onderzochte hiervan is de volgende [2]):

Alle elektronen (aantal $= s$) staan op onderling gelijke afstanden langs een cirkel om de kern, en loopen met dezelfde hoeksnelheid ω rond. Tusschen de straal van de ring R, de lading van de kern $E = Ze$ en de hoeksnelheid ω bestaat de betrekking:

$$\frac{e^2}{R^2} \{ Z - \sigma_s \} = m\, \omega^2 R \quad \text{. . . . . (1)}$$

waarin:

$$\sigma_s = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{s-1} \operatorname{cosec} \frac{\pi i}{s} \quad \text{. . . . . . . [3]) [4]) (2)}$$

[1]) De in § 21 vermelde rechtlijnige „Pendelbahnen" voldoen naar het schijnt niet aan (1), b). Deze banen zijn echter nog bijna niet onderzocht.

[2]) Deze oplossing is bestudeerd door:

H. Nagaoka, Phil. Mag. **7**, p. 445, 1904; J. W. Nicholson, Monthly Notices Roy. Astr. Soc. **72**, p. 49, 139, 677, 729 (1911/12); **74**, p. 204, 425, 486 (1913/14); N. Bohr, Phil. Mag. **26**, p. 1, 476, 1913; L. Föppl, Phys. Zeitschr. **15**, p. 707, 1914. Bovendien zijn ze reeds door J. J. Thomson onderzocht in verband met het door hem uitgewerkte atoommodel, Phil. Mag. **7**, p. 237, 1904.

(Volgens Nicholson heeft Nagaoka eenige fouten in zijn berekeningen gemaakt. Cf. J. W. Nicholson, Monthly Not. **72**, p. 687, 1911/12).

[3]) Zie voor de waarden van σ_s een tabel bij N. Bohr, l. c.

[4]) Andere periodieke soluties.

(1) Alle elektronen staan steeds op onderling gelijke afstanden van elkaar en op gelijke afstanden van de kern; ze beschrijven onder invloed van de resul-

Men heeft de stabiliteit dezer oplossing tegenover kleine storingen onderzocht, en gevonden dat, indien men tenminste dit probleem volgens de klassieke mechanika mag behandelen, ze *instabiel* is voor $s > 1$.

Deze onderzoekingen zullen in § 27 kort besproken worden.

Behalve het geval dat alle elektronen op één cirkel loopen zijn ook onderzoekingen gedaan over de beweging van meerdere ringen van elektronen, doch deze hebben alle een meer qualitatief karakter [1]).

Opmerkingen over de invoering der quantenvoorwaarden.

In verband met hetgeen over de berekening der banen is gezegd, is het duidelijk dat de quantenvoorwaarden niet op een zoo algemeene manier kunnen worden ingevoerd als in hoofdstuk II en III is gedaan, temeer daar niet bekend is in hoeverre de banen quasi-periodiek (stabiel in den zin van def. (1)) zijn. Men moet hier dus genoegen nemen met speciale onderstellingen.

NICHOLSON en BOHR [2]) hebben voor de bovengenoemde bewe-

teerende attraktie $e^2 (Z - \sigma_s)/r^2$ allen elliptische banen, welke banen kongruent zijn, en door een draaiing van $2\pi/s$ om de kern uit elkaar afgeleid kunnen worden, terwijl de elektronen op overeenkomstige punten dezer ellipsen staan. Cf. N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 21, 1913: J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27,** p. 557, 1914.

(2) J. W. NICHOLSON heeft periodieke oplossingen gegeven waar de elektronen in verschillende vlakken rondloopen. Monthly Notices **74,** p. 434, 1914; Phil. Mag. **27,** p. 560, 1914. (Zie fig. 6, bl. 153).

Deze periodieke oplossingen vertoonen eenige analogie met de periodieke oplossingen van LAPLACE voor het drielichamen-probleem (verg. WHITTAKER, Anal. Dyn. p. 390).

[1]) N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 483, 1913; J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27,** p. 541, vgl., 1914. Voor het THOMSON-model: J. J. THOMSON, Phil. Mag. **7,** p. 253, vgl., 1904.

Een speciaal probleem is door SOMMERFELD uitgewerkt met het oog op de theorie der spektra: dicht om de kern beweegt zich een ring van n elektronen, waarvan het elektrisch veld op grooten afstand vervangen mag worden door dat van een gelijkmatig elektrisch geladen ring. In het veld van de kern en van deze ring beweegt zich één enkel elektron. Dit probleem heeft, zoo men de beweging van de ring als onveranderlijk gegeven beschouwt, groote analogie met de in III besprokene, en kan op dezelfde wijze behandeld worden. Het is aan SOMMERFELD gelukt hiermee de spektraalformules van RYDBERG en van RITZ af te leiden (Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 131, 1916). (Zie § 28).

[2]) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **72,** p. 679, 1912; **74,** p. 215, 429, 1914; N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 24, 1913.

ging van s elektronen in een cirkel de voorwaarde ingevoerd dat het moment van hoeveelheid van beweging van elk elektron een geheel veelvoud is van $\frac{h}{2\pi}$:

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = m R^2 \omega = n \frac{h}{2\pi} \text{ }^{1)} \text{. . . . . . } (3)$$

In den normalen toestand is $n = 1$.

Door de invoering dezer voorwaarde is de absolute grootte van het systeem vastgelegd.

Zooals boven reeds is opgemerkt, is deze oplossing niet stabiel, speciaal tegenover storingen *in* het baanvlak. BOHR heeft nu het vermoeden uitgesproken dat voor de berekening dezer stabiliteitsproblemen de klassieke mechanika niet meer geldig zou zijn, en dat ook hier de quantenvoorwaarden een rol zouden spelen, in dien zin dat slechts storingen kunnen optreden *welke de quantenvoorwaarden onveranderd laten* [2]).

---

[1]) *Opmerking.*

De beweging van het systeem is exakt periodiek; men zou dus in aansluiting aan § 14, slot (form. 11) als quantenvoorwaarde kunnen invoeren:

$$\frac{2\bar{T}}{\nu} = n_1 \cdot h$$

Nu is: $\overline{2T} = 2T = s \cdot p_\varphi \cdot \dot{\varphi} = s \cdot p_\varphi \cdot \omega \;;\; \nu = \frac{\omega}{2\pi}$

dus: $s \cdot p_\varphi = n_1 \cdot \frac{h}{2\pi}$

BOHR neemt steeds: $n_1 =$ geheel veelvoud van $s = n . s$. (NICHOLSON doet dit niet altijd: cf. Monthly Notices **72,** p. 680, 1912.) De vraag rijst of dit noodzakelijk is? Als tegenvoorbeelden zou men kunnen aanvoeren:

1) bij het probleem van de beweging van een elektron om een niet vaststaande kern (§ 18) quantiseert men het totale moment van hoeveelheid van beweging van kern plus elektron, en niet dat van elk afzonderlijk.

2) In de theorie der soortelijke warmte van vaste lichamen (EINSTEIN, DEBYE, e.a.) quantiseert men elke hoofdtrilling van het atoomraster in overeenstemming met de formule van PLANCK (energie/frequentie $= n . h$) zonder de voorwaarde in te voeren dat n een veelvoud moet zijn van het aantal atomen in het raster (dit laatste zou tot geheel afwijkende resultaten voeren). [Zie ook opmerking **6** bij § 36.]

[2]) N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 1, vgl., 1913.

Bij het bovenstaande probleem zou dan elk elektron steeds hetzelfde moment van hoeveelheid van beweging:

$$p_{\varphi} = m\,r^2\,\dot{\varphi} = \frac{h}{2\,\pi} \quad \text{. . . . . (3*)}$$

moeten behouden. Voert men dit als een kinematische relatie in, dan blijkt in een aantal gevallen de instabiliteit te verdwijnen [1]).

Zoodra men echter de quantenvoorwaarden op deze manier gaat gebruiken, komt men voor vele moeilijkheden te staan, waarvan de oplossing nog niet gevonden is. Vooral doet zich hier het gemis aan een algemeen grondprincipe gevoelen, zoodat er groote onzekerheid is omtrent den te volgen weg.

In verband hiermee kan het misschien van nut zijn nog eens de in hoofdstuk II en III behandelde systemen te beschouwen. Bij deze systemen was ondersteld dat men een groep van oplossingen kende welke stabiel zijn in den zin van def. (1); elke dezer oplossingen is stabiel in den zin van def. (2). De stabiliteit bestaat hier dus onafhankelijk van de quantenvoorwaarden (inderdaad werd geëischt dat de bewegingen stabiel waren opdat de quantenvoorwaarden konden worden ingevoerd).

Men kan nu bij deze systemen de voorwaarde invoeren: slechts die bewegingen zijn mogelijk welke aan de quantenvoorwaarden voldoen.

De bewegingen zijn gekarakteriseerd door de $2f$ integratiekonstanten $P_1 \ldots . P_f\ \varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_f$ (zie § 10); door de quantenvoorwaarden zijn $P_1 \ldots . P_f$ vastgelegd, dus kunnen slechts de fazekonstanten $\varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_f$ veranderen. De kleine trillingen van het systeem om een bepaalden bewegingstoestand zijn derhalve in deze onderstelling:

$$\left.\begin{array}{l} \delta P_1 = \delta P_2 = \ldots . \delta P_f = 0 \\ \delta Q_1 = \text{konstante} \\ \delta Q_2 = \text{konstante} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta Q_f = \text{konstante} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \,(4)$$

$$(\text{N.B.: } \delta \dot{Q}_1 = \ldots . \delta \dot{Q}_f = 0).$$

Het systeem blijkt *indifferent* te zijn tegenover de nog toegelaten storingen.

---

[1]) L. FÖPPL, Phys. Zeitschr. **15**, p. 707, 1914. Deze „verbindingsvergelijking" (kinematische relatie) heeft een *niet-holonoom* karakter. (Over trillingen van niet-holonome systemen zie men: WHITTAKER, Anal. Dynamics, p. 221).

Indien men te doen heeft met een geval van ontaarding zou men slechts de $f—\lambda$ gequantiseerde **P**'s kunnen vasthouden. Dan zijn de trillingen:

$$\left.\begin{array}{l}\delta \mathbf{P}_1 = \delta \mathbf{P}_2 = \ldots . \delta \mathbf{P}_{f-\lambda} = 0 \\ \delta \mathbf{P}_j = \text{konstante } (j = f-\lambda+1 \ldots f) \\ \delta \mathbf{Q}_k = \text{konstante } (k = 1 \ldots f)\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Ook in dit geval is het systeem indifferent tegenover de toegelaten storingen [1]).

(*Voorbeeld:* Bij de elliptische beweging van een elektron om een atoomkern is alleen de groote as van de baan vastgelegd; elke naburige baan met dezelfde groote as kan opgevat worden als een kleine trilling om deze baan.)

Bij het probleem van de beweging van s elektronen in een periodieke baan om de kern kan men zich nu ook denken dat slechts die storingen toegelaten zijn welke de ingevoerde quantenvoorwaarden onveranderd laten. Men komt dan echter onmiddellijk op de vraag: welke zijn de ingevoerde quantenvoorwaarden? Is (speciaal voor het bovenstaande probleem der beweging in een cirkel) de voorwaarde (3) of (3*) de eenige, of moet men niet even goed de voorwaarde dat de baan een cirkel is, en dat ze in een plat vlak ligt, als quantenvoorwaarden opvatten van den vorm:

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{\leftrightarrow} p_r \, dr = 0 \\ \int\limits_{\leftrightarrow} p_z \, dz = 0\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

(voor elk elektron).

Dan zouden de trillingen nog meer beperkt worden dan door de voorwaarde van BOHR gedaan wordt, en het zou niet onmogelijk zijn zooveel quantenvoorwaarden in te voeren dat voor de nog toegelaten storingen het systeem indifferent is evenals boven.

Om deze kwestie nog eenigszins nauwkeuriger te onderzoeken kan men als volgt te werk gaan:

Aangenomen men kent een partikuliere periodieke solutie der bewegingsvergelijkingen. Dan kan men met behulp van een door

[1]) Hiermee hangt samen dat de toegelaten storingen de energie onveranderd laten.

POINCARÉ [1]) gegeven methode de soluties in de nabijheid hiervan onderzoeken. Zij de periodieke solutie:

$$q_i = \varphi_i(t)\,;\; p_i = \psi_i(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

waar φ_i en ψ_i periodieke funkties van t zijn met de periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. De naburige oplossingen hebben dan den vorm:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t) + \sum_1^{2f} c_k\, e^{\alpha_k t} S_{ik} \\ p_i &= \psi_i(t) + \sum_1^{2f} c_k\, e^{\alpha_k t} S^*_{ik} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Hierin zijn $c_1 \ldots\ldots c_{2f}$ integratiekonstanten (welke de amplituden en fazen der storingen bepalen); $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{2f}$ zijn de z.g. „*karakteristieke exponenten*" welke funkties zijn van de parameters die de periodieke solutie bepalen, doch onafhankelijk zijn van de c's. De S_{ik} en S^*_{ik} zijn periodieke funkties van t, met de periode T.

POINCARÉ heeft aangetoond dat indien de bewegingsvergelijkingen een kanonisch systeem vormen, en indien de funktie van HAMILTON de tijd t niet expliciet bevat — wat in het beschouwde probleem ondersteld wordt — de karakteristieke exponenten twee aan twee gelijk en tegengesteld zijn, en dat één paar gelijk nul is [2]).

Aangenomen is verder dat de paren van karakteristieke exponenten verschillend zijn [3]).

De voorwaarde voor de stabiliteit van de beschouwde periodieke solutie (de „solution génératrice") tegenover storingen is dat alle karakteristieke exponenten *zuiver imaginair* moeten zijn.

(**1**) Ondersteld wordt vooreerst dat dit het geval is, zoodat de „solution génératrice" stabiel is.

Indien men (in overeenstemming met het hierboven opgemerkte) aanneemt dat $\alpha_k = -\alpha_{k+f} = \omega_k \sqrt{-1}$, en dat $\alpha_1 = \alpha_{f+1} = 0$ is, kan men stellen:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \omega\;\; t + \textit{konstante} \\ Q_k &= \omega_k\, t + \textit{konstante}\;\; (k = 2 \ldots f) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

[1]) H. POINCARÉ, Mécanique Céleste I, p. 162, vgl.
Zie ook: WHITTAKER, Anal. Dynamics, p. 400.

[2]) Er is dus steeds een storing waar tegenover het systeem indifferent is.

[3]) Indien dit niet het geval is krijgt men termen van den vorm: $t^{\alpha} . e^{\alpha t} . S$.

In de formules (8) kan men de exponentieele funkties van t vervangen door goniometrische funkties van de Q's; ze zijn dan in den vorm te schrijven:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A^i_m \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} m\, Q_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{f} \gamma_k \sum_{-\infty}^{+\infty} B^i_{km} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (m\, Q_1 + Q_k) \\ p_i &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (A^i_m)^* \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} m\, Q_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{f} \gamma_k \sum_{-\infty}^{+\infty} (B^i_{km})^* \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (m\, Q_1 + Q_k) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Het eerste stuk van de rechterleden dezer vergelijkingen bevat de funkties φ_i en ψ_i, en de storing waartegenover het systeem indifferent is; de $(f-1)$ reeksen van het tweede stuk bevatten de overige storingen. De konstanten γ_k bepalen de amplituden der storingen; deze worden verondersteld klein te zijn, evenals boven met de c_k het geval was. De grootheden A, A^*, B, B^* zijn konstante funkties van de parameters der oorspronkelijke periodieke oplossing.

Men kan nu in overeenstemming met de in hoofdstuk II besproken principes de Q's als hoekvariabelen opvatten, en de grootheden invoeren:

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\, Q_k \sum_i p_i \frac{\partial\, q_i}{\partial\, Q_k} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

(zie § 11). Dan is het duidelijk dat $P_k\,(k = 2 \ldots f)$ gelijk is aan $(\gamma_k)^2$ maal een funktie van de parameters der „solution génératrice"; terwijl in P_1 de γ's alleen als kwadraten $(\gamma_k)^2$ voorkomen, tezamen met deze parameters.

Men zou nu als quantenvoorwaarden kunnen invoeren:

$$P_k = n_k \frac{h}{2\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

De quantengetallen $n_2 \ldots . n_f$ bepalen de amplituden der kleine trillingen om de „solution génératrice". Deze zelf is gekarakte-

riseerd door: $n_2 = n_3 = \ldots n_f = 0$, terwijl de grootte van de baan vastgelegd wordt door n_1 [1]).

Drukt men de energie uit als funktie van de P's, dan krijgt men een formule van den vorm:

$$\alpha = K(P) = K_0 (P_1) + \sum_2^f \omega_k P_k \ ^2) \ldots \ldots \quad (13)$$

waar:

$$\frac{\partial K_0}{\partial P_1} = \omega .$$

Uitgedrukt als funktie der quantengetallen:

$$\alpha = \alpha_0 (n_1) + \sum_2^f \omega_k (n_1) . n_k \frac{h}{2\pi} \ldots \ldots \quad (13a)$$

In dit geval is de quantiseering van het systeem tenminste principieel uitvoerbaar.

Stelt men nu evenals boven de voorwaarde dat slechts die storingen toegelaten zijn welke de quantenvoorwaarden onveranderd laten, dan zijn in de onmiddellijke nabijheid der oorspronkelijke periodieke solutie geen kleine trillingen mogelijk, behalve de indifferente storing:

$$\left.\begin{array}{l} \delta P_1 = 0 \\ \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots \gamma_k = 0 \\ \delta Q_1 = \text{konstante} \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Pas op „grooteren afstand" hiervan krijgt men de bewegingen waarvoor:

---

[1]) Men dient hierbij na te gaan of bij een bepaalde waarde van P_1 (b.v. $n_1 \frac{h}{2\pi}$) voor $P_k =$ b.v. $\frac{h}{2\pi}$ $(k = 2 \ldots f)$ de amplituden γ_k der storingen voldoende klein zijn tegenover de bewegingen in de oorspronkelijke oplossing.

Is dit niet het geval, dan zou men de variatie-vergelijkingen welke voor de afleiding der naburige soluties dienen (cf. Poincaré, l. c. en Whittaker, l. c.) tot op hoogere machten van de storingen moeten ontwikkelen om nauwkeuriger oplossingen te krijgen. De reeksen (10) worden dan minder eenvoudig: er komen termen van den algemeenen vorm:

$$B_{m_1 \ldots m_f} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m_1 Q_1 \ldots m_f Q_f)$$

in voor.

[2]) Dit is eigenlijk het begin van een reeksontwikkeling naar opklimmende machten van $P_2 \ldots P_f$ (Vergelijk Whittaker, l. c. Ch. XVI).

$$P_k = n_k \cdot h/2\pi \qquad (k = 2 \ldots f)$$

is, welke eerst door storingen van bepaalde, *eindige* grootte kunnen worden opgewekt [1]).

(2) Indien sommige der karakteristieke exponenten reëel of komplex zijn, is de oorspronkelijke periodieke oplossing *instabiel*. In dit geval komt men weer op de moeilijkheid van bl. 138/139.

Misschien zou men hier den volgenden weg kunnen inslaan: Men voert zoovele hoekvariabelen in als er imaginaire α's zijn (m. a. w. zooveel als het aantal der stabiele en der indifferente trillingen bedraagt); hiervoor tracht men quantenvoorwaarden op te stellen op dezelfde wijze als boven gedaan is.

Dan moet getracht worden quantenvoorwaarden te vinden voor de instabiele bewegingen, welke bij de reëele α's behooren. Of dit mogelijk is, en hoe dit zou moeten geschieden kan ik echter niet zeggen; misschien zal de door EPSTEIN gegeven quantiseering van de hyperbolische beweging [2]) hierbij een vingerwijzing kunnen geven.

Onderstel evenwel dat dit gelukt, en dat $n_2 \ldots n_r$ de quantengetallen zijn voor de stabiele trillingen; $n_{r+1} \ldots n_f$ die voor de instabiele bewegingen; terwijl de oorspronkelijke solutie gekarakteriseerd is door n_1.

Voor de oorspronkelijke periodieke oplossing, en voor alle stabiele bewegingen in de omgeving ervan, heeft men dan:

$$n_{r+1} = n_{r+2} = \ldots\ldots n_f = 0.$$

Zal een instabiele beweging optreden, dan moeten een of meer dezer quantengetallen $n_{r+1} \ldots n_f$ van 0 op een of ander geheel getal springen; deze instabiele bewegingen zullen dus — evenals boven reeds omtrent de stabiele is opgemerkt — eerst door *storingen van een bepaalde eindige grootte* kunnen worden opgewekt.

[1]) Om in overeenstemming te blijven met de ideeën van hoofdstuk II zou men moeten aannemen dat deze soluties kunnen optreden wanneer op het systeem lichttrillingen van een der frequenties: $\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ $(k = 2 \ldots f)$ vallen, waaruit het systeem „energie-quanten" kan opnemen. Zie Noot I bij deze §.

[2]) Vergelijk boven § 15, **b**).

Hierdoor zou de stabiliteit tenminste eenigermate verzekerd zijn; het blijft dan een kwestie van verder onderzoek of de storingen welke de instabiele bewegingen doen ontstaan veel zullen voorkomen, of dat ze zeer zelden optreden [1]).

Het bovenstaande geeft geen direkt antwoord op de vraag of men de quantenvoorwaarden als kinematische relaties moet invoeren.

De boven gevolgde methode kan men in het kort aldus karakteriseeren:

Bij de berekening der bewegingen is nergens een quantenvoorwaarde als kinematische relatie gebruikt; de quantenvoorwaarden zijn eerst opgesteld nadat het probleem geheel uitgewerkt was volgens de formules der klassieke mechanika. Daarna is ondersteld dat het systeem slechts de door de quantenvoorwaarden gegeven bewegingen kan uitvoeren en geen andere. De „mogelijke" bewegingen van het systeem vormen dus geen kontinuë verzameling; dit heeft tengevolge dat er storingen van eindige grootte noodig zijn om het systeem uit de eene „mogelijke" beweging in een andere „mogelijke" beweging te doen overspringen.

Het probleem van de stabiliteit heeft hierdoor dus een geheel ander karakter gekregen. [Zie Noot II bij deze §.]

Wil men echter, zooals b.v. door Föppl [2]) is gedaan, de quantenvoorwaarden invoeren als kinematische nevenvoorwaarden bij het onderzoek naar de trillingen in de nabijheid van een periodieke solutie, dan zou men naar mij toeschijnt ze ook reeds onmiddellijk bij de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen in rekening moeten brengen; hierbij kan men echter op het bezwaar stuiten dat men eerst het probleem moet oplossen om de quantenvoorwaarden te leeren kennen.

In dit geval zou het waarschijnlijk noodig zijn de grondver-

[1]) Bewegingen waarvoor de quantengetallen der instabiele „trillingen" $n_{r+1} \dots n_f$ niet allen $= 0$ zijn, moeten misschien worden opgevat als een dissociatie van het systeem. Vergelijk een opmerking van J. W. Nicholson, Monthly Notices **72**, p. 690, 1912.

[2]) L. Föppl, Phys. Zeitschr. **15**, p. 707, 1914.

gelijkingen der mechanika geheel te wijzigen; op wat voor wijze dit moet geschieden is evenwel nog onbekend [1]) [2]).

Bij al het boven besprokene is nog niet gelet op de moeilijkheden van elektromagnetischen aard, welke bij deze problemen natuurlijk even zoo optreden als bij de beweging van een enkel elektron. In de uitgewerkte problemen heeft men steeds de uitstraling door de bewegende elektronen verwaarloosd en heeft men geen rekening gehouden met de reaktie van het eigenveld op elk elektron [3]).

Noot I.

Opmerking in verband met formules (13) en (13a) van bl. 143.

Volgens bl. 143 vindt men voor de energie van een beweging in de nabijheid eener periodieke solutie:

$$\alpha = K(P) = K_0(P_1) + \sum_2^f \omega_k P_k + \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

of uitgedrukt in de quantengetallen:

$$\alpha = \alpha_0(n_1) + \sum_2^f \omega_k(n_1) \,.\, n_k \frac{h}{2\pi} + \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

[1]) Indien de grondvergelijkingen der mechanika gewijzigd worden zouden ook de berekeningen van hoofdstuk II en III op geheel andere basis moeten worden gegrondvest.

[2]) In verband met het boven besprokene lijkt me vooral het invoeren van de voorwaarde:

$$p_\varphi = m\, r^2\, \dot{\varphi} = h/2\pi = \textit{konstante}$$

als de eenige kinematische relatie niet goed te verdedigen.

Zie in verband hiermee ook de opmerking in noot [2]), bl. 151, over het stabiliteitskriterium van Bohr.

[3]) Het verwaarloozen van de uitstraling is bij systemen met meerdere elektronen beter te rechtvaardigen dan bij een systeem met slechts 1 elektron, daar de onderzoekingen van J. J. Thomson en G. A. Schott aangetoond hebben dat de uitstraling zeer gering wordt, zoo de vektor-som van de versnellingen der elektronen nul is.

Bij een ring van elektronen is de straling des te geringer naarmate de ring meer elektronen bevat; zie bl. 4, noot [4]).

Onderstelt men nu dat het systeem lichttrillingen kan uitzenden of absorbeeren bij een verandering der quantengetallen van de waarden $n'_1\, n'_2 \ldots . n'_f$ naar de waarden $n''_1\, n''_2 \ldots . n''_f$, volgens de hypothese van BOHR, dan vindt men uit (II) voor de spektraalformule:

$$\nu = \frac{\alpha_0(n'_1) - \alpha_0(n''_1)}{h} + \sum_2^f \frac{n'_k \,.\, \omega_k(n'_1) - n''_k \,.\, \omega_k(n''_1)}{2\pi} + \ldots{}^{1)} \quad \text{(III)}$$

Indien men aanneemt dat de waarde van n_1 veel grooter is dan die van $n_2\, n_3 \ldots n_f$, en men:

$$n'_i - n''_i = \Delta n_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

stelt, kan men formule (III) in eerste approximatie vervangen door:

$$\nu = \frac{1}{h}\frac{\partial \alpha_0}{\partial n_1} \,.\, \Delta n_1 + \sum_2^f \frac{\omega_k \,.\, \Delta n_k}{2\pi} + \ldots . =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \,.\, \Delta n_1 + \sum_2^f \frac{\omega_k}{2\pi} \,.\, \Delta n_k + \ldots . =$$

$$= \sum_1^f \nu_i \,.\, \Delta n_i + \ldots .\ {}^{2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

De frequenties die het systeem uitzendt volgens de hypothese van BOHR zijn dus in eerste benadering dezelfde als de frequenties der bewegingen in het systeem met al hun boventonen en kombinatietonen [3]).

In twee opzichten is dit resultaat merkwaardig:

A) NICHOLSON heeft voor verschillende eenvoudige atoommodellen de kleine trillingen om een periodieke solutie (eenparige

---

[1]) De hoogere termen dezer formule hebben minstens den faktor h.

[2]) Men heeft:

$$\frac{1}{h}\left[\alpha_0(n'_1) - \alpha_0(n''_1)\right] = \frac{\omega}{2\pi} \,.\, \Delta n_1 - \frac{h}{8\pi^2}\frac{\partial \omega}{\partial P_1}(\Delta n_1)^2 + \ldots$$

$$\omega_i(n'_1) - \omega_i(n''_1) = \frac{h}{2\pi}\frac{\partial \omega_i}{\partial P_1} \Delta n_1 + \ldots .$$

Alle hoogere termen van formule (V) zijn dus minstens vermenigvuldigd met den faktor h.

[3]) Vergelijk in verband hiermee bl. 58 en § 32.

cirkelbeweging der elektronen) onderzocht [1]). Hij onderstelde dat het systeem — volgens de klassieke theorie — lichttrillingen zou uitzenden die dezelfde frequenties hebben als de bewegingen in het systeem, zoodat hij het spektrum van het systeem kon berekenen.

Volgens het bovenstaande komt men door de hypothese van BOHR toe te passen in eerste benadering tot dezelfde frequenties voor de uitgezonden lichttrillingen, zoodat het misschien mogelijk zal zijn de merkwaardige resultaten waartoe NICHOLSON gekomen is, ook met behulp der quantentheorie te interpreteeren [2]).

B) Uit de formule (V) blijkt dat de frequenties der kleine trillingen $\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ o.a. ook gekombineerd moeten worden met de frequentie $\nu_1 = \frac{\omega}{2\pi}$ der grondperiode (periode der oorspronkelijke periodieke solutie).

Dit treedt ook op in de algemeene uitdrukkingen voor de koordinaten als funkties van den tijd; zie boven formule (10).

Ook in dit opzicht blijkt dus het resultaat dat men vindt met behulp der quantenformules en der hypothese van BOHR analoog te zijn aan hetgeen men uit de klassieke theorie zou afleiden. [3])

Men vergelijke in verband hiermee:

(1) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **72**, p. 54 ("Periods relatively to a stationary observer") 1911/12.

[1]) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **72**, p. 49, 139, 677, 729 (1911/12); **74**, p. 204, 486, 623 (1913/14).

[2]) In de door NICHOLSON beschouwde systemen is het quantengetal n_1 dat aan de grondperiode wordt toegekend vrij groot (b.v. 25, 22, 18; zie Monthly Notices **72**, p. 680, 1912); dit is gunstig voor formule (V).

[3]) In de meeste gevallen is de oorspronkelijke periodieke solutie een eenparige cirkelbeweging. Zij de frequentie hiervan ν_1, en beschouwt men ter vereenvoudiging slechts één kleine trilling met eigenfrequentie ν_2 (dit is de frequentie voor een waarnemer die met de oorspronkelijke cirkelbeweging meeroteert), dan zullen volgens de klassieke theorie de uitgezonden lichttrillingen voor een stilstaanden waarnemer in het algemeen de drie frequenties:

$$\nu_2 ; \nu_2 + \nu_1 ; \nu_2 - \nu_1$$

vertoonen.

Volgens de formules der quantentheorie zullen de uitgezonden trillingen de frequenties bezitten:

$$\nu = m_2 \nu_2 + m_1 \nu_1 .$$

(2) A. SOMMERFELD, Eine allgemeine Dispersionsformel .... Elster u. Geitel-Festschrift (Braunschweig 1915), p. 577. Zie beneden bl. 214, noot [1]).

(3) De theorie van de spektra van roteerende molekulen (klassieke opvatting: formule van RAYLEIGH-BJERRUM, en daartegenover de opvatting volgens de quantentheorie, cf. J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amsterdam XXVI, p. 115, 1917. (Zie boven § 22).

[*Noot II.*

De hier ontwikkelde opvatting van het probleem der stabiliteit zou ik gaarne nog eens aldus willen samenvatten:

In de klassieke mechanika beschouwt men het gedrag van een beweging tegenover willekeurig kleine storingen. In de quantentheorie zijn echter *willekeurig kleine* veranderingen van een bewegingstoestand uitgesloten (behalve dan die tegenover welke het systeem indifferent is, vergelijk boven bl. 139), zoodat de oude manier om het probleem te onderzoeken hier vervalt. Oneindig kleine storingen kunnen dus de beweging niet wijzigen. Waardoor dit wordt teweeggebracht is nog onbekend, voorloopig zal men dit als een hypothese moeten aannemen.

De stabiliteitskwestie gaat nu in een geheel ander probleem over: in de vraag naar de kans op het voorkomen van bepaalde storingen van *eindige* grootte, dus in een probleem van waarschijnlijkheid [1]).

Om deze storingen te leeren kennen, en speciaal om de veranderingen in de energie te berekenen, welke gepaard gaan met het overspringen van de eene beweging in een andere, moet men alle quantenbewegingen in de nabijheid van de beschouwde opsporen. Deze bewegingen zijn dan te splitsen in twee groepen, al naar dat ze stabiel of instabiel zijn in den zin van de 1e definitie van bl. 135.

In het algemeen zal men echter mogen aannemen, dat hoe grooter de quantengetallen zijn, hoe kleiner de relatieve sprongsgewijze veranderingen in de energie moeten wezen, opdat de

[1]) Vermoedelijk zal onder deze storingen een belangrijke plaats innemen de inwerking van een stralingsveld. Omtrent de hypothesen welke men kan maken over de waarschijnlijkheid van het overspringen uit de eene beweging in een andere vergelijke men de in § 33 besproken theorie van EINSTEIN.

beweging omslaat in een andere, welke eventueel instabiel kan wezen. Men nadert dus ook hier weer bij groote quantengetallen asymptotisch tot de opvatting van de klassieke mechanika, volgens welke men oneindig kleine storingen der beweging in het oog moet vatten.

(In verband met deze kwestie zij hier nog gewezen op een probleem dat er nauw mee samenhangt, en dat opgeworpen is door de dispersietheorie van DEBYE en SOMMERFELD, nl. het *meetrillen der instabiele vrijheidsgraden van een systeem waarop periodieke uitwendige krachten werken*. Men vergelijke hierover § 36, opmerking **5**) (bl. 222).]

§ 27. KORT OVERZICHT VAN DE ONDERZOEKINGEN VAN BOHR, NICHOLSON EN FÖPPL OVER SYSTEMEN MET RINGEN VAN ELEKTRONEN.

A. *Systemen met één ring van elektronen.*

Door NICHOLSON is gevonden dat, indien men geen nevenvoorwaarden invoert, een ring van s elektronen *instabiel* is tegenover verplaatsingen in het baanvlak, tenzij $s = 1$ is [1]).

BOHR voert als voorwaarde voor de stabiliteit in: de onderzochte beweging is stabiel, indien de totale energie hierin kleiner is dan in elke naburige konfiguratie waarin elk elektron hetzelfde moment van hoeveelheid van beweging heeft. Hier wordt dus het konstant zijn van het moment van hoeveelheid van beweging als kinematische relatie ingevoerd [2]). Door BOHR is alleen een

[1]) J. W. NICHOLSON, Monthly Not. **72,** p. 677, vgl., 1912.

[2]) N. BOHR, Phil. Mag. **26,** p. 23, 1913.

Opmerking.

Past men het door BOHR gegeven kriterium voor de stabiliteit toe op een systeem bestaande uit een kern met één elektron, zooals in hoofdstuk III onderzocht is, dan komt men tot het resultaat dat *alleen een cirkelvormige beweging stabiel is, doch geen elliptische beweging.*

Volgens formules (5), (6), (12) van § 17 kan men voor de totale energie schrijven:

$$\varepsilon = -\frac{m e^2 E^2}{2(P_1 + P_2^*)^2}$$

waar: P_2^* = moment van hoeveelheid van beweging;

$$P_1 = \oint p_r \, dr.$$

($P_1 + P_2^* = \mathbf{P}_1 = \sqrt{m e E a}$, waar a = groote as van de ellips).

De waarde van de energie is dus bij gegeven waarde van het moment van hoeveelheid van beweging P_2^* een minimum voor:

$$P_1 = 0$$

wat slechts het geval is voor *cirkelvormige* banen.

Houdt men rekening met de relativistische korrekties, dan blijft bij benadering hetzelfde gelden. Toch moet men zeker aannemen dat er elliptische banen met eindige excentriciteit voorkomen, om de detailstruktuur der spektraallijnen te verklaren (SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 1, vgl., 1916).

verandering van den straal der ring onderzocht [1]), waarbij de energie steeds bleek toe te nemen; hieruit konkludeerde hij dat de beweging stabiel is tegenover storingen in het baanvlak. Een nader onderzoek hierover is verricht door L. FÖPPL [2]). FÖPPL leidt het door BOHR gebruikte kriterium af uit een theorema van ROUTH, en gaat de stabiliteit van verschillende ringen na tegenover willekeurige storingen in het baanvlak. Is Ze de grootte van de kernlading, s het aantal elektronen in de ring, dan is voor:

$$Z = s$$

het systeem *stabiel* als $s = 1, 2, 3, 4, 5$;

voor grootere waarden van s is het systeem slechts stabiel zoo de kernlading Z grooter is dan het aantal der elektronen (b.v. $s = 6$ eischt: $Z = 8$ of meer, enz.)

De stabiliteit tegenover storingen loodrecht op het vlak van de ring is onderzocht door NICHOLSON en door BOHR; deze onderzoekingen berusten geheel op de klassieke mechanika. BOHR vindt dat voor:

$$Z = s$$

de ring *stabiel* is, als $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

bij grootere waarden van s is het systeem slechts stabiel als Z veel grooter is dan s [3]).

NICHOLSON heeft voor verschillende eenvoudige systemen de kleine trillingen om den stationnairen bewegingstoestand onderzocht [4]).

Hij nam aan dat het systeem — volgens de klassieke elektrodynamika — lichttrillingen van dezelfde frequenties zou emitteeren als de frequenties dezer kleine trillingen zijn, en berekende op grond daarvan het spektrum van het systeem. De zoo gevonden spektra vergeleek hij met reeksen van lijnen, waargenomen in nevelvlekken, in de Corona van de zon en in de WOLF-RAYET-sterren, waarbij hij dikwijls merkwaardige overeenstemming vond [5]).

[1]) N. BOHR, l. c. p. 480.

[2]) L. FÖPPL, Phys. Zeitschr. **15**, p. 707, 1914.

[3]) N. BOHR, l. c. p. 481. — (J. W. NICHOLSON, l. c. p. 52.)

[4]) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **72**, p. 49, 139, 677, 729 (1911/12); **74**, p. 204, 486, 623 (1913/14).

[5]) Indien het spektrum berekend werd volgens de emissie-hypothese van BOHR zou men in eerste benadering dezelfde lijnen vinden, daar de quantengetallen

B. *Systemen met meerdere ringen van elektronen.*

Indien er vele elektronen in een atoom zijn ligt het voor de hand te onderstellen dat ze zich niet alle op één cirkel zullen bewegen, doch dat ze over meerdere ringen verdeeld kunnen zijn. Het onderzoek van dergelijke bewegingen is echter nog veel moeilijker dan dat van de beweging in één ring, zelfs indien het aantal elektronen in elke ring niet groot is.

Bohr onderstelt dat alle ringen cirkelvormig zijn, en in één plat vlak liggen [1]); hij geeft hiervoor een approximatieve be-

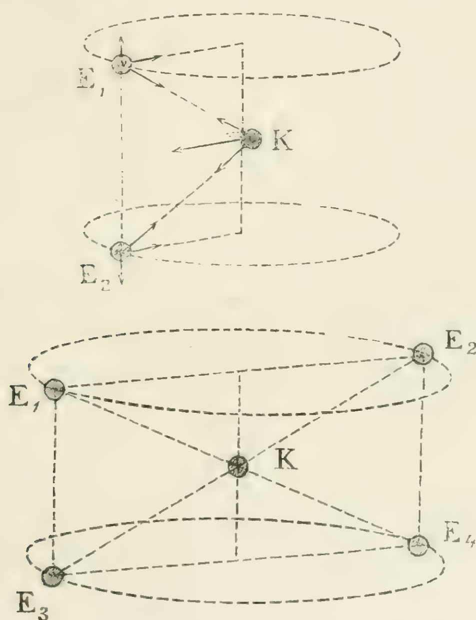


Fig. 6.

Voorbeelden van systemen waarin de elektronen niet alle in hetzelfde vlak loopen (Nicholson). E_1, E_2, E_3, E_4 : elektronen; K : kern. (In het bovenste systeem beweegt de kern zich in een kleine cirkel; in het onderste houden de krachten die de 4 elektronen op de kern uitoefenen elkaar in evenwicht, en staat de kern stil.)

(ν_1) die Nicholson aan de grondperiode geeft vrij groot zijn. (Monthly Notices **72**, p. 680, 1912). (Zie Noot I bij § 26.)

[1]) N. Bohr, l.c. p. 484.

handeling en leidt een voorwaarde af voor de stabiliteit. Hierop is een uitvoerige kritiek verschenen van NICHOLSON [1]); deze heeft verschillende voorbeelden van systemen met meerdere koncentrische ringen in één plat vlak onderzocht, o.a. om een model voor het Lithium-atoom te vinden; [definitieve resultaten heeft dit echter niet opgeleverd.]

NICHOLSON heeft ook nog eenige periodieke soluties aangegeven, waar de ringen *niet* in één plat vlak liggen (zie fig. 6) [2]). Zooals reeds door het woord periodiek is uitgedrukt voldoen deze aan de stabiliteitsvoorwaarden (1) van bl. 135; het zou zeer de moeite waard zijn deze soluties en de oplossingen in de nabijheid ervan nader te onderzoeken.

C. BOHR geeft ook nog beschouwingen over de verdeeling der elektronen over de verschillende ringen bij eenige eenvoudige systemen, en brengt deze verdeeling in verband met de chemische *valentie* der elementen [3]). Deze beschouwingen hebben meer een qualitatief karakter; BOHR voert als voorwaarde voor den meest stabielen toestand in, dat voor deze de totale energie een minimum is (bij gegeven moment van hoeveelheid van beweging); deze voorwaarde wordt echter niet streng vastgehouden. NICHOLSON heeft deze valentie-theorie aan een kritiek onderworpen [4]), en men krijgt het idee dat op dit gebied bijna nog niets bereikt is [5]).

D. *Systemen met meerdere kernen.*

Zoodra men onderzoekingen wil doen over den bouw der molekulen krijgt men met systemen te doen welke meer dan één positief geladen kern bezitten. Door BOHR [6]) zijn verschillende qualitatieve beschouwingen over de konfiguratie, de stabiliteit

[1]) J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27**, p. 541, vgl., 1914; Monthly Notices **74**, p. 430/431, 1914; Phil. Mag. **28**, p. 90, 1914.

[2]) J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **74**, p. 434/435, 1914; Phil. Mag. **27**, p. 560, 1914; Phil. Mag. **28**, p. 90, vgl., 1914.

[3]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, ca. bl. 487, vgl., 1913. — Zie ook: A. v. d. BROEK, Elster u. Geitel-Festschrift, p. 428 (1915) [en L. VEGARD, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **19**, p. 344, 1917].

[4]) J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27**, p. 558, 1914.

[5]) Men vergelijke in verband hiermee ook de door J. J. THOMSON ontwikkelde ideeën (Phil. Mag. **7**, p. 258, 1904).

[6]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 857, 1913.

en de vorming dezer systemen gegeven, wat het laatste betreft met het oog op een mogelijke verklaring van het proces der chemische verbinding.

Het meest onderzocht is het model van het *waterstof-molekuul* (H_2). Dit systeem wordt ondersteld te bestaan uit twee kernen met de lading $+e$ en de massa van een H-atoom, en twee elektronen; de laatsten bewegen zich in een cirkel welks vlak den afstand der kernen loodrecht middendoor deelt (zie fig. 7). Is $2a$ de afstand der kernen, R de straal van de elektronenbaan, dan heeft men:

$$R = a\sqrt{3} \quad ; \quad \omega^2 = \frac{e^2}{4\,m\,R^3}\,(3\sqrt{3}-1) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

waar ω de hoeksnelheid der elektronen is.

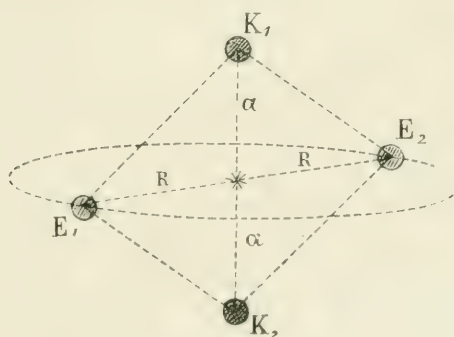


Fig. 7.
Model van het waterstofmolekuul
volgens BOHR en DEBYE.
K_1, K_2 : kernen; E_1, E_2 : elektronen.
$R = a\sqrt{3}$.

Dit model heeft zijn groote bekendheid te danken aan de dispersietheorie van DEBYE [1]). Onderzoekingen over de stabiliteit zijn gedaan door Mej. H. J. VAN LEEUWEN, die de trillingen van de elektronen om de stationnaire beweging naging in de onderstelling dat de kernen vastgehouden worden [2]) en door RUBINOWICZ welke ook de trillingen van de kernen in de berekening opnam [3]).

[1]) P. DEBYE, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 1, 1915. Zie beneden § 36.
[2]) Mej. H. J. VAN LEEUWEN, Versl. Akad. Amst. XXIV, p. 1047, 1915/16.
[3]) A. RUBINOWICZ, Phys. Zeitschr. **18**, p. 187, 1917.

Het is gebleken dat het systeem tegenover sommige storingen instabiel is.

Deze onderzoekingen, hoe interessant en belangrijk ze ook zijn, zullen hier niet nader besproken worden. Slechts zullen enkele opmerkingen over de precessie-bewegingen en de quantentheorie van roteerende molekulen beneden in § 29 vermeld worden [1]).

[1]) Met betrekking tot den bouw der molekulen zij hier ook verwezen naar een artikel van W. KOSSEL: Über Molekulbildung als Frage des Atombaus, Ann. d. Phys. **49**, p. 229, 1916 (speciaal het III[e] gedeelte, p. 350, vgl.). KOSSEL geeft evenwel meer algemeene beschouwingen, zonder direkt van het atoommodel van RUTHERFORD-BOHR gebruik te maken.

§ 28. OPMERKINGEN OVER DE SPEKTRA VAN SYSTEMEN MET MEER DAN EEN ELEKTRON.

Over de spektra van systemen met meerdere elektronen zijn nog weinig onderzoekingen gedaan. Voornamelijk is dit toe te schrijven aan de moeilijkheden die men ondervindt bij het opstellen der quantenvoorwaarden.

Door NICHOLSON is voor verschillende eenvoudige systemen met één ring van elektronen het spektrum onderzocht, in de onderstelling dat de lichtfrequenties die het systeem uitzendt dezelfde zijn als de frequenties der kleine trillingen in het systeem (Zie § 27, **A**).

Door BOHR en door NICHOLSON is verder nagegaan wat voor frequenties worden uitgezonden op grond van de emissie-hypothese van BOHR indien bij de beweging van alle elektronen op één ring het moment van hoeveelheid van beweging der elektronen van een bepaald veelvoud van $\frac{h}{2\pi}$ op een ander springt. Belangrijke resultaten heeft dit echter niet opgeleverd [1]).

Berekeningen van de spektra welke in verband staan met de oplossingen in de nabijheid van een periodieke solutie, uitgevoerd in aansluiting aan den gedachtengang van § 26 (en speciaal Noot I), zijn voorzoover mij bekend is nog niet gemaakt.

Een interessant probleem heeft SOMMERFELD uitgewerkt [2]), gelijk reeds op bl. 137 (noot [1])) vermeld is.

SOMMERFELD beschouwt een atoom waarin alle elektronen op één na in een ring vrij dicht om de kern heen loopen, terwijl het laatste elektron zich op betrekkelijk grooten afstand om dit systeem beweegt. Aangenomen wordt dat de beweging van de

---

[1]) Zie: J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **74**, p. 425, vgl., 1914.
[Men krijgt een spektraalformule van het BALMER-type op grond van de eigenschap vermeld in § 16, **c**).]

[2]) A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 152, vgl., 1916.

ring onveranderlijk is (m. a. w. de reaktie van het buitenste elektron op de ring wordt verwaarloosd); verder dat het elektrische veld veroorzaakt door de ring van elektronen vervangen mag worden door het veld van een kontinu met dezelfde hoeveelheid elektriciteit geladen ring.

Men kan nu de beweging van het elektron in het veld door kern en ring veroorzaakt onderzoeken. SOMMERFELD beperkt zich hierbij tot bewegingen van het elektron *in het vlak van de ring* [1]). De berekeningen van SOMMERFELD zullen hier niet herhaald worden; slechts zij meegedeeld dat de potentiaal van het elektrische veld in het vlak van de ring in een reeks naar negatieve machten van r ontwikkeld kan worden:

$$-e\,.\,V = -\frac{e^2}{r} + \frac{eE^*}{r}\left\{\frac{1}{2^2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3^2}{8^2}\frac{a^4}{r^4} + \ldots\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Hierin is:

$-E^* = -(E-e) =$ lading van de ring;
$a =$ straal van de ring.

Breekt men de ontwikkeling af bij de term met a^2, dan komt men tenslotte tot een formule voor de energie, welke luidt (uitgedrukt in de quantengetallen):

$$\alpha = \frac{-R\,.\,h}{(n+n'+q/n^3)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

(R = konstante van Rydberg: n = quantengetal voor de azimuthale beweging, m. a. w.: $nh/2\pi$ = moment van hoeveelheid van beweging; n' = quantengetal voor de radiale beweging) [2]).

Neemt men ook de term met a^4 mee, dan wordt de formule voor de energie:

$$\alpha = \frac{-R\,.\,h}{\left\{n+n'+q_n+\dfrac{k_n}{(n+n'+q/n^3)^2}\right\}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

(q_n en k_n zijn bepaalde funkties van n, cf. SOMMERFELD, l.c.).

---

[1]) In dit geval is het probleem door separatie der variabelen te behandelen. Wil men de elektronenbanen berekenen welke *niet* in dit vlak liggen, dan zal men vermoedelijk zijn toevlucht moeten nemen tot de formules van de storingstheorie; vergelijk de analoge problemen in hoofdstuk III, § 20, 21, e. a.

[2]) De grootheid q is evenredig met het kwadraat van de straal a van de ring zie formule (20a), bl. 160).

Uit deze formules kan men de spektraalformules van Rydberg en van Ritz afleiden; hiervoor wordt verwezen naar het artikel van Sommerfeld.

Voor de termen der *hoofdreeks* is: $n = 2$; $n' = 0, 1, 2, \ldots$
1e *nevenreeks* : $n = 3$; $n' = 0, 1, 2, \ldots$
Bergmann-*reeks* : $n = 4$; $n' = 0, 1, 2, \ldots$ [1])

Opmerkingen.

1) Sommerfeld heeft ook het geval onderzocht dat de ring van elektronen ver buiten de kern ligt, terwijl een elektron binnen de ring vrij dicht om de kern loopt [2]). Dit is van belang voor de theorie der Röntgenstralen; het onderzoek heeft echter niet die resultaten opgeleverd, welke Sommerfeld oorspronkelijk gehoopt had te bereiken [3]).

2) Een roteerende ring van elektronen oefent behalve een elektrische, ook een *magnetische* werking uit, wat invloed kan hebben op de beweging van een meer naar buiten gelegen elektron.

Het magnetische veld is bij benadering hetzelfde als dat van een elementair magneetje met moment:

$$\mu = -\frac{E^* \omega a^2}{2c} \quad {}^{4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Indien de as van het magneetje in de z-as ligt, is de vektorpotentiaal van het veld:

$$a_x = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r}\right) ; \; a_y = +\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right) ; \; a_z = 0 \quad \ldots \quad (19^a)$$

Volgens de formules van § 6 kan men voor het elektron de funktie van Lagrange opstellen, en op de bekende manier hieruit de funktie van Hamilton afleiden; de verdere behandeling van het probleem gaat op de gewone wijze.

Verwaarloost men termen die de straal a van de ring in de

[1]) Vergelijk over de tweede nevenreeks: Sommerfeld, l.c. p. 132. Sommerfeld vermoedt dat deze verband houdt met elektronenbanen welke *niet* in het vlak van de ring liggen.

[2]) A. Sommerfeld, Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 174, 1916.

[3]) A. Sommerfeld, l.c. p. 179. — Zie ook het beneden geciteerde artikel van P. Debye.

[4]) Zie § 37, Noot I. — ω is de hoeksnelheid van de ring.

4e of hoogere macht bevatten, dan vindt men voor de energie van de banen in het vlak van de ring de formule:

$$a = \frac{-R\,.\,h}{(n + n' + q\,n^{-3} - q^*\,n^{-2})^2} \quad ^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

waarin:

$$\left.\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{E^*}{e}\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^2 \\[2ex] q^* = \dfrac{h}{2\pi}\,\dfrac{\mu}{m\,e\,c\,a_1^2} \end{array}\right\} \qquad a_1 = \frac{h^2}{4\,\pi^2\,m\,e^2} \quad \ldots\ldots (20a)$$

Drukt men het magnetisch moment μ uit in magnetonen (μ^*) [2], dan vindt men voor q^*:

$$q^* = \text{ca. } 0{,}54.10^{-5}\,.\,\mu^* \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Is het aantal elektronen in de ring Z^*, het moment van hoeveelheid van beweging van elk $k\,h/2\pi$, dan is het magnetisch moment:

$$\mu^* = \text{ca. } 5\,k\,Z^* \text{ magnetonen } ^{3)}.$$

Hieruit blijkt dat de invloed van het magnetisch veld van een elektronenring in het algemeen zeer gering is. — De grootheid q is in dit geval ca. $k^4/4\,Z^*$; dit heeft een veel belangrijker invloed op de spektraalformule [4] [5]).

3) Over de Röntgenspektra is nog verschenen een artikel van P. Debye, Der erste Elektronenring der Atome, Phys. Zeitschr. **18,** p. 276, 1917.

[1]) A. Sommerfeld, l.c. p. 170.

[2]) Een Magneton is ca. $1{,}84\,.\,10^{-21}$ c. g. s.

[3]) Zie § 37.

[4]) H. G. Stanley Allen heeft een atoommodel voorgesteld, waarin de kern behalve een elektrische lading, een magnetisch moment draagt (Phil. Mag. **29,** p. 40, 140, 1915).

Voor de energie der quantenbewegingen van een dergelijk atoom krijgt men dezelfde formule als (20), waarin evenwel $q = 0$ is.

Om een merkbaren invloed te hebben zou het magnetisch moment van de kern zeer groot moeten zijn (Stanley Allen vindt dat om bij Lithium de afwijking van de spektraalformule van het Balmer-type te verklaren de kern eenige duizenden magnetonen zou moeten bezitten).

[5]) In verband met de magnetische eigenschappen van het atoommodel vergelijke men verder § 37.

DEBYE komt hierin tot het resultaat:

Binnen in het atoom bevindt zich het dichtst bij de kern *een ring van 3 elektronen,* welke op gelijke afstanden langs een cirkel staan, en elk met een moment van hoeveelheid van beweging van 1 quantum ($h/2\pi$) rondloopen. Uit deze cirkel kan 1 elektron verwijderd worden, en met een moment van 2 quanta voorzien een baan er buiten beschrijven, terwijl de overige twee elektronen dichter bij de kern komen, en diametraal tegenover elkaar staande een nieuwe cirkel beschrijven.

De Röntgenlijn $K\alpha_1$ wordt uitgezonden als de elektronen uit de konfiguratie (II) overspringen in de konfiguratie (I).

Deze opvattingen van DEBYE blijken dus in sommige opzichten belangrijk af te wijken van de ideeën van SOMMERFELD. DEBYE vermoedt dat het met zijn theorie mogelijk zal zijn verschillende problemen te verklaren (in verband met het kombinatie-principe en de absorbtiegrens) die in de theorie van SOMMERFELD onopgelost bleven.

De resultaten van DEBYE schijnen in zeer goede overeenstemming te zijn met de metingen over de golflengten der Röntgenstralen.

Men zou misschien nog eenige kritiek kunnen uitoefenen op de gevolgde rekenmethoden (l. c. p. 278), in verband met de volgende kwestie:

Volgens DEBYE kan het buitenste elektron in de IIe konfiguratie loopen:

òf op een cirkelbaan (II-1), met faze-integralen:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = 2h; \qquad \int_{\leftrightarrow} p_r \, dr = 0;$$

òf op een elliptische baan (II-2), met faze-integralen:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = h; \qquad \int_{\leftrightarrow} p_r \, dr = h.$$

De overgang (II-1) → (I) geeft de lijn: $K\alpha_1$; de overgang (II-2) → (I) geeft: $K\alpha_2$ (DEBYE, l. c. p. 283).

Het schijnt me echter dat de perihelium-afstand van de ellips (II-2) *kleiner* is dan de straal van de ring met 2 elektronen, welke er binnen moet liggen.

Men heeft nl. in de tweede konfiguratie:
straal van de binnenste cirkel:

$$a_1 = \frac{c^2}{2\,h\,R\,(Z-0{,}25)};$$

straal van de buitenste cirkel of halve groote as van de ellips:

$$a_2 = \frac{4\,c^2}{2\,h\,R\,(Z-2)} = \text{ca. } 4\,a_1 .$$

(Hier is: Z = lading van de kern; R = konstante van RYDBERG; zie DEBYE, l. c. p. 278, form. 8 en 9).

De ellips (II-2) heeft de excentriciteit: $\varepsilon = \sqrt{1-(^1/_2)^2} = 0{,}865$; dus is de perihelium-afstand:

$$a_2\,(1-\varepsilon) = 0{,}135\,a_2 = \text{ca. } 0{,}54\,a_1 .$$

[De verklaring van de doublets in de Röntgenspektra, welke in de theorie van SOMMERFELD zoo mooi tot haar recht kwam, zal dus in de theorie van DEBYE nog groote moeilijkheden opleveren.]

[4) Het bovenvermelde onderzoek van DEBYE is voortgezet door L. VEGARD (Über die Erklärung der Röntgenspektren, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **19**, p. 328, 1917.) VEGARD komt tot de konklusie dat bij de zwaardere elementen de door DEBYE gevonden ring van drie elektronen omgeven wordt door een ring van *zeven* elektronen, welke ter verklaring van de lijnen der M-reeks moet dienen. VEGARD geeft dan nog beschouwingen over de verdere ringen, en in een artikel volgende op het eerstgenoemde (Der Atombau auf Grundlage der Röntgenspektren, ibidem p. 344) geeft hij gedeeltelijk hierop steunende, gedeeltelijk op grond van chemische beschouwingen, een schema van de verdeeling der elektronen over de verschillende ringen voor alle elementen van het periodiek systeem. Ofschoon dit schema nog voor het grootste deel op hypothesen berust schijnt mij toch het opstellen ervan van groot nut te zijn, vooral in heuristisch opzicht. Zie in verband hiermee § 28*.]

[Ondertusschen zijn nog de volgende artikelen hierover verschenen:

A. SOMMERFELD, Atombau und Röntgenspektren, I. Teil, Phys. Zeitschr. **19**, p. 297, 1918;

J. KROO, Der erste und zweite Elektronenring der Atome, ibidem p. 307.]

Verdere opmerkingen.

De modellen, welke na het Waterstof-atoom het meest de aandacht waard zijn, zijn die van Helium, Lithium en van het Waterstof-molekuul. Aan den eenen kant zijn dit de eenvoudigste atomen en het eenvoudigste molekuul, aan den anderen kant zou de kennis van deze drie modellen een inzicht kunnen verschaffen in vele eigenschappen der elementen, zooals de valentie, het wezen der chemische verbinding, de bizonderheden der metalen, enz. Op het oogenblik is hiervan nog zeer weinig bekend.

Helium.

Men zou kunnen vermoeden dat de beide spektra van Helium en z.g. Parhelium (zie b.v. KAYSER, Handb. d. Spektroskopie V) behooren bij twee verschillende konfiguraties der elektronen:

a) beide elektronen loopen in eenzelfde cirkel om de kern;

b) de elektronen loopen in cirkels welke in verschillende vlakken liggen (de door NICHOLSON aangegeven periodieke solutie, zie § 27, **B** en fig. 6). [?]

Vergelijk ook: J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **74**, p. 439, 1914; Phil. Mag. **28**, p. 90, 1914.

Lithium.

Zie: N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 487 (ongeveer), 1913.

J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. **27**, p. 550, 1914; **28**, p. 90, vgl., 1914.

A. HARTMANN, Phys. Zeitschr. **18**, p. 14, 1917.

HARTMANN onderzoekt het spektrum van Lithium, en volgt een weg welke de omgekeerde is van die van SOMMERFELD: uit de empirische spektraalformule tracht hij het inwendige elektrische veld te berekenen. Het door hem meegedeelde (voorloopige) resultaat is: men moet aannemen dat twee elektronen vrij dicht bij de kern zitten, terwijl het derde elektron zich op grooten afstand daaromheen beweegt.

Waterstof-molekuul.

Zie: N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 862 of 863, 1913.

J. W. NICHOLSON, Monthly Notices **74**, p. 436, 1914.

M. WOLFKE, Phys. Zeitschr. **17**, p. 71 en 198, 1916.

K. GLITSCHER, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1916, p. 125.

P. S. EPSTEIN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 409/410, 1916.

Onderzoekingen over de kleine trillingen van het systeem: zie de op bl. 155 genoemde artikelen en § 36.

[§ 28*. DE BOUW EN DE BEREKENING VAN ATOMEN MET MEERDERE RINGEN VAN ELEKTRONEN [1]).

Zooals reeds vermeld is heeft L. VEGARD in een artikel in de Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellschaft [2]) een schema gegeven van de vermoedelijke konstitutie der elementen van het periodiek systeem. Naar aanleiding hiervan zou ik eenige punten willen vermelden welke zich voordoen bij de berekening van deze systemen.

1) In de eerste plaats doet zich de vraag voor of men moet aannemen dat alle ringen in eenzelfde plat vlak liggen. Geeft men deze onderstelling voorloopig toe (beneden zal hierop nog nader teruggekomen worden), en neemt men ook aan dat alle ringen in eerste benadering cirkelvormig zijn, dan kan men vragen naar de *afmetingen* van het systeem. Om een eerste approximatie te verkrijgen kan men zich de ladingen van alle naar binnen gelegen ringen in de kern gekoncentreerd denken, zoodat men slechts de buitenste ring overhoudt, met b.v. s elektronen, welke roteeren om een kern met effektieve lading $s \,.\, e$. Voor de straal van deze ring vindt men:

$$R = \frac{n^2}{s - \sigma_s} \frac{h^2}{4\,\pi^2\, m\, e^2}$$

s is het aantal elektronen van de ring; n het aantal quanta van moment van hoeveelheid van beweging per elektron; σ_s is de reeds op bl. 136 genoemde grootheid, welke dient om de onderlinge afstooting van de elektronen van de ring in rekening te brengen [3]).

[1]) N.B. Deze § is ingelascht bij de uitgave.

[2]) L. VEGARD, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **19,** p. 344, 1917.

[3]) Houdt men rekening met de relativistische korrekties, dan wordt de formule vermenigvuldigd met:

$\sqrt{1 - \frac{4\,\pi^2\, e^4}{h^2\, c^2} \frac{(s - \sigma_s)^2}{n^2}} = \text{ca.} \sqrt{1 - 0{,}000053 \frac{(s - \sigma_s)^2}{n^2}}$. Bij een eerste be-

De faktor $\frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}$, welke gelijk is aan de straal van het waterstof-atoom in normalen toestand (vergelijk bl. 84) bedraagt: $0{,}53.10^{-8}$ cm. of 0,53 Å.E. Berekent men deze uitdrukking voor alle elementen volgens de tabel van VEGARD, dan verkrijgt men een kromme welke een geringe analogie vertoont met die der atoomvolumina: ze heeft maxima bij de elementen welke 1 elektron in de buitenste ring bezitten:

H	0,53	Å.E.
Li	2,12	
Na	2,12	
K	4,77	
Cu	4,77	
Rb	8,48	enz.

De elementen *Cu*, *Ag*, *Au* liggen echter bij de *minima* der atoomvoluminakromme, terwijl ze hier maxima zouden vormen. Verder is het verloop tusschen de maxima niet goed: b.v. van *Na* tot *Ar* daalt de straal van de buitenste ring steeds, terwijl de atoomvolumina reeds na *Al* weer beginnen te stijgen. En ten slotte stijgen de diameters bij de hoogere atoomgewichten te sterk [1].

Men kan nu natuurlijk de tegenwerping maken dat de atoomvolumina zooals deze gewoonlijk berekend worden (het quotient van atoomgewicht en soortelijk gewicht in vasten toestand) betrekking hebben op den *vasten* (gekristalliseerden) toestand, en dus mede bepaald worden door de krachten die de verschillende atomen in het kristalraster op elkaar uitoefenen. Maar men zal dan noodzakelijk tot de konklusie moeten komen dat de atomen, zoo ze tot een kristal zijn verbonden, *anders* gebouwd zijn, dan volgens het schema van VEGARD. Om dit toe te lichten wil ik het element koper nemen; volgens VEGARD bezit dit 5 ringen, met van binnen naar buiten gaande, resp. 3, 7, 8, 10 en 1

nadering kan men deze korrektie verwaarloozen. Voor de afleiding der formule vergelijke men b.v. P. DEBYE, Phys. Zeitschr. **18**, p. 276, 1917.

[1]) Dit sterke stijgen is een gevolg van het grooter worden der quantengetallen voor de buitenste elektronen, dat door VEGARD ondersteld wordt. — Bij een nauwkeuriger berekening — zie onder 2) — vindt men nog iets grootere waarden voor deze stralen.

elektron; de quantengetallen voor de elektronen zijn resp. 1, 2, 2, 3, 3. Voor de stralen der elektronenbanen vindt men ongeveer de volgende waarden[1]):

1e	ring:	$R_1 = 0{,}0186$	Å.E.
2e	„	$R_2 = 0{,}080$	„
3e	„	$R_3 = 0{,}148$	„
4e	„	$R_4 = 0{,}71$	„
5e	„	$R_5 = 5{,}5$	„

Nu is volgens W. H. BRAGG [2]) de struktuur van koper-kristallen (welke tot het reguliere stelsel behooren): kubisch met gecentreerde zijvlakken; de ribbe van een kubus welke atomen op de hoekpunten en op de middens der zijvlakken draagt is ca. 3,60 Å.E. [3]).

Men zal dus in ieder geval moeten aannemen dat het buitenste elektron in het kristal *niet* op bovengenoemde baan met straal R_5 rondloopt, doch een andere baan beschrijft, misschien om de verbindingslijn van twee naburige atomen of iets dergelijks. Bovendien zullen ook de elektronen der verschillende atomen, welke zich op de baan R_4 bevinden sterke storingen op elkaar uitoefenen. In nog hoogere mate komt dit uit bij zilver, waar de straal van de buitenste baan volgens VEGARD's model ca. 10 Å.E. bedraagt; de struktuur der kristallen is dezelfde als bij koper, terwijl de ribbe van een kubus 4,06 Å.E. is [4]).

2) *Spektra.*

Wil men iets berekenen over de spektra der elementen in verband met deze modellen, dan moet men volgens de theorie van BOHR *verschillende* bewegingstoestanden der elektronen in het oog vatten, en de energieverschillen tusschen deze bepalen. Men kan dus niet bij de onderstellingen van VEGARD blijven staan: de door VEGARD aangegeven schema's hebben betrekking op den „normalen" toestand van het atoom; daarnaast moeten er vele

[1]) Om een iets grootere nauwkeurigheid te verkrijgen zijn bij de berekening dezer stralen de onder 2) genoemde korrekties (zie bl. 169) reeds eenigermate in aanmerking genomen.

[2]) W. H. BRAGG, Phil. Mag. **28**, p. 355, 1914.

[3]) De kleinste afstand van twee koper-atomen bedraagt 2,65 Å.E.

[4]) L. VEGARD, Phil. Mag. **31**, p. 81, 1916.

andere mogelijk zijn, welke door bizondere omstandigheden kunnen optreden, en welke sprongsgewijze in elkaar en in den normalen toestand kunnen overgaan. Hoe men deze moet kiezen zal voor elk model afzonderlijk onderzocht moeten worden.

Bij berekeningen hierover — welke een groote nauwkeurigheid eischen — levert het veel gemak gebruik te maken van het volgende stelsel van eenheden, ontleend aan den normalen toestand van het waterstof-atoom:

eenheid van elektrische lading: de lading van het elektron e;

eenheid van massa: de massa van het elektron m;

eenheid van lengte: de straal van de baan van het elektron in het waterstof-atoom $a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}$ (= ca. 0,53.10^{-8} cm.);

eenheid van hoeksnelheid: $w = \frac{8\pi^3 m e^4}{h^3}$;

eenheid van tijd: $1/w = \frac{h^3}{8\pi^3 m e^4}$ (= ca. 2,4.10^{-17} sek.);

eenheid van kracht: $e^2/a^2 = \frac{16\pi^4 m^2 e^6}{h^4}$;

eenheid van moment van hoeveelheid van beweging: $m w a^2 = \frac{h}{2\pi}$;

eenheid van energie: $\varepsilon = \frac{4\pi^2 m e^4}{h^2}$. [1])

De energie van het waterstof-atoom is dan:

$-1/2 \,.\, \varepsilon = -\frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}$ (zie § 17). In de formules voor de frequenties der spektraallijnen komt voor de konstante van RYDBERG:

$$N = \frac{\varepsilon}{2hc} = 109737{,}18 \text{ (zie § 18)};$$

om de termen der spektraalformules te verkrijgen behoeft men dus slechts de dubbele energie van het systeem, uitgedrukt in ε als eenheid, te vermenigvuldigen met N. [2])

[1]) Deze eenheden voldoen aan de betrekkingen welke door de dimensieformules verlangd worden, zooals men gemakkelijk kan verifieeren.

[2]) Houdt men geen rekening met de beweging van de kern van het atoom, en met magnetische krachten e. d., dan is de konstante van RYDBERG N de eenige experimenteele konstante welke in de formules voor de spektra voorkomt. De bewegingen in het atoom zijn overigens slechts gekarakteriseerd door geheele getallen: de kernlading, de aantallen der elektronen op de ringen, en de quantengetallen.

Voor de berekening van de energie kan men, zoolang men slechts met de elektrostatische krachten werkt, en ook de relativistische korrekties verwaarloost, bovendien gebruik maken van de eigenschap dat voor mechanische systemen, waar de onderlinge krachten alleen bestaan in aantrekkingen en afstootingen volgens de wet van NEWTON-COULOMB, de totale energie gelijk is aan het tegengestelde van de gemiddelde waarde der kinetische energie [1]).

Daar verder volgens bl. 72:

$$2\,T = \Sigma P_i\,\omega_i = \frac{h}{2\,\pi}\,\Sigma n_i\,\omega_i$$

heeft men:
$$2\,E = -\,\frac{h}{2\,\pi}\,\Sigma n_i\,\omega_i$$

of wanneer alles in bovengenoemde eenheden is uitgedrukt:

$$2\,E = -\,\lambda = -\,\Sigma n_i\,\omega_i\,.$$

[1]) C. G. J. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik;
H. POINCARÉ, Méc. Cél. III, p. 279;
A. SOMMERFELD, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 456. — BOHR gebruikt deze eigenschap in het speciale geval van het waterstof-atoom.

De eigenschap berust op de volgende onderstellingen:

a) de kinetische energie T is homogeen van den 2en graad in de snelheden en is onafhankelijk van de koordinaten;

b) de potentieele energie V is homogeen van den (— 1)en graad in de koordinaten;

c) de bewegingen van het systeem zijn stabiel in den zin van definitie (1), bl. 135, zoodat men van gemiddelden van T en V kan spreken.

Dan is:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i - \Sigma\,\frac{\partial V}{\partial q_i}\,q_i = \frac{1}{2}\,\Sigma p_i\,\dot{q}_i + \Sigma \dot{p}_i\,q_i;$$

en dus ook, wanneer men het tijdgemiddelde door een streep aanduidt:

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\,\overline{\Sigma p_i\,\dot{q}_i} + \overline{\Sigma \dot{p}_i\,q_i}\,.$$

Verder is:
$$\overline{\frac{d}{dt}\,\Sigma(p_i\,q_i)} = \overline{\Sigma p_i\,\dot{q}_i} + \overline{\Sigma \dot{p}_i\,q_i} = 0,$$ op grond van **c**

Zoodat:
$$\overline{E} = -\,\frac{1}{2}\,\overline{\Sigma p_i\,\dot{q}_i} = -\,\overline{T}.$$

Zoodra men de relativistische termen of de magnetische werkingen, enz., in aanmerking neemt blijft de onderstelling **a**) in het algemeen niet gelden, waardoor ook deze eigenschap ongeldig wordt.

Als voorbeeld zou ik nu enkele opmerkingen willen maken over het *Natrium*-atoom. Volgens VEGARD zijn de 11 elektronen hiervan verdeeld over drie ringen, welke van binnen naar buiten gaande resp. 3, 7 en 1 elektron bevatten; de quantengetallen voor deze ringen zijn resp. 1, 2, 2. — Men moet nu zooals boven reeds gezegd is verschillende konfiguraties van het systeem beschouwen, en het ligt voor de hand voorloopig te blijven bij de onderstelling dat alle ringen in één plat vlak liggen, en de genoemde aantallen elektronen bezitten, doch aan te nemen dat het buitenste elektron zich op verschillende cirkelvormige banen kan bewegen, met quantengetallen 2, 3, 4, . . . ad inf. Deze banen vertoonen overeenkomst met die welke voor het waterstof-atoom onderzocht zijn.

Om nu de krachten die de verschillende elektronen op elkaar uitoefenen nauwkeuriger in aanmerking te nemen kan men als eerste schrede aldus te werk gaan. Ondersteld wordt dat alle elektronen met eenparige snelheden langs de genoemde cirkelbanen loopen. De invloed van de elektronen van eenzelfde ring op elkaar wordt, zooals reeds boven gedaan is, in rekening gebracht door van de kernlading Z $(=11)$ af te trekken het bedrag σ_s ($s =$ aantal elektronen van de ring), dat de resultante der afstootende krachten van de elektronen bepaalt. Om de invloed van de verschillende ringen op elkaar te vinden zullen de ladingen 3, 7 en 1 kontinu over de ringen verdeeld worden; men kan dan de formules toepassen voor de potentiaal en de elektrische kracht uitgeoefend door een geladen ring. Is s het aantal elektronen (en dus de lading) van de ring, R de straal, dan is de (radiale) kracht, uitgeoefend in een punt gelegen in het vlak van de ring op afstand r van het middelpunt:

voor: $\varrho_1 = \frac{r}{R} < 1$:

$$f_1 = -\frac{s}{R^2}\left[\frac{1}{2}\varrho_1 + \frac{9}{16}\varrho_1^3 + \frac{75}{128}\varrho_1^5 + \dots\right]$$

voor: $\varrho_2 = \frac{R}{r} < 1$:

$$f_2 = +\frac{s}{r^2}\left[1 + \frac{3}{4}\varrho_2^2 + \frac{45}{64}\varrho_2^4 + \frac{175}{256}\varrho_2^6 + \dots\right] \text{ [1]}$$

[1]) Deze formules worden in verschillende leerboeken opgegeven.

De formules voor het Natrium-atoom worden nu, zoo men de stralen der ringen voorstelt door R_1, R_2, R_3, de hoeksnelheden der elektronen door ω_1, ω_2, ω_3, en door n het quantengetal van het elektron op de 3e ring:

$$\omega_1^2 R_1 = \frac{11 - \sigma_3}{R_1^2} + \frac{7}{R_2^2}\left[\frac{1}{2}\frac{R_1}{R_2} + \frac{9}{16}\frac{R_1^3}{R_2^3} + \frac{75}{128}\frac{R_1^5}{R_2^5} + \ldots\right] + $$
$$+ \frac{1}{R_3^2}\left[\frac{1}{2}\frac{R_1}{R_3} + \frac{9}{16}\frac{R_1^3}{R_3^3} + \ldots\right]$$

$$\omega_2^2 R_2 = \frac{8 - \sigma_7}{R_2^2} - \frac{3}{R_2^2}\left[\frac{3}{4}\frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{45}{64}\frac{R_1^4}{R_2^4} + \frac{175}{256}\frac{R_1^6}{R_2^6} + \ldots\right] + $$
$$+ \frac{1}{R_3^2}\left[\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_3} + \frac{9}{16}\frac{R_2^3}{R_3^3} + \frac{75}{128}\frac{R_2^5}{R_3^5} + \frac{1225}{2048}\frac{R_2^7}{R_3^7} + \ldots\ldots\right]$$

$$\omega_3^2 R_3 = \frac{1}{R_3^2} - \frac{3}{R_3^2}\left[\frac{3}{4}\frac{R_1^2}{R_3^2} + \frac{45}{64}\frac{R_1^4}{R_3^4} + \ldots\ldots\right] - $$
$$- \frac{7}{R_3^2}\left[\frac{3}{4}\frac{R_2^2}{R_3^2} + \frac{45}{64}\frac{R_2^4}{R_3^4} + \frac{175}{256}\frac{R_2^6}{R_3^6} + \frac{11025}{16384}\frac{R_2^8}{R_3^8}\ldots\ldots\right]$$

Hierbij komen de quantenformules:

$$\omega_1 R_1^2 = 1$$
$$\omega_2 R_2^2 = 2$$
$$\omega_3 R_3^2 = n$$

De dubbele totale energie van het systeem wordt tenslotte:

$$-\lambda = -(3\,\omega_1 + 14\,\omega_2 + n\,\omega_3)$$

Het oplossen van bovenstaande vergelijkingen moet numeriek geschieden; voor een paar waarden van n heb ik dit uitgevoerd, en gevonden:

$n = 2$	$\lambda = 382{,}606169$
3	382,487593
4	382,440868
∞	$\lambda_g = 382{,}378804$

De bedragen λ moeten nu, vermenigvuldigd met N, termen opleveren van de spektraalformules. Het komt hierbij er echter op aan wat men als nultoestand aanneemt voor de vaststelling van de waarde van E; boven is genomen de toestand waarbij alle elektronen van het atoom naar het oneindige uiteengehaald zijn; het lijkt me echter meer passend om de toestand waarbij

alleen het buitenste elektron in het oneindige is, doch de beide binnenste ringen nog aanwezig zijn, als nultoestand aan te nemen. Men heeft dan voor de energie:

	$l = \lambda - \lambda_g$	$L = N \,.\, l$
$n = 2$	0,227365	24950 [1]
3	0,108789	11938
4	0,062064	6811

De laatste rij getallen L zou nu een reeks van termen moeten voorstellen uit de spektraalformules van Natrium. In H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe, is opgegeven (p. 152, vgl.):

$V\,P(m)$	$V\,D(m)$	$V\,S(m)$
24481 [2]		41445
11176	12274	15706
6403	6897	8246

Een bevredigende overeenstemming met een dezer reeksen is niet aanwezig; het beste sluiten zich de waarden van L aan bij de P-termen, wanneer men tenminste de eerste term ($n = 2$) er bij wil nemen.

Nu is bij de bovenstaande berekening evenwel slechts gelet op de gemiddelde werking der ringen; in werkelijkheid treden echter doordat de standen der verschillende elektronen ten opzichte van elkaar voortdurend wisselen, krachten op die periodiek van grootte en richting veranderen, welke veroorzaken dat de elektronen geen eenparige cirkelbewegingen uitvoeren, maar veel ingewikkelder banen beschrijven. Deze periodieke storingen blijken een belangrijken invloed te hebben op de waarde van de energie. Vooral zijn hierbij van gewicht de storingen door het buitenste elektron op de elektronen der binnenste ringen uitgeoefend. Om de werking hiervan te beoordeelen kan men een

[1]) Een iets nauwkeurigere berekening, waarbij de waarden der verschillen $l = \lambda - \lambda_g$ direkt zijn bepaald, gaf:

$n = 2$: $l =$	0,227368	$L =$ 24950,7
3	0,108791	11938,4
4	0,062057	6809,9

De verschillen met de bovengegeven waarden zijn dus gering.

[2]) Hier is het gemiddelde genomen van de beide P-reeksen (de P-termen zijn doublets, wat samenhangt met de dupliciteit van de lijnen der hoofdreeks van Natrium).

koordinatensysteem invoeren, dat b.v. ronddraait met de hoeksnelheid ω_2 van de tweede ring. Ten opzichte van dit koordinatensysteem is de gemiddelde beweging van de elektronen der tweede ring nul: het buitenste elektron heeft de hoeksnelheid $\omega_3 - \omega_2$. Men ziet gemakkelijk in, dat onder den invloed van de afstooting van het buitenste elektron, welke van de orde $1/R_3^2$ is, elk elektron van de tweede ring een kleine ellips moet beschrijven, met de frequentie $\gamma = \omega_3 - \omega_2$; de fazen dezer bewegingen verschillen voor de opvolgende elektronen $\frac{2\pi}{7}$ [1]). Aan den anderen kant blijkt de invloed van de tweede ring op het buitenste elektron veel geringer te zijn: doordat deze ring 7 elektronen bevat, hebben de storingen een zeven maal zoo groote frequentie en zijn ze eerst van de orde R_2^7/R_3^9. Analoge opmerkingen gelden met betrekking tot de eerste ring.

Om deze storingen te berekenen lijkt het mij het beste de methode der onbepaalde koefficienten te gebruiken. Men ontwikkelt de bewegingsvergelijkingen in reeksen, en substitueert dan voor de koordinaten der elektronen reeksontwikkelingen van den vorm:

$$r_i = R + \alpha \cos(Q_i - Q_{11}) + \ldots$$
$$\varphi_i = Q_i + \frac{\beta}{R} \sin(Q_i - Q_{11}) + \ldots$$

waarbij men het aantal der termen kan kiezen in verband met de storingen die men in rekening wil brengen, en met de nauwkeurigheid die de berekening vereischt. De R's zijn de stralen der gemiddelde cirkelbanen; de Q's de „middelbare anomalieën" der elektronen [2]), met de frequenties (middelbare bewegingen): $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; de α's en β's zijn konstanten. Voegt men deze uitdrukkingen in de op nul herleide vergelijkingen in, en stelt men de konstante gedeelten en de koefficienten der verschillende goniometrische termen gelijk nul, dan vindt men vergelijkingen voor deze onbekenden. Hierbij komen nog de drie quantenvoorwaarden (zonder welke het probleem onbepaald zou zijn), die een anderen vorm krijgen dan eerst: op grond van de algemeene vergelijking van bl. 47 luiden ze:

[1]) Men moet hierbij rekening houden met de *Coriolis*-krachten, daar met een roteerend koordinatensysteem gewerkt wordt.

[2]) Q_{11} heeft betrekking op het buitenste elektron.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dQ_k \cdot \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = n_k \frac{h}{2\pi} \text{ of } = n_k \text{ in de gebruikte eenheden.}$$

Berekent men deze uitdrukkingen, dan krijgt men behalve de hoofdterm ωR^2, termen welke de storingskoefficienten $\alpha, \beta \ldots$ bevatten.

Berekeningen hierover heb ik onderhanden; door hun groote bewerkelijkheid is het mij echter nog niet gelukt ze tot een einde te brengen.

Een bizonderheid dient hier echter nog vermeld te worden: de periode en de grootte van de storingen hangt er van af of de bewegingsrichting van het buitenste elektron *dezelfde* is als die van de binnenste ringen (voorloopig onderstellende dat de twee binnenste ringen steeds in dezelfde richting rondloopen) of er *tegengesteld* aan is. Dit heeft tengevolge dat men voor elke waarde van n *twee* bewegingstoestanden, en dus *twee* termen van de spektraalformule vindt. Het is mogelijk dat dit de verklaring zou kunnen zijn van de dupliciteit der P-termen, welke de dupliciteit van de lijnen der hoofdreeks van Natrium veroorzaakt. Over de orde van grootte van het verschil kan ik echter nog niet oordeelen; uit de voorloopige berekeningen lijkt het mij grooter te worden, dan met de waarnemingen zou overeenkomen.

Bij deze berekeningen zal men verder nog in aanmerking moeten nemen: de beweging van de atoomkern (tenminste bij de lichtere elementen); de relativistische korrekties en de magnetische werkingen die de elektronen op elkaar uitoefenen. Wat de relativistische korrekties betreft, deze lijken me van dezelfde orde van grootte te zijn als bij het waterstof-atoom. Ze zijn wel groot voor de beide binnenste ringen, maar de invloed hiervan valt grootendeels weg, doordat men slechts de verschillen $l = \lambda - \lambda_g$ behoeft te kennen. Met de magnetische werkingen zal het vermoedelijk evenzoo zijn. (Zie in verband hiermee ook het onderzoek van SOMMERFELD, vermeld in § 28.) Neemt men de relativistische en de magnetische korrekties in aanmerking, zoo wordt de berekening zeer veel lastiger, doordat de op bl. 168 vermelde eigenschap dan niet meer geldt.

Men kan nu verder nog aannemen dat de banen der elektronen elliptisch zijn, of dat ze niet alle in één plat vlak liggen. Wat het eerste betreft, elliptische banen zullen aanleiding geven tot groote moeilijkheden bij de berekening, daar de door de quantenformules

bepaalde excentriciteiten in het algemeen groot zijn [1]), zoodat de afstanden der elektronen tot elkaar sterk veranderen. Zelfs kan het gebeuren, dat de banen door elkaar heen zouden gaan. (Zie de opmerking op bl. 161.)

Cirkelvormige banen in verschillende vlakken geven niet zulke groote moeilijkheden [2]). Men kan b.v. aannemen dat de twee binnenste ringen steeds in hetzelfde vlak liggen [3]) en dat het baanvlak van het buitenste elektron ten opzichte hiervan helt. De hellingshoek wordt dan door quantenvoorwaarden bepaald. Is M het totale moment van hoeveelheid van beweging van het systeem, m_1 dat van alle elektronen der binnenste ringen samen, m_2 dat van het buitenste elektron alleen, en is i de hoek tusschen m_1 en m_2, wat men in eerste benadering kan nemen voor de hoek tusschen de baanvlakken, dan is:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1\, m_2 \cos i.$$

M is een konstante, en is gelijk aan een geheel aantal quanta [4]): m_1 en m_2 zijn niet exakt konstant; hun gemiddelde waarden moeten echter op grond van de ingevoerde quantenformules ongeveer zijn:

$$m_1 = 3 \,.\, 1 + 7 \,.\, 2 = 17$$
$$m_2 = n$$

Zoodat de hellingshoek bepaald is door:

$$\cos i = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2\, m_1\, m_2}$$

Is b.v. $n = 2$, dan kan M varieeren van 19 tot 15; er zijn dus 5 verschillende standen mogelijk, waarvoor:

[1]) Vergelijk voor het waterstof-atoom bl. 82; de verhouding b/a van de assen der elliptische baan is gelijk aan het quotient van twee quantengetallen.

[2]) Voor de ontwikkeling der z.g. „storingsfunktie" voor deze banen zie men: Encycl. der Math. Wiss. VI, 2, 13, H. v. ZEIPEL, Die Entwicklung der Störungsfunktion, speciaal p. 577 en vgl.

[3]) Het is duidelijk dat de elektronen van de binnenste ringen zich niet exakt in een plat vlak zullen bewegen. Men kan evenwel op elk oogenblik een vlak aanwijzen, waarvan gedurende korten tijd de bewegingen zoo weinig mogelijk afwijken. Met het baanvlak van het buitenste elektron wordt het oskuleerende vlak bedoeld, zooals dat in de astronomie beschouwd wordt. Deze vlakken staan niet vast in de ruimte, doch veranderen van stand (precessie- en nutatiebewegingen om de as van het totale moment van hoeveelheid van beweging).

[4]) Zie bl. 71.

$$
\begin{aligned}
i = \; & 0^\circ \\
& 63^\circ \\
& 93^\circ \\
& 123^\circ \\
& 180^\circ.
\end{aligned}
$$

Dit vergroot het aantal mogelijke banen nog meer.

3) *Invloed van een magnetisch veld.*

Zoo men zich beperkt tot termen van den 1en graad in de veldsterkte, en de kern van het atoom als vast staand beschouwt, kan men den invloed van een uitwendig magnetisch veld op het systeem gemakkelijk in rekening brengen. Zijn x_i, y_i, z_i de rechthoekige koordinaten der elektronen, u_i, v_i, w_i de hoeveelheden van beweging, en is het magnetisch veld volgens de z-as gericht, dan is, in analogie met de formules van bl. 104, de funktie van LAGRANGE voor het systeem:

$$L = \frac{m}{2} \sum_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \Omega - \frac{e\,\mathbf{M}}{2\,c} \sum_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

en de funktie van HAMILTON:

$$H = \frac{1}{2\,m} \sum_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \Omega + \gamma \sum_i (x_i\, v_i - y_i\, u_i)$$

waarin: $\gamma = \dfrac{e\,\mathbf{M}}{2\,m\,c}$, en Ω = potentieele energie.

Door middel van de kontakttransformatie:

$$\left\{ \begin{aligned} & W = \sum_i \left\{ U_i (x_i \cos \gamma\, t - y_i \sin \gamma\, t) + V_i (x_i \sin \gamma\, t + y_i \cos \gamma\, t) + W_i z_i \right\} \\ & \qquad X_i = \frac{\partial W}{\partial U_i}, \text{ enz.}; \; u_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \text{ enz.} \end{aligned} \right.$$

kan men overgaan op het systeem $X\,Y\,Z$, dat ten opzichte van het eerste met konstante snelheid $-\gamma$ om de z-as roteert. Dan wordt de funktie van HAMILTON [1]):

$$K(X\,Y\,Z\,U\,V\,W) = H - \frac{\partial W}{\partial t} =$$

$$= H - \gamma\, M_z = \frac{1}{2\,m} \sum_i (U_i^2 + V_i^2 + W_i^2) + \Omega\,(X\,Y\,Z)$$

[1]) Zie E. T. WHITTAKER, Anal. Dynamics, p. 354.

(M_z is het moment van hoeveelheid van beweging van het systeem om de z-as). Beschrijft men dus de bewegingen met de variabelen $X\,Y\,Z\,U\,V\,W$, dan worden de vergelijkingen dezelfde als die welke gelden voor de variabelen $x\,y\,z\,u\,v\,w$ bij afwezigheid van het magnetisch veld, wat een bekend resultaat is. De quantenvoorwaarden voor de bewegingen in het magnetisch veld, beschreven met eerstgenoemde variabelen, zullen dus ook dezelfde zijn als die voor de bewegingen buiten het veld, beschreven met het tweede stel variabelen. Als extra quantenvoorwaarde zal men nu echter nog moeten aannemen dat het moment van hoeveelheid van beweging M_z om de z-as (welke de richting van het veld aangeeft) gelijk is aan een geheel veelvoud van $h/2\pi$ (in de gewone eenheden uitgedrukt).

Heeft men dus voor het systeem bij afwezigheid van een magnetisch veld verschillende quantenbewegingen gevonden met energieën: $E_1, E_2, E_3, \ldots,$ dan vindt men bij aanwezigheid van het veld dezelfde bewegingen gekombineerd met een eenparige rotatie om de veldrichting. Bij deze bewegingen heeft $K(X\,Y\,Z\,U\,V\,W)$ de waarden $E_1, E_2, E_3, \ldots$; de energie van het systeem is dus:

$$E = H = K + \gamma M_z = E_i + n\frac{\gamma h}{2\pi}$$

De invloed van het magnetisch veld op de spektraallijnen is dus, bij de gebruikte graad van nauwkeurigheid, dezelfde als bij het waterstof-atoom, zoodat ook hier geen middel schijnt te zijn om het anomale ZEEMAN-effekt te verklaren.

4) Voor chemische beschouwingen in verband met deze modellen wordt verwezen naar het artikel van VEGARD.]

§ 29. OPMERKING OVER DE QUANTENTHEORIE VAN ROTEERENDE MOLEKULEN.

Voor de theorie der soortelijke warmte van meeratomige gassen is het noodig behalve de translatie-beweging der molekulen ook hun inwendige bewegingen te kennen. In de eerste plaats komt hierbij in aanmerking de *rotatie van het molekuul als geheel*; verder de trillingen van de atoomkernen ten opzichte van elkaar. Ofschoon het niet algemeen bewezen is kan men met vrij groote zekerheid het vermoeden uitspreken dat de snelle bewegingen der elektronen bij gewone temperatuur zoo weinig energie opnemen, dat hun bijdrage in de soortelijke warmte te verwaarloozen is [1]).

De rotaties der molekulen zijn verder van groot belang voor de theorie van het magnetisme, voor de theorie der bandenspektra, enz.

De behandeling van roteerende molekulen in overeenstemming met de theorie der quanta is voornamelijk bestudeerd door P. EHRENFEST, K. SCHWARZSCHILD en P. S. EPSTEIN; eenigszins terzijde hiervan staat een studie van F. KRÜGER [2]).

[1]) Men zie b.v. K. F. HERZFELD, Zur Statistik des Bohr'schen Atommodells, Ann. d. Phys. **51**, p. 261, 1916. (Cf. beneden § 42.)

Men denke verder aan de theorie der soortelijke warmte van een ensemble van harmonisch trillende oscillatoren (PLANCK); bij een bepaalde temperatuur is de energie-inhoud en de soortelijke warmte des te kleiner, naarmate de frequentie hooger is.

[2]) P. EHRENFEST, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, p. 451, 1913. — K. SCHWARZSCHILD, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 564, 1916. — P. S. EPSTEIN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 398, 1916. —

Het verband van het werk van F. KRÜGER (Ann. d. Phys. **50**, p. 346, 1916; **51**, p. 450, 1916) met dat van SCHWARZSCHILD en EPSTEIN zal beneden (opm. 1) besproken worden.

Verder dient gewezen te worden op een onderzoek van PLANCK (Ann. d. Phys. **50**, p. 412, 1916). PLANCK volgt een geheel andere methode, en komt ook tot een andere quantenformule. De door hem gebezigde methode schijnt mij echter toe niet eenduidig te zijn; ik meen dat men met behulp van een analoge redeneering als de zijne ook tot de formules van SCHWARZSCHILD en EPSTEIN kan komen.

Enkele uitkomsten van hun onderzoek zullen hier kort vermeld worden.

Men neemt aan dat het molekuul als een vast lichaam beschouwd mag worden, zoodat de trillingen der atoomkernen e. d. ten opzichte van elkaar verwaarloosd worden [1]). Men heeft dus te doen met het probleem der beweging van een asymmetrische of een symmetrische tol, welke niet door uitwendige krachten wordt beïnvloed.

Het blijkt dat men voor de bewegingsvergelijkingen een oplossing kan vinden, uitgedrukt met behulp van hoekvariabelen, en men kan aantoonen dat er slechts twee hoekvariabelen zijn tusschen welker middelbare bewegingen geen rationale betrekking bestaat. Dit geldt zoowel voor de asymmetrische als voor de symmetrische tol, en volgt uit de algemeene eigenschappen der Poinsot-beweging [2]).

In het volgende zal de afleiding der formules gegeven worden voor een symmetrische tol; voor de asymmetrische wordt verwezen naar het geciteerde artikel van Epstein.

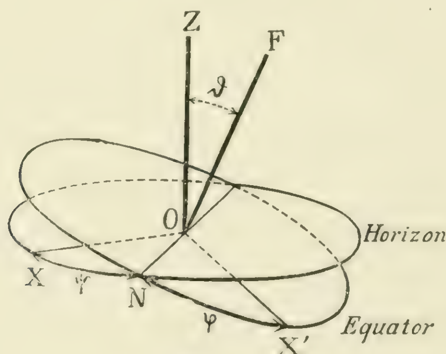


Fig. 8.

OZ = vertikaal; OX = vaste richting in het horizontale vlak.

OF = figuur-as van de tol; OX′ : lijn welke vast met de tol verbonden is.

$\angle ZOF = \vartheta$; $\frown XN = \psi$; $\frown NX' = \varphi$.

[1]) Vergelijk met betrekking tot het waterstof-molekuul beneden opm. 2.

[2]) De Poinsot-beweging kan beschreven worden als de beweging van een ellipsoïde, waarvan het centrum vast is, en dat zonder glijden langs een vast vlak rolt. Het probleem vertoont een formeele analogie met de relativistische Kepler-beweging, waarbij het baanvlak vast staat. Evenals bij de Kepler-bewe-

Als koordinaten worden gebruikt de hoeken van EULER: ϑ, ψ, φ (zie fig. 8). De funktie van HAMILTON wordt, hierin uitgedrukt:

$$H = \frac{p_\vartheta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Pas hierop de kontakttransformatie toe, bepaald door:

$$p_\vartheta = \partial W/\partial\vartheta, \text{ enz.}; \; Q_k = \partial W/\partial P_k, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots (23)$$

$$W = \int^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{P_2^2 - P_1^2 - \frac{(P_3 - P_1\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}} + P_1\varphi + P_3\psi \quad \ldots (24)$$

dan gaat H over in:

$$H = K(P) = \frac{1}{2A}P_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)P_1^2 \quad \ldots\ldots (25)$$

Beteekenis der ingevoerde hoekvariabelen (zie fig. 9):

Q_1 = wenteling van de tol om de figuur-as;
Q_2 = precessie-beweging van de figuur-as om de invariabele lijn;
Q_3 = azimuth van de invariabele lijn.
P_1 = komponente van het moment van hoeveelheid van beweging langs de figuur-as;
P_2 = totaal moment van hoeveelheid van beweging;
P_3 = komponente hiervan langs de vertikaal (z-as).

Verder is: $\cos\alpha = P_1/P_2$; $\cos\beta = P_3/P_2$ [1]).

Het is geschikt nog de volgende substitutie uit te voeren [2]):

$$\begin{array}{ll} P_1 = \mathbf{P}_1 & Q_1 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \\ P_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 & Q_2 = \mathbf{Q}_2 \end{array} \quad \ldots\ldots (26)$$

ging wordt ook hier de stand van het vlak ten opzichte van een in de ruimte gegeven koordinatensysteem vastgelegd door de komponente der hoeveelheid van beweging in de richting der z-as, en door een hoek Q_3 welke het azimuth van de normaal op dit vlak (de „invariabele lijn") bepaalt (eventueel de stand van de knoopenlijn). Vergelijk § 17 en voor het geval v/d symm. tol bl. 179 en fig. 9.

De middelbare beweging van Q_3 is 0 (het vlak staat vast in de ruimte).

Opmerking. PLANCK (l.c.) komt tot een hiermee overeenstemmend resultaat; PLANCK drukt dit uit door te zeggen: twee der drie vrijheidsgraden zijn koherent.

[1]) De hoeken α, Q_2 en Q_1 vormen een koordinatenstelsel van EULER met betrekking tot de invariabele lijn en de „ekliptika". Vergelijk figuur 9.

[2]) Zie K. SCHWARZSCHILD, l. c. p. 566.

waardoor (25) overgaat in:

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_1^2 \frac{A - C}{2AC} + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 \frac{1}{2A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$\mathbf{P}_1$ is de komponente van het moment van hoeveelheid van beweging langs de figuur-as; dit bepaalt als het ware de eigen-

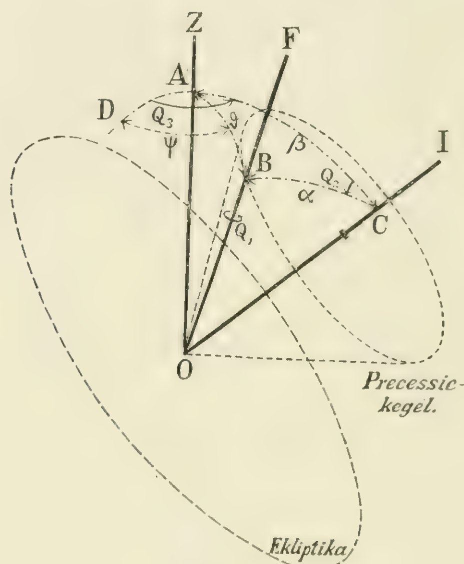


Fig. 9.

OZ = vertikaal; OI = richting van het totale moment van hoeveelheid van beweging (invariabele lijn); OF = figuur-as van de tol.

$\frown$ AB = ϑ; $<$ DAB = ψ.

$\angle$ ACB = Q_2 ; $\angle$ DAC = Q_3 ; $\frown$ BC = α ; $\frown$ AC = β.
(P_1 behoort bij de richting OF; P_2 bij de richting OI ; P_3 bij de richting OZ).

lijke rotatie van de tol. $\mathbf{P}_2$ kan men beschouwen als het aandeel der precessie-beweging in het totale moment van hoeveelheid van beweging.

Hoeksnelheid der precessie:

$$\dot{\mathbf{Q}}_2 = \omega_2 = \frac{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Openingshoek van de precessie-kegel:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

De beide intensiteitskonstanten $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_2$ moeten nu gequantiseerd worden; men krijgt dus voor de energie uitgedrukt in de quantengetallen:

$$\alpha = \frac{h^2}{8\pi^2} \cdot \left\{ n_1^2 \cdot \frac{A - C}{A\,C} + (n_1 + n_2)^2 \cdot \frac{1}{A} \right\} \text{[1]} \quad \ldots\ldots (30)$$

Uit formule (29) blijkt dat de openingshoek van de precessie-kegel slechts bepaalde diskrete waarden kan krijgen.

Opmerkingen.

1) Men kan het volgende bizondere geval beschouwen: $\mathbf{P}_1$ is zeer groot en heeft een vaste waarde; $\mathbf{P}_2$ is klein ten opzichte van $\mathbf{P}_1$, en kan verschillende waarden krijgen. Dan kunnen de benaderingsformules opgesteld worden:

$$\text{energie} = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2\,C} + \frac{\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2}{A} + \ldots = \textit{konstante} + \omega_2\,\mathbf{P}_2 + \ldots\ldots (27a)$$

$$\text{hoeksnelheid der precessie: } \omega_2 = \text{ca. } \frac{\mathbf{P}_1}{A} = \textit{konstante} \quad \ldots (28a)$$

$$\left[\text{openingshoek van de precessiekegel: } \alpha = \text{ca. } \sqrt{\frac{2\,\mathbf{P}_2}{\mathbf{P}_1}} \quad \ldots (29a)\right]$$

Hieruit blijkt dat men in dit geval de precessie-beweging kan opvatten als een *kleine trilling* om de stationnaire wenteling om de figuur-as, voor welke trilling bij benadering dezelfde formules gelden als voor een harmonisch trillende resonator [2]).

Dit is de gedachte die naar mij schijnt ten grondslag ligt aan het werk van F. Krüger [3]). Zoolang men de precessie als een kleine trilling kan beschouwen gelden voor haar precies dezelfde formules als voor een lineaire resonator; bij hoogere

[1]) K. Schwarzschild, l. c. p. 566; P. S. Epstein, l. c. p. 399 (en 406).
Epstein stelt ook nog een geheel andere quantenformule voor de tol voor (l. c. p. 407); deze wijkt echter geheel af van alle hier ontwikkelde principes van de quantentheorie en lijkt mij niet goed te verdedigen. (Dit is ook opgemerkt door Prof. Lorentz op zijn kollege Quantentheorie, 1916/1917).

[2]) Vergelijk in verband hiermee de algemeene formule (13) in § 26.

[3]) F. Krüger, Ann. d. Phys. **50**, p. 346, 1916.

temperaturen, waar de equipartitie-wet geldt, zal een ensemble van systemen welke dergelijke precessie-bewegingen uitvoeren evenveel energie opnemen als een ensemble van lineaire resonatoren: RT calorie per grammolekuul, zoodat de soortelijke warmte der precessie-beweging dan gelijk is aan: $R =$ ca. 2 cal/gr. [1]).

Bij het waterstof-molekuul mag men echter de precessie-beweging *niet* als een kleine trilling opvatten: volgens de theorie van BOHR en DEBYE is hier: $\mathsf{P}_1 = 2 \,.\, h/2\pi$ (elk elektron heeft het moment van hoev. van beweging: $h/2\pi$), zoodat reeds bij kleine waarden van n_2 de hoek α groot wordt (verg. 29). Dan moet men wel degelijk rekening houden met het kwadraat van P_2, en moeten formules (27) en (30) gebruikt worden.

2) *Toepassing op het model van het waterstof-molekuul.*

Indien men bovenstaande formules wil toepassen op het model van het H_2-molekuul moet men zich eerst afvragen, of dit model, dat zeker geen vast lichaam is, ook precessie-bewegingen kan uitvoeren. Deze vraag is opgeworpen door RUBINOWICZ [2]); door hem zijn de kleine trillingen van het model om de stationnaire beweging onderzocht. Ziet men af van de trillingen met betrekkelijk hooge („ultraviolette") frequenties (waaronder ook een instabiele trilling voorkomt), dan zijn voor de theorie der soortelijke warmte van belang:

a) een trilling welke overeenstemt met de reguliere precessie van het molekuul; de frequentie hiervan is dezelfde als die welke door formule (28a) gegeven wordt;

b) een trilling waarbij de beide kernen zich afwisselend naar elkaar toe en van elkaar af bewegen in de richting hunner verbindingslijn, terwijl de elektronen lange, smalle ellipsen beschrijven in hun baanvlak. De frequentie hiervan is echter nog vrij hoog, zoodat deze trilling bij gewone temperaturen niet veel tot de soortelijke warmte zal bijdragen [3]).

[1]) KRÜGER maakt hierbij de opmerking: De eigentrilling van de reguliere precessie van een symmetrisch lichaam heeft de bizonderheid dat ze twee graden van vrijheid bezit, doch dat ze alleen kinetische, en geen potentieele energie representeert. Aan den anderen kant heeft een lineaire oscillator slechts één graad van vrijheid; hier is echter de gemiddelde waarde van de potentieele energie dezelfde als die van de kinetische energie.

[2]) A. RUBINOWICZ, Phys. Zeitschr. **18**, p. 187, 1917 (zie ook boven bl. 155).

[3]) Een schatting hiervan kan men krijgen door de z.g. „karakteristieke tem-

Uit het bestaan van de „precessie-trilling" *a)* zou men mogen besluiten dat de afgeleide formules op H_2 kunnen worden toegepast. Hierbij komt men echter op het bezwaar: de door RUBINOWICZ afgeleide formule geldt slechts voor kleine trillingen, en stemt daarvoor overeen met de formules van SCHWARZSCHILD-EPSTEIN. Mag men nu onderstellen dat de formules van SCHWARZSCHILD en EPSTEIN ook voor *groote* precessie-bewegingen op het waterstof-molekuul mogen worden toegepast? Boven is reeds vermeld dat voor waarden van $n_2 = 1, 2$, enz., de openingshoek van de precessie-kegel een belangrijke grootte krijgt.

Het komt me voor, dat men hierin de oorzaak moet zoeken van het verschil tusschen EPSTEIN's resultaat voor de soortelijke warmte van waterstof en de experimenteele uitkomsten [1]). Dat men het model van het waterstof-molekuul behandelt als een symmetrische tol, terwijl in werkelijkheid de beide traagheidsmomenten om assen in het baanvlak der elektronen een weinig verschillen, geeft, voor zoover ik kan beoordeelen, geen merkbare fout in de formules.

peratuur" behoorende bij deze frequentie te berekenen; deze bedraagt ongeveer: $\Theta = h\nu/k =$ ca. $4,8 . 10^{-11} . 1,9 . 10^{14} =$ ca. 9000°.

[1]) Vermoedelijk zullen ook enkele onderstellingen welke EPSTEIN gebruikt bij het opstellen der statistische formules nader onderzocht moeten worden; zoo b.v. de kwestie of n_1 en n_2 slechts *even* waarden kunnen krijgen (EPSTEIN, l. c. p. 400, 403), en de vraag: welke gewichten moet men aan de verschillende quantenbewegingen toekennen? (EPSTEIN, l. c. p. 403). Men vergelijke in verband met het laatste de opmerkingen over ontaarde systemen in § 41. Beschouwt men de behandelde beweging van de symmetrische tol als de ontaarding van een beweging in een richtend (b.v. een elektrisch) krachtveld, dan zou men er toe komen aan de beweging met de quantengetallen n_1, n_2 het gewicht: $2(n_1 + n_2) + 1$ toe te kennen. (Afleiding: bij aanwezigheid van een richtend krachtveld moet ook de komponente van het moment van hoeveelheid van beweging in de richting der krachtlijnen gequantiseerd worden. Het quantengetal n_3 hiervoor kan alle geheele waarden van 0 tot en met $\pm(n_1 + n_2)$ doorloopen).

§ 30. VERSCHILLENDE OPMERKINGEN.

1) Door de onderzoekingen van J. J. THOMSON en anderen over de kanaalstralen is gebleken dat hierin behalve neutrale, zeer veel positief en negatief geladen atomen en molekulen aanwezig zijn [1]). Deze ionen ontstaan uit een neutraal systeem door de

[1]) Zie o. a. J. J. THOMSON, Rays of Positive Electricity (London 1913). Verder artikelen van T. RETSCHINSKY (b.v. Ann. d. Phys. **50,** p. 369, 1916) en anderen.

Eenige interessante resultaten van het onderzoek van J. J. THOMSON zijn:

a) Molekulen hebben zeer zelden een negatieve lading, terwijl positief geladen molekulen zeer gewoon zijn (l. c. p. 40).

b) Wat de atomen betreft is bij *He*, *Ne*, *Ar*, *Kr*, *Xe*, *N* en *Hg* *nooit* een negatieve lading waargenomen.

c) Bij waterstof is gevonden: H, H^+, H^-, H_2, $H_2{}^+$, $H_2{}^-$ (het laatste zeer zelden; l. c. p. 40 en Phil. Mag. **24,** p. 253, 1912).

d) Atomen met *multipele* ladingen.

Kwik-atomen zijn waargenomen met 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7 ladingen; atomen met 8-voudige lading moeten aanwezig zijn, doch zijn niet direkt gezien (l. c. p. 48). — Het maximale aantal ladingen schijnt voornl. van het atoomgewicht af te hangen en niet van de chemische eigenschappen (l. c. p. 53):

Hg (200) kan tot 8 ladingen hebben;
Kr (82) tot 4 of 5;
Ar (40) tot 3;
Ne (20) tot 2;
O (16) en *N* (14) tot 2, misschien zelden 3;
He (4) tot 2;
H (1) heeft nooit meer dan 1 lading (l. c. p. 53).

De beide laatste resultaten zijn in overeenstemming met de theorie van BOHR.

e) J. J. THOMSON meent in de kanaalstralen ook nog onbekende elementen gevonden te hebben: een met een atoomgewicht **22** (misschien een isotoop van NEON, l. c. p. 116) en een met een atoomgewicht **3** (X_3), l. c. p. 115, vgl.) (Zie over Metaneon ook: F. ASTON, Phys. Zeitschr. **14,** p. 1303, 1913.)

Opmerking. Met betrekking tot deze nieuwe elementen vergelijke men ook de reeds boven aangehaalde onderzoekingen van J. W. NICHOLSON over de spektra van eenvoudige atoommodellen (zie boven bl. 152; zie speciaal Monthly Notices **74,** p. 623, 1914 over de lijn λ 3729, welke in nevelvlekken voorkomt, en volgens onderzoekingen van BOURGET, FABRY en BUISSON behoort aan een element met atoomgewicht **3** (Comptes Rendus 6 April 1914.)

opname of afgifte van een of meer elektronen; het aantal der elektronen dat opgenomen of afgegeven kan worden hangt vermoedelijk nauw samen met de konfiguratie van het elektronensysteem om de kern. Enkele onderzoekingen hierover zijn door BOHR gedaan; tot bepaalde theoretische resultaten is hij echter niet gekomen (evenmin voor de kwestie der chemische valentie, die misschien verband hiermee houdt).[1])

2) Van groot belang zal het atoommodel van RUTHERFORD en BOHR zijn voor de theorie der gassen en van de toestandsvergelijking. Het schijnt tenminste principieel mogelijk om voor eenvoudige gassen zooals Waterstof en Helium theoretisch de bouw en de afmetingen der molekulen aan te geven, zoodat men de attraktie tusschen de molekulen, hun volume, enz., als bekende grootheden kan beschouwen, en met behulp daarvan de toestandsvergelijking van het gas zal kunnen opstellen.

Wat het volume betreft, het is duidelijk dat men niet langer de molekulen mag beschouwen als harde elastische bollen of ellipsoïden; de theorie van de botsingen der molekulen zal nu op een anderen grondslag gebouwd moeten worden (op een manier welke in beginsel overeenstemt met de theorie van RUTHERFORD en DARWIN over de botsingen der alpha-deeltjes).

Met betrekking tot de attraktie-krachten zij hier vermeld dat door KEESOM berekeningen uitgevoerd zijn over de tweede viriaalkoefficient voor molekulen welke een elektrische dipool of quadrupool dragen[2]).

Hoe deze elementen in het periodiek systeem gerangschikt moeten worden ligt nog geheel in het duister. (Indien het isotopen van bekende elementen waren zouden ze hetzelfde spektrum moeten hebben als deze elementen.)

[1]) NICHOLSON heeft ook de spektra van sommige positief en negatief geladen systemen onderzocht (zie de reeds meermalen geciteerde artikelen in de Monthly Notices.

[2]) W. H. KEESOM, Versl. Akad. Amsterdam XX, p. 1390, 1406, 1912; XXI, p. 492, 678, 1912; XXIV, p. 614, 766, 1916; W. H. KEESOM en Mej. C. VAN LEEUWEN, idem XXIV, p. 1699, 1916 (Comm. Leiden, Suppl. 24a, 24b, 25, 26, 39a — c).

Onder viriaalkoefficienten worden verstaan de koefficienten A, B, C, enz., in de reeksontwikkeling van de toestandsvergelijking, gegeven door KAMERLINGH ONNES:

$$pv = A\left\{1 + B/v + C/v^2 + D/v^4 + E/v^6 + F/v^8\right\}$$

Deze koefficienten zijn funkties van de temperatuur.

Men diene in het oog te houden dat het onderzoek van KEESOM geheel berust op de klassieke mechanika en statistika, zoodat ook nergens quantenonderstellingen gebruikt zijn.

Het laatste kan toegepast worden op waterstof, zooals door KEESOM gedaan is. Uit een vergelijking van de theoretische formules met de experimenteel bepaalde waarden wordt gevonden voor het elektrisch moment van een H_2-molekuul:

$$\mu_e = 2{,}03 . 10^{-26}\ \text{E. S. E. cm}^2 \quad ^{1)}.$$

Neemt men voor waterstof het model van BOHR en DEBYE aan, dan vindt men voor het moment:

$$\mu_e = \frac{5}{4}\, e\, b^2$$

(b = afstand der positieve kernen)[2]; voegt men hierin:

$$e = 4{,}77 . 10^{-10}\ \text{E. S. E.} \quad ; \quad b = 0{,}586\ \text{Å. E.} \quad ^{3)}$$

dan is: $$\mu_e = 2{,}05 . 10^{-26}\ \text{E. S. E. cm}^2.$$

De overeenstemming is dus bizonder goed[4]).

[1]) L. c. XXIV, p. 614, vgl.

[2]) Berekening van het elektrisch moment van het H_2-molekuul.

Zij het centrum van het molekuul in de oorsprong; de kernen liggen in de z-as op hoogte $\pm \frac{b}{2}$; de elektronen in de y-as in de punten $y = \pm b \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dan vindt men voor de potentiaal in een punt:

$$x = \varrho \cos \varphi \; ; \qquad y = \varrho \sin \varphi \; ; \qquad z = z$$

$$V = \frac{e}{r} \left\{ \frac{3\, b^2}{4\, r^2} - \frac{9}{4} \frac{b^2 \varrho^2 \sin^2 \varphi}{r^4} - \frac{b^2}{4 r^2} + \frac{3}{4} \frac{b^2 z^2}{r^4} \dots \right\} =$$

$$= \frac{e\, b^2}{4\, r^5} (2\, r^2 + 3\, z^2 - 9\, \varrho^2 \sin^2 \varphi \dots) \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Het molekuul staat echter niet stil, doch wentelt met groote snelheid om de z-as. (In den tijd waarin een molekuul ongeveer zijn eigen diameter aflegt vinden gemiddeld 300—400 omwentelingen plaats.) Men krijgt dus een gemiddelde waarde voor de potentiaal, welke berekend kan worden door het gemiddelde van (1) te nemen voor alle waarden van φ van 0 tot 2π. Dit geeft:

$$V = \frac{5}{8} e\, b^2 . \frac{3 z^2 - r^2}{r^5} = \frac{5}{4} e\, b^2 . \frac{1}{r^3} . P_2 \left(\frac{z}{r}\right)$$

Derhalve: $$\mu_e = \frac{5}{4} e\, b^2.$$

[3]) Deze waarde van b volgt uit de quantenformules voor het model met behulp van de bekende waarden van e, m en h.

[4]) KEESOM onderstelt dat de quadrupool bestaat uit 2 positieve ladingen e op afstand d van elkaar, en midden tusschen beide een lading $-2e$.

Dan is: $\mu_e = \frac{1}{2} e\, d^2$, waaruit: $d = 0{,}92$ Å. E.

Bij de berekening van KEESOM is echter aangenomen dat het molekuul als bolvormig mag worden behandeld; voor de diameter wordt uit de experimenteel gevonden waarde van de viriaalkoefficient berekend: $2{,}32.10^{-8}$ cm. Dit sluit niet aan bij het model van BOHR en DEBYE: de afstand der kernen in het laatste is $0{,}586.10^{-8}$ cm; die der elektronen: $1{,}014.10^{-8}$ cm [1]).

3) In verband met het bovenstaande kan men de vraag opwerpen: hoe werken in het algemeen verschillende mechanische systemen op elkaar in, wanneer in beide de bewegingen door quantenvoorwaarden gebonden zijn?

Zie hierover een opmerking in § 38 (bl. 238).

4) Voor zoover mij bekend is heeft men het model van RUTHERFORD en BOHR nog niet gebruikt ter verklaring van de eigenschappen van vloeistoffen en vaste lichamen.

Echter dient nog wel vermeld te worden een artikel van J. FRENKEL [2]) over de elektrische eigenschappen van metalen en diëlektrika. FRENKEL beweert op grond van het atoommodel dat aan het oppervlak van elk metaal een elektrische dubbellaag zetelt, welke een „inwendige potentiaal" van het metaal teweegbrengt, en ook een oppervlakte-spanning geeft. De verschillen in deze inwendige potentiaal bij verschillende metalen bepalen de kontakt-potentialen die optreden wanneer twee metalen elkaar aanraken. FRENKEL voert een aantal berekeningen door, en vindt met zijn theorie tennaastenbij de volgorde der metalen in de elektromotorische spanningsreeks [3]).

[Eenige problemen uit de theorie der vaste lichamen in verband met de atoommodellen van BOHR zijn behandeld door Prof. H. A. LORENTZ op zijn kollege van 1917/18.

Naar aanleiding daarvan zou ik het volgende willen vermelden. Het ligt voor de hand om te onderstellen dat de atoomkernen

[1]) Interessante problemen in verband met de toestandsvergelijking zijn b.v. ook: uit het atoommodel de kritische temperaturen van waterstof en Helium af te leiden. Verder te verklaren waarom waterstof zich bij lage temperaturen als een *éénatomig* gas gedraagt (zie o.a. de geciteerde artikelen van KEESOM). Gedeeltelijk hangt dit samen met de theorie der soortelijke warmte van waterstof, en met de precessie-trillingen van het waterstof-molekuul, welke bij lage temperaturen zeer gering worden.

[2]) J. FRENKEL, Phil. Mag. **33**, p. 297, 1917.

[3]) Zie over de kontakt-potentialen ook: R. A. MILLIKAN, Phys. Zeitschr. **17**, p. 217, 1916 (Phys. Rev. **4**, p. 73, 1914; **6**, p. 55, 1915).

met het grootste deel der elektronen in de hoekpunten van het kristalraster staan, terwijl waarschijnlijk enkele elektronen, die misschien banen om de verbindingslijnen der kernen beschrijven, de binding tusschen de verschillende atomen zullen vormen, zooals dit ook het geval is in het model van het waterstofmolekuul. Het is niet onmogelijk dat men hiermee de bekende elasticiteits-eigenschappen der materie kan verklaren.

Volgens de berekeningen van RUBINOWICZ [1]) is het waterstofmolekuul stabiel tegenover een verandering van den afstand der kernen, en wel is de elastische kracht: $f = -1{,}35.10^6\, \delta b$ dyne, waar δb de verandering van den afstand b der kernen aangeeft. De elasticiteitsmodulus is dus:

$$E_1 = -b\,\frac{f}{\delta b} = 0{,}586.10^{-8}.1{,}35.10^6 = 0{,}0079.$$

Denkt men zich een laagje bedekt met waterstof-molekulen, welke alle met de as loodrecht op de laag staan, in een kwadratisch net op afstanden van b.v. 2 Å. E., dan is de elasticiteitsmodulus per cm^2 (waarop zich 25.10^{14} molekulen bevinden):

$$E = 25.10^{14}\,.\,E_1 = 1{,}98.10^{13}\ \text{dyne/cm}^2 = \text{ca. } 2.10^7\ \text{KG/cm}^2.$$

Dit is van de orde van grootte der elasticiteitsmoduli van vaste stoffen (staal: ca. $0{,}2.10^7$ KG/cm^2).]

1) Zie A. RUBINOWICZ, Phys. Zeitschr. **18**, p. 187, 1917.

HOOFDSTUK V.

VERSCHILLENDE PROBLEMEN DIE MET DE THEORIE VAN BOHR IN VERBAND STAAN.

In dit hoofdstuk zullen enkele bizondere punten van de theorie van Bohr vermeld worden, welke in verband staan met de uitstraling van licht en met de magnetische eigenschappen der atomen, o. a. met het doel te wijzen op eenige der moeilijkheden welke nog onopgelost zijn.

§ 31. DE TEGENSTELLINGEN TUSSCHEN DE HYPOTHESEN VAN BOHR EN DE ELEKTRONENTHEORIE [1]).

Zooals reeds is opgemerkt zijn de bij de berekeningen over de atoommodellen gevolgde methoden op verschillende punten niet in overeenstemming met de elektronentheorie. Gedeeltelijk zijn er principieele tegenstellingen tusschen de opvattingen van de theorie van Bohr en die van de klassieke theorie; aan den anderen kant echter moeten sommige der gemaakte onderstellingen beschouwd worden als slechts te dienen ter voorloopige vereenvoudiging van de problemen, welke later door een meer exakte behandeling moet worden vervangen. De grens tusschen deze twee groepen kan men niet scherp aangeven.

Volgens de elektronentheorie ondervindt een elektron dat een niet eenparig rechtlijnige beweging heeft, een zeer gekompliceerde reaktie van het elektromagnetische veld [2]). Men kan voor

[1]) [N.B. Deze § is bij de uitgave eenigszins omgewerkt.]

[2]) Zie H. A. Lorentz, The Theory of Electrons (Leipzig 1915), p. 48, 49.
M. Abraham, Theorie der Elektricität (Leipzig 1905), p. 121, vgl.
G. A. Schott, Electromagnetic Radiation (Cambridge 1912), p. 235—261, waar exakte uitdrukkingen voor de reaktie van het veld op het elektron gegeven zijn, en de beteekenis der verschillende termen onderzocht is.

deze reaktie een reeksontwikkeling afleiden, voortschrijdende naar de afgeleiden van de snelheid en naar de opklimmende machten hiervan, welke reeks te schrijven is in den vorm:

$$\mathbf{F} = -\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

($\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ en $\mathbf{K}$ moeten hier, evenals ook beneden de snelheid $\mathbf{v}$, opgevat worden als vektoren). Hier zijn in $\dot{\mathbf{G}}$ de termen vereenigd welke slechts de versnelling $\dot{\mathbf{v}}$ in den eersten graad (en geen hoogere afgeleiden van $\mathbf{v}$) bevatten; $\mathbf{G}$ is de z.g. hoeveelheid van beweging van het elektromagnetische veld. Voor een in den toestand van rust bolvormig elektron dat slechts aan de oppervlakte geladen is, en dat overeenkomstig de onderstelling van LORENTZ, zoo het in beweging is afgeplat wordt in de bewegingsrichting in de verhouding $\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, heeft $\mathbf{G}$ de waarde:

$$\mathbf{G} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2 a}\mathbf{v}\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waar a de straal van het elektron in den toestand van rust is.

De overige termen van de reeks zijn in $\mathbf{K}$ vereenigd; de eerste en voornaamste ervan is:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De bewegingsvergelijking voor een elektron waarop een uitwendige kracht $\mathbf{F}_e$ werkt, luidt dus, zoo men in verband met de opvattingen der elektronentheorie aan het elektron geen „ware" massa toekent:

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} - \mathbf{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1^*)$$

Men kan nu $\mathbf{G}$ ook opvatten als de *hoeveelheid van beweging van het elektron;* de koefficient:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2 a} = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

in formule (2) geeft dan de grootte van de (elektromagnetische) massa. Het gedeelte van $\mathbf{F}_e$ dat aan $\dot{\mathbf{G}}$ gelijk is dient ter vergrooting van de *energie* van het elektron [1]); het andere ge-

[1]) Vergelijk in verband hiermee: H. A. LORENTZ, The Theory of Electrons, p. 213 en Versl. Akad. Amsterdam XXVI, p. 989, 1917.

deelte, — **K**, doet zich in vele gevallen voor als de kracht noodig om een *weerstand* te overwinnen die de beweging van het elektron ondervindt door de reaktie van het eigenveld, en houdt verband met de energie die naar het oneindige wordt *uitgestraald*. Men vindt nl. voor de arbeid door dit gedeelte geleverd:

$$\int(-\mathbf{K}_1\,\mathbf{v})\,dt = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\mathbf{v}\,\dot{\mathbf{v}})\Big|_{t_1}^{t_2} + \int S\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

waarin:

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{\mathbf{v}}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

de per tijdseenheid naar het oneindige uitgestraalde energie is. De eerste term van vergelijking (5) verdwijnt in vele gevallen, b.v. bij een periodieke beweging (bij een quasi-periodieke is ze evenmin van belang). De tweede term is steeds positief, en geeft dus een verlies van arbeid aan [1]).

In de theorie van Bohr wordt aangenomen dat de uitstraling S en de kracht **K** niet bestaan. Alleen de traagheidsterm $\dot{\mathbf{G}}$ wordt behouden. Praktisch komt dit laatste hierop neer dat men aan het elektron een massa m toekent; volgens de formules der relativiteitstheorie is dan de hoeveelheid van beweging steeds gegeven door:

$$\mathbf{G} = m\,\mathbf{v}\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2^*)$$

onverschillig of men m beschouwt als elektromagnetische of als „ware" massa.

De kracht die het elektron ondervindt van een *uitwendig* elektromagnetisch veld wordt op de gewone wijze in rekening gebracht, waarbij steeds ondersteld is dat het elektron als een punt mag worden behandeld; ze is dan gegeven door:

---

1) Vergelijk H. A. Lorentz, The Theory of Electrons, p. 49.
Zie ook G. A. Schott, l. c.
Indien er meerdere bewegende ladingen in het systeem zijn wordt de uitstraling hoofdzakelijk bepaald door $\frac{2}{3c^3}(\Sigma e\,\dot{\mathbf{v}})^2$. (Zie O. W. Richardson, The Electron Theory of Matter, Cambr. 1914, p. 258). Zijn er dus in een atoom meerdere elektronen, symmetrisch ten opzichte van de kern gerangschikt (b.v. in een ring), dan is de uitstraling zeer gering. Men vergelijke hieromtrent J. J. Thomson, Phil. Mag. **6**, p. 681, 1903 (zie noot [4]), bl. 4, boven) en G. A. Schott, l. c. p. 103.

$$\mathbf{f} = -e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\, \mathbf{M}] \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Men kan dit ook samenvatten, zooals reeds in § 6 gedaan is, door als funktie van LAGRANGE voor het elektron aan te nemen:

$$L = -m c^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - 1 \right\} + e \left\{ \varphi - \frac{1}{c} (\mathbf{v}\, \mathbf{a}) \right\} \quad \ldots \quad (8)$$

waar φ en $\mathbf{a}$ de potentialen van het uitwendige veld zijn (de lading van het elektron is $-e$) [1]).

Allerlei andere problemen, zooals b.v. de rotatie van een elektron, de retardeering der potentialen welke zich doet gevoelen indien meerdere elektronen, of elektronen en atoomkern, zich bewegen, zijn voor zoover mij bekend is nog niet in verband met de theorie der quanta beschouwd. Ook de magnetische werkingen die de verschillende deelen van een atoom op elkaar kunnen uitoefenen zijn nog slechts onvolledig nagegaan.

Er dient hier nog op de volgende twee verhandelingen gewezen te worden:

1) TH. V. WEREIDE, MAXWELLS Gleichungen und die Atomstrahlung, Ann. d. Phys. **52**, p. 276, 1917.

WEREIDE meent te kunnen aantoonen dat de gewoonlijk gegeven afleiding van de formule (6) voor de uitstraling foutief is, en dat deze formule vervangen moet worden door:

$$S_w = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{d}{dt} |\mathbf{v}| \right\}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Voor een cirkelbeweging is volgens formule (6) $S > 0$; volgens (9) is $S_w = 0$: volgens WEREIDE zou een atoom dat met een eenparige snelheid in een cirkel loopt *geen* energie uitstralen.

De door WEREIDE vermelde en gekritiseerde afleiding der formule (6) is echter niet de eenige welke hiertoe dienen kan: door Prof. LORENTZ is een meer algemeene gegeven [2]), en het schijnt mij toe dat deze volkomen tegen de kritiek van WEREIDE bestand is. — De afleiding van formule (9), door WEREIDE voorgesteld, schijnt me echter geheel onhoudbaar: men zou met meer

[1]) Zie bl. 28. — De magnetische veldsterkte is hier door $\mathbf{M}$ aangeduid.

[2]) Theory of Electrons, p. 255, vgl.

recht tegen haar het bezwaar kunnen aanvoeren, dat WEREIDE zelf tegen de afleiding van (6) meende te moeten inbrengen.

2) C. W. OSEEN, Das BOHR'sche Atommodel und die MAXWELL'schen Gleichungen, Phys. Zeitschr. **16**, p. 395, 1915.

OSEEN komt na een lange berekening — die ik niet heb kunnen nagaan — tot het resultaat (l. c. p. 403):

Wanneer men een model van het waterstof-atoom volgens BOHR met een zoodanige bol wil omgeven dat de vergelijkingen van MAXWELL daarbuiten als geldig beschouwd kunnen worden, en wanneer de krachten die een elektron in een atoom uitoefent beperkt zijn op de elektrostatische en de daarbij behoorende magnetische kracht, moet de straal van de bol grooter zijn dan 10^{-4} cm.

In waterstofgas is de gemiddelde afstand der atomen ca. 10^{-6} cm; hierin zou dus nergens een eenigermate samenhangend gebied zijn waarin de vergelijkingen van MAXWELL geldig zijn.

OSEEN geeft nog een diskussie van zijn resultaat en spreekt als eindstelling uit dat het onmogelijk is het atoommodel van BOHR met de elektronentheorie van LORENTZ te vereenigen.

M. PLANCK heeft een vorm van de quantentheorie voorgesteld waarin wordt aangenomen dat de emissie van energie diskontinu, de absorbtie daarentegen *kontinu* kan geschieden.

Het is duidelijk dat hierdoor de tegenstrijdigheden met de elektronentheorie niet worden opgeheven.

Zie over deze theorie van PLANCK beneden § 35.

§ 32. VERBAND TUSSCHEN DE BEIDE HYPOTHESEN DER QUANTENTHEORIE.

In de theorie van BOHR kunnen de systemen *diskontinu* energie uitstralen; daarbij is de frequentie der uitgezonden trillingen gegeven door de formule:

$$\nu_e = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

(zie bl. 33).

Tusschen deze formule en de formules die de quantenbewegingen bepalen (zie hoofdstuk II, § 10), bestaat het volgende verband:

Zij de energie van het systeem uitgedrukt als funktie der quantengetallen $n_1, n_2, \ldots\ldots n_k$:

$$\alpha = \alpha(n_1, n_2 \ldots\ldots n_k)$$

Dan zijn de frequenties der bewegingen *in* het systeem gegeven door:

$$\nu_i = \frac{1}{h}\frac{\partial \alpha}{\partial n_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

terwijl in het algemeen ook alle boventonen en kombinatietonen hiervan voorkomen (zie opmerking III, bl. 45).

De „licht-frequenties" die het systeem kan uitzenden bij het overspringen uit den eenen toestand in een anderen zijn:

$$\nu_e = \frac{1}{h} \Delta \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Indien de quantengetallen groot zijn kan men in het algemeen aannemen dat approximatief:

$$\Delta \alpha = \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} . \Delta n_i + \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

is.

Dus zijn dan de frequenties ν_e in eerste benadering dezelfde als de frequenties ν_i van het systeem, of hun boventonen en kombinatietonen [1]).

Hiervan is door BOHR in een speciaal geval gebruik gemaakt bij het opstellen der emissie-hypothese [2]).

Andere formuleering.

Indien de energie wordt uitgedrukt als funktie der intensiteitskonstanten $P_1, P_2 \ldots$ (welke met de quantengetallen samenhangen door de betrekking: $n_i\, h = 2\pi P_i$), vindt men voor de frequenties der bewegingen in het systeem:

$$\nu_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial P_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11a)$$

en voor de lichtfrequenties die het systeem kan uitzenden bij het overspringen uit den eenen toestand in den anderen:

$$\nu_e = \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial P_i} \Delta n_i - \frac{h}{8\pi^2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial P_i \partial P_j} \Delta n_i \Delta n_j + \ldots \quad (12a)$$

$$= \sum \nu_i \Delta n_i - h \left\{ \qquad \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12b)$$

Beschouwt men nu voor een oogenblik h als een grootheid welke men willekeurig klein kan laten worden, dan gaat formule (12b) voor $Lim.\, h = 0$ over in:

$$\underset{h=0}{Lim.}\, \nu_e = \sum \nu_i \,.\, \Delta n_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

In dit geval zijn de uitgezonden lichtfrequenties dezelfde als of de boven- of kombinatietonen van de frequenties in het systeem: de formules van de quantentheorie gaan over in die van de klassieke theorie [3]).

[1]) Het eenvoudigste voorbeeld is een resonator van PLANCK; hier is: $\alpha = n h \nu$; dus is de „licht-frequentie" die de resonator volgens BOHR kan emitteeren: $\nu_e = (n_1 - n_2)\,\nu = \nu$ of een geheel veelvoud ervan. Zie ook § 14, bl. 58.

[2]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 12/13, 1913.

[3]) Het is duidelijk dat het bovenstaande niet mag worden toegepast indien de funktie α singulariteiten vertoont, zoodat ze niet in een reeks ontwikkeld kan worden. Dit is echter slechts bij uitzondering bij mechanische systemen het geval.

Opmerking.

Zooals reeds in noot [1]) op de vorige bladzijde vermeld is zijn er gevallen waarin de energie α een *lineaire* funktie is van de quantengetallen, en waarin bovenstaande betrekkingen voor alle waarden der quantengetallen exakt gelden: zie hierover bl. 58.

§ 33. THEORIE VAN EINSTEIN OVER DE WAARSCHIJNLIJKHEID VAN DE UITSTRALING EN ABSORBTIE VAN ENERGIE.

EINSTEIN [1]) heeft de volgende hypothesen opgesteld in verband met het stralingsproces:

a) *Toestandsverdeeling der systemen.*

Aangenomen wordt dat een systeem slechts in die toestanden kan voorkomen, welke voldoen aan de quantenformules (andere toestanden komen dus *niet* voor). Zij de energie van het systeem in een toestand Z_s (gekarakteriseerd door de waarden: n_{1s}, n_{2s}, $\ldots n_{ks}$ der quantengetallen): α_s. In een ensemble van een zeer groot aantal N van dergelijke systemen dat in thermisch evenwicht is met een stralingsveld zal een bepaalde toestandsverdeeling ontstaan; de relatieve waarschijnlijkheid van een toestand Z_s wordt gelijkgesteld aan:

$$W_s = g_s \cdot e^{-\frac{\alpha_s}{kT}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

waar g_s een z.g. „gewichtsfunktie" is, in het algemeen een funktie der quantengetallen (doch onafhankelijk van de temperatuur T).

Deze formule kan opgevat worden als een uitbreiding van de formule van MAXWELL-BOLTZMANN in de klassieke statistika (zie ook hoofdstuk VI).

b) *Uitstraling.*

De waarschijnlijkheid dat een systeem in den tijd dt uit den toestand Z_r in den toestand Z_s overspringt onder emissie van de energie $\alpha_r - \alpha_s$ als lichttrillingen van de frequentie ν_{rs}, buiten invloed van uitwendige oorzaken, zij:

$$d\,W = A_r^s \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

EINSTEIN merkt op dat deze formule herinnert aan die welke voor de radioaktieve processen geldt [2]).

[1]) A. EINSTEIN, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 318, 1916;
Phys. Zeitschr. **18**, p. 121, 1917.

[2]) Vergelijk de opmerking in noot [1]), bl. 130

c) „*Instraling*".

Bevindt een systeem zich in een stralingsveld met de energiedichtheid $\varrho(\nu)$, dan kan het systeem onder invloed der straling energie opnemen of uitzenden.

1) „*Positieve instraling*". Het systeem gaat uit den toestand Z_s over in Z_r en neemt daarbij uit het veld op de energie $\alpha_r - \alpha_s$, afkomstig van trillingen met de frequentie ν_{rs}. De waarschijnlijkheid hiervoor is:

$$d\,W = B_s^r \,.\, \varrho(\nu_{rs}) \,.\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

2) „*Negatieve instraling*". Even goed kan het systeem onder invloed van de straling uit den toestand Z_r in Z_s overgaan, onder emissie van energie. Waarschijnlijkheid:

$$d\,W = B_r^s \,.\, \varrho(\nu_{rs}) \,.\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Deze hypothesen over het stralingsproces zijn opgesteld naar analogie van het gedrag van een resonator op grond van de klassieke theorie.

Uit bovenstaande formules heeft Einstein op eenvoudige wijze de formule van Planck voor de verdeeling der energie over het spektrum der zwarte straling afgeleid. Is nl. een ensemble van systemen in evenwicht met een stralingsveld, dan moet:

$$g_s \,.\, e^{-\alpha_s/kT} \,.\, B_s^r \,.\, \varrho(\nu_{rs}) = g_r \,.\, e^{-\alpha_r/kT} \left\{ B_r^s \,.\, \varrho(\nu_{rs}) + A_r^s \right\} \ldots (19)$$

zijn. Hieruit volgt:

$$\varrho(\nu_{rs}) = \frac{\dfrac{A_r^s}{B_r^s}}{\dfrac{g_s}{g_r}\dfrac{B_s^r}{B_r^s}\, e^{\frac{\alpha_r - \alpha_s}{kT}} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Neemt men nu aan dat:

a) bij hooge temperaturen de dichtheid der energie $\varrho(\nu)$ oneindig wordt;

b) dat de verschuivingswet van Wien geldt;

dan moet zijn:

$$g_s\, B_s^r = g_r\, B_r^s \qquad \text{(I)}$$

$$\alpha_r - \alpha_s = h\, \nu_{rs} \qquad \text{(II)}$$

$$A_r^s / B_r^s = C\, \nu_{rs}^3 \qquad \text{(III)}$$

waarin h en C *universeele konstanten* zijn.

Hierdoor gaat (20) over in:

$$\varrho(\nu) = \frac{C\,\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T}} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

Meer bevredigend zou het zijn indien de drie betrekkingen (I), (II), (III) uit de quantentheorie waren afgeleid. (II) kan onmiddellijk worden ingevoerd als de emissie-hypothese van Bohr; om tot (I) en vooral om tot (III) te komen zal men echter nadere onderstellingen moeten invoeren omtrent de waarschijnlijkheid van het overspringen, enz.

Opmerkingen.

1) Vergelijkt men formule (20) of (21) met de formule van Planck [1]), dan blijkt dat:

$$A_r^s / B_r^s = 8\,\pi\,h\,\nu^3/c^3 = 8\,\pi\,h/\lambda^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (IIIa)$$

2) Het is interessant na te gaan wat de verhouding σ is tusschen de „vrije straling": $A_r^s \,.\, dt$, en de „gedwongen straling": $B_r^s \,.\, \varrho \,.\, dt$.

De formules (20) en (21) geven:

$$\sigma = A_r^s \big/ B_r^s\,\varrho = e^{h\,\nu/k\,T} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (IV)$$

Voor een absolute temperatuur $T = 1500°$ vindt men voor:

$\lambda = 100\,\mu$, $\nu = 3.10^{12}$ (ultrarood): $\sigma =$ ca. 0,1.

$\lambda = 6000$ Å. E., $\nu = 5.10^{14}$ (geel) : $\sigma =$ ca. 10^7.

$\lambda = 1$ Å. E. , $\nu = 3.10^{18}$ (R. str.) : $\sigma =$ ca. 10^{42000}.

[1]) M. Planck, Die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1913, p. 162.

§ 34. VERSCHILLENDE OPMERKINGEN OVER DE EIGENSCHAPPEN DER „STRALENDE ENERGIE".

In nauw verband met de emissie-hypothese der quantentheorie staan een aantal problemen over de energie der lichtstraling, b.v. de vraag of er werkelijk „lichtquanten" bestaan; het foto-elektrisch effekt; één-lijn-spektra, en vele andere. Enkele dezer problemen zullen hier kort vermeld worden; het gegeven overzicht is echter zeer onvolledig.

a) De onderstelling dat „lichtquanten" met energie $\varepsilon = h\nu$ een werkelijk bestaan hebben is o. a. door EINSTEIN besproken [1]), in verband met statistische onderzoekingen over de warmtestraling, het foto-elektrisch effekt, e. d.

Experimenteele onderzoekingen over de ionisatie door Röntgenstralen hebben BRAGG tot hetzelfde resultaat geleid [2]).

Zooals bekend is levert deze opvatting groote moeilijkheden zoo men de gewone optische verschijnselen (breking, terugkaatsing, interferentie, enz., in 't kort alles wat met het begrip „koherentie" samenhangt) wil verklaren [3]) [4]).

b) *Foto-elektrisch effekt.*

Valt licht van een frequentie ν op een metalen plaat, dan wordt deze positief elektrisch geladen tot een maximale potentiaal V, gegeven door de vergelijking van EINSTEIN:

$$eV = h\nu - pe \quad \text{. . . . . (22)}$$

waarin $-e$ de lading van het elektron is, en p een konstante, afhankelijk van het onderzochte metaal [5]).

[1]) A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. **17**, p. 139, 1905.

[2]) Zie BRAGG, Durchgang der α, β und γ-Strahlen durch Materie (vert. door MAX IKLÉ), Leipzig 1913, p. 166.

[3]) Zie b.v. H. A. LORENTZ, Phys. Zeitschr. **11**, p. 349, 1910.

[4]) Over de dispersie-problemen zie men beneden § 36.

[5]) Cf. A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. **17**, p. 145, 1905.

De maximale potentiaal V is *onafhankelijk* van de *intensiteit* van het invallende licht, ze wordt slechts bepaald door de *frequentie*. Het maakt den indruk alsof trillingen van de frequentie ν energie bij porties $h\nu$ aan de elektronen meedeelen; de laatsten verbruiken een deel der verkregen energie om uit het elektrisch veld van het metaal te komen, en met het overschot $h\nu - p e$ kunnen ze tegen de potentiaal V oploopen. — Zie in verband hiermee beneden, **f**).

Deze vergelijking is door de onderzoekingen van R. A. MILLIKAN bizonder goed bevestigd [1]); met behulp van haar is het mogelijk zeer nauwkeurig de waarde van h/e te bepalen. [2])

c) *Emissie van Röntgenstralen.*

Door de proeven van DUANE en HULL [3]) en van WEBSTER [4]) is aangetoond dat voor de emissie van Röntgenstralen van de frequentie ν de kathodestralen een spanningsverval moeten doorloopen gelijk aan of grooter dan:

$$V = \frac{h\nu}{e} \quad ^{5)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Is dus de spanning tusschen kathode en anode gegeven, dan is de maximale frequentie van het door de buis uitgezonden „witte Röntgenspektrum" bepaald door:

$$h\,\nu_{max} = e\,V \quad ^{6)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23a)$$

[1]) R. A. MILLIKAN, Phys. Rev. **4**, p. 73, 1914; **6**, p. 55, 1915; Phys. Zeitschr. **17**, p. 217, 1916.

[2]) Verwant met het bovenstaande is de z.g. *fotochemische equivalentie-wet* van EINSTEIN; zie hierover: Ann. d. Phys. **37**, p. 832, 1912, en Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, p. 318, 1916.

In verband hiermee zie men ook de theorie van F. HABER over chemische reaktie-warmten: Verh. Deutsch. Phys. Ges. **13**, p. 1117, 1911.

[3]) Phys. Rev. **6**, p. 166, 1915.

[4]) Phys. Rev. **7**, p. 599, 1916.

[5]) In deze formule treedt geen konstante p op, zooals in form. (22). Men diene hierbij echter in het oog te houden dat de konstante p in (22) van de orde van grootte van 1 Volt is, terwijl in (23) V 10000 à 100000 Volt bedraagt. — Zie ook form. (24).

[6]) E. RUTHERFORD (Phil. Mag. Sept. 1915) had gevonden dat bij groote V: $h\nu_{max} < eV$ is. DUANE en HULL toonen echter aan dat de door R. gebezigde methode ter bepaling van ν_{max} niet het juiste resultaat oplevert.

Dit geldt niet voor de emissie der „karakteristieke straling": deze wordt pas uitgezonden zoo eV/h een z.g. absorbtie-grens passeert. Neem b.v. de K-straling. Hierin komen 4 lijnen voor: α', α, β, γ; voor hun frequenties geldt:

$$\nu_\gamma > \nu_\beta > \nu_\alpha > \nu_{\alpha'}$$

Even boven ν_γ ligt de absorbtie-grens ν_A behoorende bij de K-reeks [1]. Zal een element het K-spektrum emitteeren, dan moet $eV \geqslant h\nu_A$ zijn. Cf. WEBSTER, l.c. [2]).

Een dergelijke regel geldt voor de *fluorescentie* der Röntgenstralen. Zie hierover:

W. KOSSEL, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **16,** p. 898, 953, 1914.

E. WAGNER, Ann. d. Phys. **46,** p. 868, 1915; Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 31, 1916.

Verder: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 161, 1916. (Verg. ook beneden, **f**)).

d) *„Eén-lijn-spektra"*.

J. FRANK en G. HERTZ hebben bij kwikdamp het volgende gevonden [3]):

1) de ionisatie-spanning van kwikdamp is: 4,9 Volt;

2) worden kwik-atomen gebombardeerd met elektronen wier snelheid iets grooter is, dan aan een potentiaalverval van 4,9 Volt beantwoordt, dan zendt de kwikdamp *alleen* de spektraallijn:

λ 2537 [4])

uit.

De frequentie van deze lijn is met de ionisatie-spanning verbonden door de formule:

$$eV = h\nu \qquad (24)$$

In verband hiermee staan analoge resultaten van MC LENNAN en HENDERSON en van TATE bij *Hg*, *Cd*, *Zn*, *Mg* [5]).

[1]) Zie b.v. A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 125, 161, 1916.

[2]) Zie voor de L-reeks: D. L. WEBSTER & H. CLARK, Proc. Nat. Acad. Sciences U. S. A. **3**, p. 181, 1917.

[3]) J. FRANK & G. HERTZ, Phys. Zeitschr. **17,** p. 437, vgl., 1916.

[4]) Dit is de bekende „resonantie-lijn" bij kwikdamp van WOOD.

[5]) MC LENNAN & HENDERSON, Proc. Roy. Soc. A **91,** p. 485, 1915.
MC LENNAN, Proc. Roy. Soc. A **92,** p. 305, 1916.
J. T. TATE, Phys. Rev. **7,** p. 686, 1916.

Hun uitkomsten zijn in 't kort de volgende:

Worden metaalatomen gebombardeerd door elektronen die een zeker potentiaalverval V_1 doorloopen hebben, dan zendt de damp slechts één spektraallijn uit, gegeven door de formule: $2 . p_2 — 1{,}5 . S$ in de notatie van PASCHEN [1]). Is het potentiaalverval gelijk aan of grooter dan een hooger bedrag V_2, dan wordt een spektrum met vele lijnen uitgezonden, welke aan weerszijden der eerste liggen. Hierbij korrespondeert de potentiaal V_1 volgens form. (24) met de frequentie der eerste lijn $2 . p_2 — 1{,}5 . S$; terwijl V_2 tennaastenbij overeenstemt met de grens van het spektrum: $1{,}5 . S$ [2]).

(Verder is gevonden dat deze metaaldampen absorbtiebanden bezitten, waarvan de kanten liggen bij: $2 . p_2 — 1{,}5 . S$
en: $1{,}5 . S — 2 . P$). [3])

e) *Fluorescentie. — Resonantie-spektra.*

Onder fluorescentie wordt het verschijnsel verstaan dat een stof waar men licht op laat vallen, zelf licht gaat uitzenden.

In vele gevallen geldt hierbij de z.g. regel van STOKES: de frequenties die voorkomen in de fluoresceerende straling zijn kleiner dan of hoogstens gelijk aan die van de opvallende straling. EINSTEIN heeft dit evenals het foto-elektrisch effekt en de fotochemische werkingen in verband gebracht met de theorie der lichtquanten [4]). Er zijn uitzonderingen op deze regel: zoo zendt b.v. fluoresceerende Natrium-damp ook licht uit van hoogere frequentie dan het invallende licht [5]).

Als een bizondere vorm van fluorescentie zou men de door WOOD ontdekte „*Resonantie-straling*" kunnen opvatten [6]). Hiermee bedoelt WOOD dat wanneer men een damp verlicht met mono-

[1]) Zie: F. PASCHEN, Ann. d. Phys. **30**, p. 746, 1909; **35**, p. 860, 1911. WOLFF, Ann. d. Phys. **42**, p. 825, 1913.

[2]) Cf. WOLFF, l.c.

[3]) [Op deze onderzoekingen over één-lijn-spektra is kritiek uitgeoefend door VAN DER BIJL, Phys. Rev. **9**, p. 173, 1917 en door T. C. HEBB en R. A. MILLIKAN, Phys. Rev. **9**, p. 371, 378, 1917.]

[4]) A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. **17**, p. 139, vgl., 1905.

[5]) Cf. R. W. WOOD, Physical Optics (New York 1911) p. 574.

[6]) Cf. R. W. Wood, Recent Researches in Phys. Optics (New York 1913), p. 1, vgl.; verder vele artikelen in de Phil. Mag. (ook van DUNOYER en anderen).

chromatisch licht, ze een bepaald spektrum uitzendt, indien de spektraallijn der primaire lichtbron valt op een absorbtielijn van de onderzochte damp. De hierbij optredende verschijnselen zijn echter bizonder gekompliceerd. — Een paar interessante voorbeelden zijn:

a) Resonantie van *Jodium-damp* op de kwiklijn λ 5460,74. Jodium geeft door bestraling met deze lijn een resonantie-spektrum van ca. 20 à 30 lijnen; hiervan hebben drie een *grootere frequentie dan de kwiklijn*; de andere liggen aan de zijde der kleinere frequenties. De lijnen zijn doublets op regelmatig verdeelde afstanden; de afstand is echter niet konstant. Wood merkt op dat binnen de breedte van de kwiklijn λ 5460,74 nog ca. *7 absorbtie-lijnen van de Jodium-damp vallen* [1]).

b) Resonantie van *Natrium-damp*. Indien Natrium-damp bestraald wordt met het licht van de lijn D_2 (de komponente met de grootste frequentie van het doublet), dan zendt de damp *alleen* de lijn D_2 uit. — Hoogstwaarschijnlijk geldt het analoge voor de andere komponente D_1 [2]).

Over het algemeen schijnt een scherp samenvallen van de opvallende lijn met een absorbtielijn van de fluoresceerende damp noodig te wezen [3]).

Voor zoover mij bekend is heeft men tot nog toe deze resonantie-spektra niet met de theorie van Bohr in verband gebracht.

De *fluorescentie der Röntgenstralen* schijnt aan eenvoudiger wetten te gehoorzamen. Men zie hierover de onderzoekingen van C. G. Barkla [4]) en verder de boven onder **c**) genoemde artikelen.

f) *Absorbtie van straling.*

Reeds meermalen is boven de door Bohr uitgesproken hypothese vermeld, volgens welke een mechanisch systeem dat zich in een stralingsveld bevindt, uit een quantenbeweging met

[1]) Cf. Recent Researches, p. 15, 30.

[2]) R. W. Wood & L. Dunoyer, Phil. Mag. **27**, p. 1018, 1914.

[3]) Cf. R. W. Wood & L. Dunoyer, l.c. — Ook: Recent Researches, p. 48.

[4]) Zie voornamelijk C. G. Barkla, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **8**, p. 471, 1911. Voor een overzicht van de latere onderzoekingen: C. G. Barkla, Proc. Roy. Soc. **A 92**, p. 501, 1916.
Verder vele artikelen in de Phil. Mag.

energie α_1 over kan springen in een andere beweging met grootere energie α_2, onder absorbtie van de energie $\alpha_2 - \alpha_1$ uit lichtstraling van de frequentie:

$$\nu = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h} .$$

Deze hypothese verklaart op eenvoudige wijze de wet van KIRCHHOFF.

BOHR heeft echter nog de volgende uitbreiding hieraan gegeven [1]):

Beschouw een model van een atoom, waarin een elektron op verschillende banen kan loopen. Zij α_1 de energie bij een bepaalden bewegingstoestand 1; α_∞ de energie in een toestand waarin het beschouwde elektron geheel vrij is (b.v. zonder snelheid zich op oneindigen afstand van het atoom bevindt) [2]). Dan kan volgens BOHR het systeem (het atoom) ook licht absorbeeren van de frequentie:

$$\nu > \frac{\alpha_\infty - \alpha_1}{h} .$$

Uit de straling wordt opgenomen de energie $h\nu$; het overschot

$$h\nu - (\alpha_\infty - \alpha_1)$$

krijgt het elektron als *kinetische energie*. (Zie echter opmerking II).

Men kan hierbij de volgende opmerkingen maken:

I) In het absorbtiespektrum van een damp, bestaande uit dergelijke atomen, zal men moeten waarnemen:

1) een reeks *absorbtielijnen*:

$$\nu = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h}, \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{h}, \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{h} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

welke overeenkomen met een bepaalde reeks uit het emissiespektrum van de damp;

2) een kontinuë *absorbtieband*, waarvoor:

$$\nu \geqslant \frac{\alpha_\infty - \alpha_1}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

[1]) N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 17, 1913.

[2]) In de in hoofdstuk III besproken problemen was steeds de energie zoo gemeten, dat α_∞ gelijk aan 0 was. Dan is α_i negatief, dus gelijk te stellen aan: $\alpha_i = -A_i$, waarin A_i positief is.

Deze band strekt zich dus uit van de grens der reeks (A) $\left(\nu_g = \frac{\alpha_\infty - \alpha_1}{h}\right)$ naar de zijde der grootere frequenties [1]).

Een bevestiging voor deze onderstelling kan men vinden:

α) In een onderzoek van R. W. WOOD over de absorbtie van Na-damp [2]). WOOD nam waar 48 absorbtielijnen, exakt overeenstemmende met de lijnen der hoofdreeks van Natrium, en bovendien een absorbtieband, die zich uitstrekte vanaf de grens van de reeks tot in het uiterste ultraviolet.

β) In de absorbtiebanden, waargenomen bij de spektra der Röntgenstralen.

Zie hierover: W. KOSSEL, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **16,** p. 898, 953, 1914;

E. WAGNER, Ann. d. Phys. **46,** p. 868, 1915; Sitz. Ber. Bayr. Akad. p. 31, 1916.

Men vergelijke echter ook: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51,** p. 161, vgl., 1916. SOMMERFELD komt tot resultaten die naar het schijnt niet overeenstemmen met bovenstaande hypothese.

II) Volgens de onderstelling van BOHR moet bij dit proces het elektron een overschot aan kinetische energie krijgen, gegeven door de formule:

$$h\,\nu - (\alpha_\infty - \alpha_1).$$

Men kan dit in verband brengen met het *foto-elektrisch* effekt, en de ionisatie door bestraling met Röntgenstralen.

Zie hiervoor: P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **50,** p. 829, 1916.

EPSTEIN wijzigt de onderstelling eenigszins: volgens hem kan het elektron het atoom slechts langs bepaalde, door quantenformules gegeven hyperbolische banen verlaten. Zij de energie

[1]) Indien — zooals bijna steeds het geval is — $\alpha_\infty = 0$ is (zie noot [2]), vorige bl.), dan is de grens van de spektraalreeks, en dus de scherpe kant van de absorbtieband, gegeven door:

$$\nu_g = -\frac{\alpha_1}{h} = \frac{A_1}{h}$$

Deze „grensfrequentie" ν_g is de konstante term in de formule voor de spektraalreeks (A), welke geschreven kan worden:

$$\nu_i = \nu_g + \frac{\alpha_i}{h} = \nu_g - \frac{A_i}{h}.$$

[2]) R. W. WOOD, Phys. Optics, New York 1911, p. 513.

behoorende bij een dezer hyperbol. banen: α_h, dan zal het elektron uit de ellipt. baan met energie α_1 in deze hyperb. baan geworpen kunnen worden, zoo:

$$h\nu \geqslant \alpha_h - \alpha_1$$ [1] [2].

Het elektron verlaat het atoom met de kinetische energie α_h, welke slechts bepaalde waarden kan hebben, gegeven door de quantenformules.

Men zie hierover het geciteerde artikel. [3]

[*De breedte van absorbtielijnen.*

De verklaring van de breedte van absorbtielijnen zal in de theorie van Bohr nog groote moeilijkheden kunnen opleveren. In het bizonder is dit het geval met de verbreeding die samenhangt met de dispersie-verschijnselen, en in de klassieke theorieën verklaard werd als een gevolg van het resoneeren der elektronenbewegingen op de invallende trillingen, welke bewegingen door een of anderen weerstand gedempt worden.

Enkele gevallen van verbreeding zullen echter gemakkelijk met de theorie van Bohr in overeenstemming gebracht kunnen worden, b.v. de z.g. thermokinetische verbreeding (zie § 9, slot). Verder kan men zich voorstellen dat door de onderlinge werkingen der molekulen van een gas de quantenbewegingen in elk molekuul kleine (adiabatische — zie § 38) veranderingen ondergaan, waardoor de energie dezer bewegingen iets gewijzigd wordt, en dus ook de frequentie der uitgezonden spektraallijnen. Daar deze „storingen" niet voor alle molekulen even groot behoeven te zijn, en in den loop der tijd zullen veranderen, kan hierdoor een verbreeding van de lijnen teweeggebracht worden. (Vergelijk in verband hiermee ook § 25).]

[1] Zie enkele opmerkingen hierover in § 24.

[2] Steeds is: $\alpha_h > \alpha_\infty$.

[3] [In verband met het bovenstaande vergelijke men de volgende artikelen:
P. Debije, Optische Absorbtionsgrenzen, Phys. Zeitschr. **18**, p. 428, 1917;
J. Hartmann, Ein ausgedehntes Absorbtionsgebiet im Spektrum der Wasserstoffsterne, Phys. Zeitschr. **18**, p. 429, 1917;
The spectra of Nebulae, Nature **99**, p. 354, 1917.]

§ 35. OPMERKING OVER DE TWEEDE QUANTENTHEORIE VAN PLANCK [1]).

De bespreking van deze theorie moet hier zeer beperkt worden. Naar mij toeschijnt kan men de hoofdgedachten ervan als volgt uitdrukken:

1) De quantenformules hebben in de eerste plaats belang voor de statistische mechanika, ter bepaling van een indeeling der faze-ruimte in elementaire gebieden [2]). De quantenformules: $P_i = n_i \, . \, h$ kunnen beschouwd worden als de vergelijkingen van oppervlakken:

$$P_i \, (q_1 \ldots q_f \, p_1 \ldots p_f) = \mathit{konstante} = n_i \, h \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

welke de faze-ruimte (de *q-p*-ruimte) in *cellen* verdeelen. Planck onderstelt nu dat indien men een ensemble van gelijksoortige systemen heeft, en men den toestand van elk systeem voorstelt door een punt in de faze-ruimte, deze punten bij de stationnaire toestandsverdeeling in elke cel *gelijkmatig* over het volume der cel verdeeld zijn. De dichtheid der punten kan echter van cel tot cel veranderen. De formules der statistische mechanika bepalen slechts het totale aantal punten in elke cel, doch niet hoe deze punten in de cel verdeeld zijn [3]).

[1]) Zie: M. Planck, Die Theorie der Wärmestrahlung, 2e Auflage, Leipzig 1913.

[2]) Zie speciaal hiervoor: M. Planck, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **17,** p. 407, 438, 1915 en Ann. d. Phys. **50,** p. 385, 1916.

De quantenformules zelve van Planck stemmen in hoofdzaak overeen met die van Sommerfeld, Bohr, enz.

[3]) Zij N het totale aantal der systemen; N_i het aantal in de elementaire cel i; dan wordt de waarschijnlijkheid van een bepaalde toestandsverdeeling $Z(N_i)$ volgens Planck gedefinieerd door:

$$W = \frac{N!}{N_1! \, N_2! \, N_3! \ldots} \cdot \gamma_1^{N_1} \, \gamma_2^{N_2} \, \gamma_3^{N_3} \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Indien een dergelijke verdeeling tot stand moet komen door de wisselwerkingen tusschen de systemen, zal men genoodzaakt zijn belangrijke wijzigingen aan te brengen in de wetten der mechanika en der elektrodynamika. (Reeds bij de eenatomige gassen geeft de theorie van PLANCK in dit opzicht groote moeilijkheden. Hier moeten b.v. de wetten van de botsing der molekulen geheel veranderd worden, daar anders de toestandsverdeeling van MAXWELL-BOLTZMANN ontstaat.)

2) *Emissie en absorbtie van licht* [1]).

PLANCK heeft oorspronkelijk voor lineaire, harmonisch trillende oscillatoren de hypothese opgesteld:

Een oscillator (of een mechanisch systeem), die zich bevindt in een stralingsveld, *absorbeert kontinu en gelijkmatig* energie, volgens de wetten der klassieke elektrodynamika; zoodra echter tengevolge hiervan de oscillator een grensvlak tusschen twee of meer cellen van de faze-ruimte passeert kan *emissie* plaats vinden [2]). De waarschijnlijkheid der emissie hangt samen met de dichtheid der energie in het stralingsveld (zie Die Theorie der Wärmestrahlung p. 149). Indien emissie plaats vindt, zendt het systeem

waarin γ_i = de waarschijnlijkheid a priori is dat een systeempunt in cel i valt (de z.g. gewichtsfunktie). — Is het volume der cel $= G_i$, dan stelt PLANCK: $G_i = \gamma_i \cdot h^f$ (f = aantal vrijheidsgraden van het systeem).

Uit (I) volgt voor de absolute waarde der entropie van het ensemble:

$$S = k \cdot \log W \quad \text{(II)}$$

De stationnaire toestandsverdeeling wordt gedefinieerd als de meest waarschijnlijke verdeeling (maximum van W, resp. S) bij gegeven totale energie, en gegeven totaal aantal der systemen (N). Voor deze verdeeling is:

$$N_i = \alpha\, \gamma_i\, e^{-\beta \varepsilon_i} \quad \text{(III)}$$

ε_i = *gemiddelde* energie der punten in de cel i; α en β zijn konstanten die bepaald worden door N en door de totale energie van het ensemble.

Deze formules kunnen ook geïnterpreteerd worden in de andere vorm der quantentheorie, waarin *slechts de quantenbewegingen als mogelijk* beschouwd worden, en alle bewegingen die niet aan de quantenvoorwaarden voldoen „verboden" zijn (zie § 41). [N_i is dan het aantal der systemen die een bepaalde quantenbeweging uitvoeren; ε_i is de energie dezer beweging.]

[1]) Zie: Die Theorie der Wärmestrahlung, p. 148; en: M. PLANCK, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1915, p. 909.

[2]) Nog eerder zal volgens PLANCK emissie optreden, indien een systeempunt een „grenslijn" of een „hoekpunt" tusschen meerdere cellen passeert.

in eens alle energie uit, met de frequentie van de bewegingen in het systeem [1]).

De hypothese van PLANCK omtrent de emissie van licht is evenzeer in strijd met de formules der elektrodynamika als de theorie van BOHR. De theorie van PLANCK tracht eenigermate een kompromis te vormen tusschen de klassieke mechanika en elektrodynamika en de quantentheorie. Ofschoon men hierover weinig kan zeggen, schijnt het mij toch dat ze de verklaring der moeilijkheden en tegenstrijdigheden niet eenvoudiger maakt.

Men vergelijke ook een opmerking van A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 12/13, 1916.

Over de emissie en absorbtie van energie heeft PLANCK ook nog eenige opmerkingen gegeven in twee artikelen in de Sitz. Ber. Berl. Akad. 1914, p. 918, en 1915, p. 913.

[1]) Deze laatste kwestie is door PLANCK niet algemeen onderzocht. — In het artikel in de Sitz. Ber. Berl. Akad. van 1915 geeft PLANCK op p. 913 ook een geheel andere hypothese, waardoor het spektrum van Waterstof verklaard kan worden. Hierover schijnen echter geen verdere onderzoekingen gedaan te zijn, terwijl aan den anderen kant de hypothese van BOHR eenvoudiger is.

In het bizonder heeft PLANCK zich nog bezig gehouden met *roteerende* molekulen (zie Ann. d. Phys. **52**, p. 491, 1917).

In het absorbtiespektrum van waterdamp komt een systeem van lijnen voor dat men naar alle waarschijnlijkheid moet toeschrijven aan de absorbtie van licht (of warmtestralen) door roteerende molekulen (zie H. RUBENS en G. HETTNER, Sitz. Ber. Berl. Akad. p. 167, 1916). De aanwezigheid van deze lijnen schijnt in strijd te zijn met de onderstelling der kontinuë absorbtie (men houde in het oog dat bij roteerende systemen de frequentie der rotatie tegelijk met de energie-inhoud van het systeem toeneemt).

PLANCK leidt echter af dat in een ensemble van molekulen met verdeelingsfunktie $W(\omega)$ (ω: hoeksnelheid der rotatie) de absorbtie van stralen van de frequentie ω evenredig is met:

$$-\omega \frac{\partial W}{\partial \omega}$$

Onderstelt men nu dat W geen kontinuë funktie van ω is, maar een „trapvormig" karakter heeft (afwisselend horizontale gedeelten, waar $\partial W / \partial \omega = 0$ is, en diskontinuïteiten), dan kunnen de absorbtielijnen verklaard worden.

Zie over een mogelijke andere verklaring dezer absorbtielijnen § 22 en het daar geciteerde artikel.

§ 36. DE DISPERSIETHEORIE VAN DEBYE EN SOMMERFELD [1]).

Zooals reeds is opgemerkt levert de verklaring van vele optische verschijnselen van uit het standpunt der quantentheorie groote moeilijkheden. Vooral geldt dit voor de theorie van de breking en de dispersie van het licht. Aan den eenen kant is men in het onzekere omtrent de aard van het licht zelf — of dit op de klassieke wijze moet worden opgevat, of dat men te doen heeft met de z.g. „lichtquanten" — aan den anderen kant staat het probleem: hoe reageeren molekulen of atomen (in het algemeen mechanische systemen), wier bewegingen door quantenvoorwaarden gebonden zijn, op de invallende straling?

De hypothese van BOHR heeft slechts betrekking op een zeer speciaal geval van dit laatste probleem: nl. op het geval dat het invallende licht een der frequenties bezit van het spektrum dat het systeem zelf kan uitzenden. In dit geval kan absorbtie intreden, als het systeem in een daarvoor gunstigen toestand verkeert (zie bl. 198).

Hoe zit het echter indien het invallende licht een frequentie heeft, welke afwijkt van de frequenties van het spektrum van het beschouwde systeem? [2]) In dit geval zal volgens de experimenten — en evenzoo volgens de klassieke theorie [3]) — indien licht gaat door een ensemble van systemen (b.v. de molekulen van een gas) de voortplantingssnelheid van het licht gewijzigd

[1]) P. DEBYE, Sitz. Ber. Bayr. Akad. 1915, p. 1.
A. SOMMERFELD, Elster und Geitel-Festschrift, Braunschweig 1915, p. 549.
P. SCHERRER, Inaug. Dissert. Göttingen 1916.
[Samenvatting en algemeene diskussie: A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **53**, p. 497, 1917.]

[2]) Indien het systeem als geheel een translatie-beweging heeft ten opzichte van het koordinatenstelsel waarin de frequentie van het licht gemeten wordt, is de frequentie welke geabsorbeerd wordt een weinig anders dan wanneer het systeem in rust is. Zie hierover § 9 [vergelijk ook bl. 207].

[3]) Zie voor de theorie der dispersieverschijnselen b.v. H. A. LORENTZ, Theory of Electrons, Leipzig 1909, Ch. IV. — Voor het experimenteele gedeelte b.v. R. W. WOOD, Physical Optics, New York 1911, Ch. XIV, XV.

worden [1]) (brekings- en dispersieverschijnselen), en er heeft een gedeeltelijke absorbtie van energie plaats. De formules hiervoor worden in de klassieke theorie afgeleid in de onderstelling dat de elektronen door quasi-elastische krachten gebonden zijn, en dat ze gedwongen trillingen kunnen uitvoeren onder invloed der invallende elektrische golven. De absorbtie wordt teweeggebracht door de weerstand die de trillende elektronen bij hun beweging ondervinden.

Het is nu echter de vraag of een dergelijke behandeling ook mogelijk is, indien men onderstelt dat de bewegingen van de beschouwde mechanische systemen door quantenvoorwaarden zijn gebonden.

Debye heeft de volgende oplossing van het probleem voorgesteld [2]):

Aangenomen wordt dat de invallende straling uit elektrische (of juister uit elektromagnetische) trillingen bestaat, evenals men in de klassieke theorie onderstelt.

Zijn er geen invallende trillingen dan voert het mechanische systeem een of andere stationnaire beweging uit, b.v. een periodieke solutie der bewegingsvergelijkingen [3]). De waarden van de intensiteitskonstanten van deze solutie (grootte van de baan, e.d.) zijn door de quantenvoorwaarden vastgelegd; *overigens worden echter de quantenonderstellingen niet gebruikt, en wordt geheel gerekend volgens de klassieke mechanika en elektrodynamika.*

Het systeem kan in het algemeen kleine trillingen om de beschouwde periodieke solutie uitvoeren [4]). Is het systeem nu onder invloed van een periodieke uitwendige kracht (b.v. een invallende elektrische trilling) met frequentie ω, dan zal het gedwongen trillingen uitvoeren om de beschouwde stationnaire beweging. Men kan voor deze trillingen het elektrisch moment van het systeem berekenen [5]), en hieruit, door het gemiddelde te nemen

[1]) Met voortplantingssnelheid van het licht is hier bedoeld de *golfsnelheid*.

[2]) P. Debye, l. c.

[3]) Bij de beschouwde systemen had men steeds met een periodieke solutie te doen (eenparige rotatie van een ring van elektronen).

[4]) Oplossingen in de nabijheid der periodieke solutie; zie § 26.

[5]) Zijn $\mathbf{r}_i$ de koordinaten (als vektoren opgevat) der elektrische ladingen e_i in het systeem, dan is het elektrisch moment gedefinieerd door:

$$\mu_e = \sum_i e_i \, \mathbf{r}_i \, .$$

voor een groot aantal systemen in verschillende liggingen, enz., de diëlektriciteitskonstante van een ensemble van dergelijke systemen [1]). Hieruit volgt op de bekende wijze de voortplantingssnelheid der elektrische trillingen door het ensemble als funktie van de frequentie ω_e [2]).

DEBYE heeft deze berekening uitgevoerd voor het model van het waterstof-molekuul, en is tot een formule gekomen welke zeer goed overeenstemt met de experimenteele bepalingen van de brekingsindex van waterstofgas [3]).

SOMMERFELD heeft een meer algemeene behandeling gegeven voor een molekuul met axiale symmetrie, dat bestaat uit een aantal kernen die op de symmetrie-as liggen, en een aantal elektronen welke rondloopen op een cirkel om deze as [4]).

Door SCHERRER is de dispersie onderzocht van waterstof wanneer de bewegingen der elektronen door een konstant magnetisch veld gestoord zijn (dispersie van de elektromagnetische draaiing van het polarisatievlak). De door hem afgeleide formule stemt goed overeen met de metingen van SIERTSEMA hierover (l.c.) [5]).

Het zij veroorloofd de berekeningen zelf hier niet weer te geven.

Slechts zij vermeld dat de algemeene vorm der formule voor de brekingsindex $\varkappa$ luidt:

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{4\pi e^2}{3m} \sum_{k,l} \frac{N \, . \, s' . \, C_{kl}}{\omega_e^2 - \omega_{kl}^2} \quad {}^{6)} \quad \ldots \ldots \ldots (26)$$

waarin N het aantal molekulen per volume-eenheid is; s het aantal elektronen per molekuul. De grootheden C_{kl} zijn nume-

[1]) Voor nadere bizonderheden van deze berekeningen wordt verwezen naar de geciteerde artikelen van DEBYE en SOMMERFELD.

[2]) Cf. DEBYE en SOMMERFELD, l. c. Zie echter ook beneden, opmerking 2.

[3]) P. DEBYE, l.c.

[4]) DEBYE en SOMMERFELD hebben ook de dispersie-formule voor Helium volgens dezelfde methode berekend, in de onderstelling dat de beide elektronen van het Helium-atoom op eenzelfde cirkel rondloopen, diametraal tegenover elkaar. De gevonden formule stemt echter, zooals zij opmerken, *niet* overeen met de experimenteele resultaten (l.c.) [Zie ook A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **53**, p. 557, 1917].

[5]) [SOMMERFELD heeft op de berekeningen van SCHERRER kritiek uitgeoefend; zie Ann. d. Phys. **53**, p. 500, 1917.]

[6]) A. SOMMERFELD, Elster und Geitel-Festschrift, p. 576.

rieke konstanten; de ω_{kl} zijn de eigenfrequenties der kleine trillingen van het systeem om de beschouwde periodieke solutie [1]).

Bij de berekening is verder een *demping* der trillingen principieel verwaarloosd, zoodat men geen absorbtie heeft, en de dispersie normaal verloopt.

In verband met de theorie van Debye en Sommerfeld kan het volgende opgemerkt worden:

[1]) *Opmerkingen bij formule* (26).

1) De algemeene uitdrukking voor de koordinaten voor een oplossing in de nabijheid van een periodieke solutie is gegeven in § 26, formule (10). Uit deze formule blijkt dat de frequenties der kleine trillingen om de periodieke solutie t.o.v. een koordinatenstelsel, dat niet met de oorspronkelijke periodieke solutie meegaat (in de gewone gevallen: een koordinatenstelsel dat niet met de ongestoorde cirkelbeweging der elektronen meeroteert) in het algemeen van den vorm zijn:

$$\omega_{kl} = \pm l \cdot \omega + \omega_k \quad \text{. . . . . (A)}$$

waar ω de frequentie is van de ongestoorde periodieke solutie, terwijl de grootheden $\alpha_k = \omega_k \sqrt{-1}$ de zoogenaamde karakteristieke exponenten zijn. — Men kan de grootheden $\omega_1 \ldots \omega_k \ldots$ opvatten als de frequenties der kleine trillingen, „beschouwd van uit de periodieke solutie". In de gewoonlijk voorkomende gevallen, waar de periodieke solutie een eenparige cirkelbeweging der elektronen is, zijn dit de frequenties, beschouwd van uit een koordinatenstelsel, dat met de elektronen meeroteert; in dit geval heeft in formule (A) l alleen de waarden 0 en 1. Zie hierover een opmerking van A. Sommerfeld, l.c. p. 577. (Zie ook boven, bl. 148, **B**).

2) In de klassieke dispersietheorie (Lorentz, Drude) beschouwt men de elektronen als isotroop, quasi-elastisch gebonden; in dit geval komt men tot een dergelijke formule als (26), echter zijn dan de koefficienten $C = 1$. In de theorie van Debye en Sommerfeld heeft men daarentegen te doen met trillingen om een stationnairen bewegingstoestand; de elektronen zijn dan als het ware anisotroop gebonden, wat tengevolge heeft dat de C's niet meer gelijk aan 1 zijn.

Men kan dit aldus interpreteeren: In de theorie van Drude staat in de tellers der breuken eenvoudig N maal het aantal elektronen per molekuul s; in de theorie van Debye en Sommerfeld is het aantal s vervangen door het „schijnbare aantal" $s_{kl} = C_{kl}\, s$, wat niet noodzakelijk een geheel getal behoeft te zijn.

J. Koch had reeds uit zeer nauwkeurige metingen der dispersie in waterstof en lucht de gevolgtrekking gemaakt dat het aantal elektronen per molekuul in de formule van Drude niet steeds een geheel getal kan wezen. In de theorie van Debye en Sommerfeld vindt dit een ongedwongen verklaring. (P. Debye, l.c. p. 19; A. Sommerfeld, l.c. p. 576 [en Ann. d. Phys. **53**, p. 497, 1917]).

1) Zooals boven reeds vermeld is, wordt bij de berekening geen gebruik gemaakt van quantenonderstellingen, behalve voor de bepaling van de absolute grootte der banen. — De berekening berust geheel op klassieken grondslag.

De vraag doet zich dus voor: Is dit in overeenstemming met de grondgedachten der quantentheorie? De groote onzekerheid die heerscht omtrent den vorm der principes van de quantentheorie maakt echter een beantwoording dezer vraag tenminste voor het oogenblik bijna onmogelijk. Juist in gevallen als dit waar een systeem beïnvloed wordt door een veranderlijke uitwendige kracht zijn de gebruikelijke formuleeringen der quantenhypothese ongeldig.

De vraag: kan een systeem, waarvan de bewegingen door quantenvoorwaarden zijn vastgelegd, kleine trillingen om deze bewegingen uitvoeren, moet dus voorloopig open blijven.

[Het komt mij voor dat men om deze vraag te kunnen beantwoorden, probeeren moet of het mogelijk is de gedwongen bewegingen op te vatten als grensgeval van *vrije* bewegingen van een uitgebreider systeem, daar men voor de vrije bewegingen van een mechanisch systeem in het algemeen quantenformules kan opstellen. Daartoe kan men onderstellen dat de z.g. „uitwendige krachten" die op het gegeven systeem (I) werken, uitgeoefend worden door een ander systeem (II), dat met het eerste op de een of andere wijze gekoppeld is [1]). Indien men de koppeling tusschen (I) en (II) zeer zwak maakt, doch aan de bewegingen van (II) een groote intensiteit geeft, zal (II) een merkbaren invloed op (I) uitoefenen, terwijl omgekeerd (II) door (I) slechts weinig gestoord wordt. Gaat men tot het grensgeval over, dan komt het tenslotte op hetzelfde neer alsof op (I) bepaalde krachten werken, welke gegeven funkties van den tijd zijn.

Wil men nu quantenvoorwaarden invoeren, dan moet men eerst die voor het totale systeem (dat ontstaan is door de koppeling van (I) met (II)) opstellen, en daarna onderzoeken waarin deze overgaan, wanneer men de koppeling onbeperkt laat afnemen, en tegelijk de bewegingen van (II) sterker en sterker maakt, door bepaalde quantengetallen — nl. die welke om zoo te zeggen behooren bij de vrijheidsgraden van (II) — steeds grooter te nemen.

[1]) Zie hierover een mededeeling in de Versl. Akad. Amst. XXVI, p. 702, 1917.

Voor de nadere uitwerking en een eenigszins algemeene behandeling dezer gedachte wordt verwezen naar het geciteerde artikel. — Hier zij slechts kort een voorbeeld gegeven van een systeem dat kleine trillingen om een evenwichtsstand of een stationnairen bewegingstoestand kan uitvoeren, en waarop een periodieke uitwendige kracht werkt. Zij de funktie van LAGRANGE voor het systeem:

$$L_I = \frac{1}{2} \left\{ \sum A_{kl}\, \dot q_k \dot q_l + \sum B_{kl}\, \dot q_k q_l + \sum C_{kl}\, q_k q_l \right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

en zij de uitwendige kracht: $F = A \cos (s\,t + \varepsilon_0)$; de ontbondene hiervan in de richting der koordinaat q_k : $F_k = \gamma_k F$. De bewegingsvergelijkingen voor de koordinaten q_k zijn dan:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L_I}{\partial q_k} = F_k = \gamma_k\, A \cos (s\,t + \varepsilon_0) \quad \ldots\ldots (b)$$

In plaats van deze uitwendige kracht voert men nu een hulpsysteem (II) in, met de LAGRANGE-funktie:

$$L_{II} = \frac{1}{2}\, (\dot x^2 - s^2 x^2) \quad \ldots\ldots (c)$$

Hierin is x een koordinaat welke een periodieke beweging uitvoert en de kracht F bepaalt. Men kan dan veronderstellen dat beide systemen gekoppeld zijn, en dat de funktie van LAGRANGE voor het resulteerende systeem luidt:

$$L = L_I + L_{II} + \mu\, x \sum_k \gamma_k\, q_k \quad \ldots\ldots (d)$$

De funktie: $\lambda = \mu\, x \sum \gamma_k\, q_k$ bepaalt de koppeling tusschen de beide systemen; μ is een parameter welke men kleiner en kleiner kan nemen om de koppeling willekeurig zwak te maken. De bewegingsvergelijkingen luiden nu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L_I}{\partial q_k} = \mu\, \gamma_k\, x \quad \ldots\ldots (e)$$

en:

$$\ddot x - s^2 x = \mu \sum_k \gamma_k\, q_k \quad \ldots\ldots (f)$$

$\mu\, \gamma_k\, x$ is dus gekomen in de plaats van F_k. Daar μ zeer klein is en x groot (zoodat lim. $\mu\, x$ een eindige, doch kleine grootheid

is), zal men in vergelijking (f) het tweede lid, als zijnde klein van de tweede orde t.o.v. het eerste, mogen verwaarloozen; men heeft dus:

$$x = C_0 \cos(s\,t + \varepsilon_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

De vergelijking (e) gaat dus over in (b), zoo men $\mu\, C_0 = A$ neemt.

Stel dat men nu de vergelijkingen (c) geheel heeft opgelost, dan zal men voor iedere koordinaat q_k een uitdrukking vinden van den vorm:

$$q_k = \mu\, \beta_k\, C_0 \cos(s\,t + \varepsilon_0) + \sum_i \beta_{ki}\, C_i \cos(\omega_i\, t + \varepsilon_i) \quad \ldots \quad (h)$$

De eerste term in het tweede lid stelt voor de gedwongen trilling; de termen van de som zijn de vrije trillingen van het beschouwde systeem (I). *Vat men echter het resulteerende systeem in het oog, waarvan* (g) *en* (h) *tezamen de oplossing vormen, dan zijn natuurlijk alle trillingen als vrije op te vatten.* — De konstanten C_0, C_1, C_2, ... C_f zijn de amplituden der trillingen. Voert men als hoekvariabelen in:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= s\,t + \varepsilon_0 \\ Q_i &= \omega_i\, t + \varepsilon_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

dan kan men de quantenvoorwaarden opstellen volgens de formule:

$$\int_0^{2\pi} d\,Q \left[\dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial Q} + \sum_k p_k\,\frac{\partial q_k}{\partial Q}\right] = n\,h \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

Voor de Q_i heeft men:

$$\int_0^{2\pi} d\,Q_i \sum p_k\,\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = n_i\,h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

voor Q_0 bij verwaarloozing van $(\mu\, C_0)^2$:

$$\int_0^{2\pi} d\,Q_0 \,.\, \dot{x}\,\frac{\partial x}{\partial Q} = \pi\, s\, C_0^2 = n_0\,h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Bij verwaarloozing van μ^2 blijken dus de beide groepen van quantenvoorwaarden geheel onafhankelijk van elkaar te zijn.

De formules (l) bepalen C_1, C_2 . . ; uit (m) volgt voor C_0:

$$C_0 = \sqrt{\frac{n_0 h}{\pi s}}$$

Stelt men lim. $\mu C_0 =$ lim. $\mu \sqrt{\frac{n_0 h}{\pi s}} = A$, dan gaat ($h$) over in:

$$q_k = \beta_k A \cos(s t + \varepsilon_0) + \sum_i \beta_{ki} C_i(n_i) \cos Q_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

Men komt dan tot hetzelfde resultaat als hetgeen door de klassieke theorie wordt geleverd. Praktisch kan men A als kontinu veranderlijk beschouwen.

Hierin ligt dus een rechtvaardiging van de rekenmethode gebezigd door DEBYE en SOMMERFELD[1]). Om het dispersieprobleem geheel in overeenstemming te brengen met het hier behandelde zou men de elektrische trillingen welke op de gasmolekulen werken, moeten opvatten als de eigentrillingen van een mechanisch systeem. Dit zou b.v. kunnen geschieden door het stralingsveld te beschouwen in een holle ruimte met volkomen geleidende wanden, waarin het gas is opgesloten. De bewegingen van de elektronen in de molekulen en de eigentrillingen van het elektromagnetische veld zullen elkaar dan wederkeerig beïnvloeden: kan men al deze bewegingen berekenen, dan is het mogelijk quantenformules op te stellen, welke zoowel de elektronenbewegingen in de molekulen als de elektrische trillingen van het veld vastleggen. De dispersieformule komt hier dan te voorschijn als een betrekking tusschen de frequentie van de elektromagnetische hoofdtrillingen van de ruimte en hun golflengte[2]).

[1]) Zie over de kwestie der *instabiele* trillingen beneden onder 5).

[2]) Is de dichtheid van het gas eindig, dan zal men hier niet de verwaarloozingen kunnen toepassen, welke boven gemaakt zijn (schrappen van termen met μ^2). Het aantal termen b.v. in het tweede lid van vergelijking (f) is dan gelijk aan of een veelvoud van het aantal molekulen, welk aantal toeneemt naarmate men de afmetingen der ruimte vergroot om μ kleiner te maken. Dit heeft ten gevolge dat men het tweede lid niet willekeurig klein kan maken, hetgeen ook te verwachten is, daar anders de aanwezigheid van het gas geen invloed zou hebben op de frequentie der eigentrillingen van de ruimte, en er dus geen dispersie zou zijn. — Bij de quantenformules kan zich iets dergelijks voordoen. De

Bij deze berekeningen diene men wel in het oog te houden, dat ondersteld is dat *geen resonantie* optreedt tusschen het systeem (I) en het systeem (II), resp. het systeem van uitwendige krachten. Het is mogelijk dat indien dit laatste wel het geval is, men volgens andere methoden te werk moet gaan; in ieder geval zijn dan de benaderingen waarvan boven gebruik is gemaakt niet meer geldig.

Op de dispersietheorie van DEBYE en SOMMERFELD heeft dit echter geen direkten invloed, daar deze slechts opgesteld is voor een gebied dat ver van de resonantie-frequenties afligt. (Zie in verband hiermee beneden, **3**) en **4**)).]

2) Moeilijkheden leveren verder op:

a) de onzekerheid omtrent de aard van het licht zelve;

b) het probleem: mag men uit de gemiddelde waarde van het elektrisch moment der molekulen op de klassieke wijze de polarisatie en de dielektriciteitskonstante berekenen? Volgens de theorie van BOHR mag het stralingsveld van een systeem niet volgens de formules der elektrodynamika berekend worden, en als ik me niet vergis, heeft men hier toch met een eenigermate verwant probleem te doen. Men heeft wel het vermoeden geuit, dat de hypothese van BOHR omtrent de afwezigheid van uitstraling van energie slechts zou gelden voor de bewegingen die aan de quantenvoorwaarden voldoen (dus voor de ongestoorde bewe-

berekening verloopt dus minder eenvoudig dan boven is aangegeven; de principes blijven echter geheel dezelfde.

Ook wanneer men bij dergelijke berekeningen termen van de tweede orde, enz., in aanmerking wil nemen, worden de formules ingewikkelder, vooral wanneer de „uitwendige krachten" (resp. de koppeling met het systeem (II)) de perioden der bewegingen van het systeem (I) beïnvloeden.

Algemeen kan men echter tot het resultaat komen: *een mechanisch systeem, waarvan de bewegingen door quantenvoorwaarden zijn gebonden, kan meetrillen met uitwendige krachten; de juiste vorm der bewegingen en der quantenvoorwaarden zal men in elk speciaal geval moeten nagaan door een hulpsysteem in te voeren dat met het eerste gekoppeld wordt, en dan een grensproces toe te passen.*

(In § 4 van het artikel in de Versl. Akad. Amst. is hier eenigszins luchtig overheen gegaan, doordat aangenomen is dat men alle voorkomende grootheden naar opklimmende machten van μ kan ontwikkelen. Indien evenwel μ of μ^2, enz., voorkomt in de periode van een goniometrische funktie zou dit moeilijkheden kunnen opleveren. Het begrip superpositie is daar misschien in te ruimen zin gebezigd.)

ging in het bovenstaande geval); bewegingen die echter niet aan de quantenvoorwaarden voldoen, zooals de gestoorde beweging (de gedwongen trillingen om de periodieke solutie), zouden energie kunnen uitstralen in overeenstemming met de formules der klassieke theorie [1]).

Speciaal zij verwezen naar een kritiek welke C. W. OSEEN [2]) geeft op de theorie van DEBYE en SOMMERFELD, vooral in verband met het niet geldig zijn der vergelijkingen van MAXWELL. (Zie ook boven bl. 193).

OSEEN zegt dat de voornaamste opgave der dispersietheorie door het werk van DEBYE en SOMMERFELD nog onopgelost is gebleven: nl. te bewijzen dat de voortplanting van het licht in een gas beheerscht wordt door een differentiaalvergelijking van het bekende type, en dat de verschijnselen aan het oppervlak gehoorzamen aan de bekende, experimenteel bevestigde wetten.

3) De formules geven *niet* de absorbtie en de anomale dispersie.

Om deze te verklaren zou men ergens een demping der elektronenbeweging moeten invoeren; hoe dit echter geschieden kan zonder in strijd te komen met de eigenschappen van het molekuul, is niet bekend [3]).

4) De „resonantie-frequenties", waarbij de brekingsindex een singulariteit vertoont, zijn volgens formule (26) — indien men deze zoover extrapoleert — de frequenties ω_{kl} der oplossingen in de buurt van de beschouwde stationnaire beweging. Deze frequenties zijn in het algemeen niet dezelfde als de frequenties der spektraallijnen welke het systeem kan uitzenden.

Bij *elektrisch lichtgevende waterstof (H-atomen)* heeft men echter anomale dispersie waargenomen in de buurt der spektraallijnen

[1]) Cf. een opmerking van A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 13, 1916. Verder N. BOHR, Phil. Mag. **26**, p. 23/24, 1913.

[Men zal deze kwestie moeten herzien in verband met hetgeen op bl. 218 is opgemerkt.]

[2]) C. W. OSEEN, Phys. Zeitschr. **16**, p. 396, 405, 1915.

[3]) A. SOMMERFELD (l. c. p. 577) maakt de opmerking dat de afgeleide dispersieformule slechts op grooten afstand van de emissie- en absorbtielijnen en voor normale dispersie geldig is.

die de waterstof zelf kan uitzenden [1]); hier vindt ook absorbtie plaats [2]).

De dispersie kan in de omgeving van de lijn H_α voorgesteld worden door de formule:

$$\mu = \mu_0 + \frac{D}{\lambda - \lambda_\alpha} \;{}^{3)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Deze formule heeft dus een singulariteit voor:

frequentie van het invallende licht (ω_e) = frequentie van de lijn H_α . . . . (28)

Volgens de theorie van BOHR wordt de frequentie van de lijn H_α bepaald door het verschil in energie tusschen twee quantenbewegingen van het waterstof-atoom; in de eene is de intensiteitskonstante $\mathbf{P}_1 = 3 \,.\, h/2\,\pi$; in de andere is $\mathbf{P}_1 = 2 \,.\, h/2\,\pi$. De formule voor de frequentie van H_α luidt:

$$\omega_\alpha = 2\,\pi\,\nu_\alpha = \frac{4\,\pi^3\,m\,e^4}{h^3}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) {}^{4)} \quad \ldots\ldots (29)$$

Aan den anderen kant vindt men voor de frequenties ω_k van de kleine trillingen om een stationnaire elliptische beweging, waarvoor $\mathbf{P}_1 = n \,.\, h/2\,\pi$ is:

$$\omega_k = k \,.\, \frac{8\,\pi^3\,m\,e^4}{n^3\,h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Voor geen enkele waarde van k of n is een frequentie ω_k gelijk aan ω_α.

De anomale dispersie in de omgeving der lijn H_α kan dus niet door de theorie van DEBYE en SOMMERFELD verklaard worden.

1) Zie voor literatuur over anomale dispersie in de nabijheid van spektraallijnen: H. M. KONEN, Das Leuchten der Gase und Dämpfe (Braunschweig 1913), p. 306. Speciaal voor *Waterstof*: R. LADENBURG, Phys. Zeitschr. **12**, p. 10, 1911.

Over anomale dispersie in Natriumdamp in de buurt der D-lijnen: o. a. D. ROSCHDESTWENSKY, Ann d. Phys. **39**, p. 307, 1912; verder vele onderzoekingen van R. W. WOOD (Physical Optics).

2) Cf boven bl. 86, 2), waar ook citaten opgegeven zijn.

3) Voor de lijn H_β geldt een dergelijke formule; de konstante D is bij H_β ca. 10 maal kleiner dan bij H_α (R. LADENBURG, l. c.).

4) Zie § 17, bl. 82, 83.

5) Door Mej. H. J. VAN LEEUWEN is er op gewezen dat één der kleine trillingen welke voorkomt in de berekening van DEBYE over de dispersie van waterstof, *instabiel* is [1]).

Men komt hier dus voor een nieuw probleem te staan: mogen de instabiele trillingen op dezelfde wijze behandeld worden als de stabiele? Men zou verwachten dat na een tijdelijke werking van een uitwendige kracht op het systeem de instabiele bewegingen niet zullen ophouden, en dat het systeem uiteen zal vallen [2]).

Door Mej. VAN LEEUWEN zijn verschillende methoden onderzocht om deze instabiele trilling te doen verdwijnen; voor de aldus stabiel gemaakte systemen zijn dispersieformules berekend, welke echter veel minder goed met de experimenteel gevondene blijken overeen te stemmen dan de formule van DEBYE.

Een speciale methode is nog nagegaan door C. DAVISSON en door J. M. BURGERS [3]). Hierbij is het model stabiel gemaakt door als kinematische relatie in te voeren dat het moment van hoeveelheid van beweging van elk elektron steeds gelijk moet blijven aan $h/2\pi$. De afgeleide dispersieformule stemt echter evenmin goed overeen met de experimenteele formule.

Zie in verband hiermee hetgeen op bl. 145 en 146 is opgemerkt omtrent de invoering dezer kinematische voorwaarde.

De oorspronkelijke berekening van DEBYE, waarin de instabiele trillingen op dezelfde wijze behandeld zijn als de stabiele, heeft bij het model van het waterstof-molekuul de beste resultaten gegeven. Evenzoo is er goede overeenstemming voor de rotatie-dispersie, welke door SCHERRER berekend is [4]).

[In verband met hetgeen boven is opgemerkt omtrent de behandeling van de gedwongen trillingen (zie bij opmerking 1), en met de in § 26, Noot II, ontwikkelde beschouwingen over instabiele systemen, krijgt echter ook deze kwestie een geheel ander karakter. Het komt mij voor dat men ook hier de door

[1]) Mej. H. J. VAN LEEUWEN, Versl. Akad. Amsterdam XXIV, p. 1047, 1915/16.
Zie ook: A. SOMMERFELD, l. c. p. 577 en: A. RUBINOWICZ, Phys. Zeitschr. **18**, p. 187, 1917.

[2]) Mej. H. J. VAN LEEUWEN, l. c. p. 1053.

[3]) C. DAVISSON, Phys. Rev. **8**, p. 20, 1916.
J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 404, 1916. (Zie ook een opmerking in de Engelsche vertaling hiervan — Proc. Acad. Amst. XIX, p. 488 — over het artikel van DAVISSON.)

[4]) [Zie noot [5]), bl. 213.]

DEBYE gevolgde methode van berekening als juist moet aannemen. Om dit toe te lichten zou ik het volgende voorbeeld willen geven, waarin de beïnvloeding van een eenvoudig instabiel systeem door een periodieke uitwendige kracht wordt nagegaan.

Zij de LAGRANGE-funktie van het instabiele systeem:

$$L_I = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + k^2 x^2),$$

waarvoor de algemeene oplossing is:

$$x = C_1 \cosh(kt + \varepsilon_1).$$

De koordinaat x neemt onbegrensd toe; de beweging is instabiel. De vorm der quantenvoorwaarde voor een dergelijke beweging is niet bekend; men zal echter kunnen aannemen dat voor een bepaalde waarde van het quantengetal (b.v. de waarde nul) de amplitude C_1 gelijk nul is, zoodat er geen beweging plaats heeft.

Wordt dit systeem nu beïnvloed door een periodieke uitwendige kracht (b.v. door elektrische trillingen), dan moet men zooals in de toevoeging aan opmerking **1**) is uiteengezet, onderstellen dat deze uitwendige kracht uitgeoefend wordt door een tweede systeem dat met het eerste gekoppeld is, en dan de bewegingen van het resulteerende systeem onderzoeken. Voor de LAGRANGE-funktie van het tweede systeem kan men nemen: $L_{II} = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 - s^2 y^2)$, en voor de koppelingsfunktie: $\lambda = \mu x y$, zoodat men voor het resulteerende systeem heeft:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(k^2 x^2 - s^2 y^2 + 2\mu x y).$$

Verwaarloost men kwadraten, enz., van de kleine parameter μ, dan vindt men voor dit probleem als algemeene oplossing:

$$\begin{cases} x = C_1 \cosh(kt + \varepsilon_1) - \dfrac{\mu C_2}{s^2 + k^2} \cos(st + \varepsilon_2) \\ y = \dfrac{\mu C_1}{s^2 + k^2} \cosh(kt + \varepsilon_1) + C_2 \cos(st + \varepsilon_2) \end{cases}$$

Daar er twee graden van vrijheid zijn moet men twee quantenvoorwaarden invoeren om de konstanten C_1 en C_2 te bepalen. De tweede luidt, zooals steeds voor harmonische trillingen:

$$\pi C_2^2 s (= 2\pi P_2) = n_2 h.$$

De vorm van de eerste is onbekend; men zal deze echter zoo kunnen kiezen dat $C_1 = 0$ is, zoodat men een stabiele beweging heeft. Om nu over te gaan tot het grensgeval van gedwongen trillingen moet men het quantengetal n_2 grooter en grooter nemen, en tegelijk de koppelingskoefficient μ kleiner en kleiner: stelt men:

$$\lim.\ \mu \sqrt{\frac{n_2 h}{\pi s}} = F$$

dan heeft men tenslotte de oplossing in den gewonen vorm:

$$x = -\frac{F}{s^2 + k^2} \cos (st + \varepsilon_2)$$

Neemt men nog bovendien de hypothese aan dat de beide ingevoerde quantengetallen onafhankelijk van elkaar kunnen veranderen (wat zeer waarschijnlijk is), dan komt men tot het resultaat dat het beschouwde systeem van uit een toestand van rust kan overgaan in een toestand van meetrillen en omgekeerd, zonder dat er gevaar is voor het optreden der instabiele beweging, daar hierbij slechts het quantengetal n_2 verandert, zoodat C_1 steeds gelijk *nul* blijft.]

6) Voor andere molekulen (Helium — DEBYE, SOMMERFELD; Zuurstof en Stikstof — SOMMERFELD, l. c.) is het niet gelukt goede dispersieformules af te leiden. Dit zou echter aan onze onbekendheid met den bouw dezer molekulen kunnen worden toegeschreven.

[Men vergelijke hiervoor echter het laatste artikel van SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **53**, p. 497, 1917, speciaal Kap. III. De modellen welke SOMMERFELD aanneemt voor O_2 en N_2 hebben eenige gelijkenis met het model voor H_2: in de onmiddellijke nabijheid van elke kern bevinden zich nu echter 4 elektronen; de overige loopen in een ring tusschen beide kernen. Bij Waterstof heeft dus de ring 2 elektronen, bij Zuurstof 4, bij Stikstof 6.

Wat de quantenformules betreft komt SOMMERFELD tot het eigenaardige resultaat, dat in een ring van $2n$ elektronen het moment van hoeveelheid van beweging van ieder elektron de waarde:

$$p = \frac{h}{2\pi} \sqrt{n}$$

moet hebben. In verband met de algemeene gedachten die ik hier heb uiteengezet, lijkt mij dit zeer vreemd; veel meer zou ik voelen voor de onderstelling dat alleen het *totale moment van de geheele ring* een geheel aantal malen $\frac{h}{2\pi}$ behoeft te zijn, doch dat het moment van een afzonderlijk elektron wel een gebroken aantal malen dit bedrag mag wezen. Dit kan bij SOMMERFELD's resultaten vrijwel even goed aansluiten, zooals uit bijgaand tabelletje blijkt (zie het gecit. art. p. 546):

		H_2	O_2	N_2
$\frac{p_{disp.}}{h/2\pi}$	(*exper.*):	1,10	1,47	1,74
	(SOMMERFELD):	$\sqrt{1} = 1{,}00$	$\sqrt{2} = 1{,}41$	$\sqrt{3} = 1{,}73$
(gebroken quantengetallen voor de afzonderlijke elektronen):		$\frac{2}{2} = 1{,}00$	$\frac{6}{4} = 1{,}50$	$\frac{10}{6} = 1{,}67$ [1])

Met betrekking tot de hier opgeworpen onderstelling zou ik nog willen opmerken dat volgens de heerschende opvattingen de quantenformules steeds moeten worden toegepast op het *geheele* mechanische systeem, en niet op de afzonderlijke deelen. Dit blijkt b.v. zeer duidelijk uit de invloed die de beweging van de atoomkern bij waterstof op het spektrum heeft (zie § 18). Zie ook noot [1]) op bl. 138.]

7) In verband met de dispersieproblemen zij hier nog even gewezen op de theorie van J. J. THOMSON over de *verstrooiing van Röntgenstralen* (zie: Conduction of Electricity through Gases, p. 255).

THOMSON onderstelt dat de elektronen meetrillen met de in-

[1]) Hierbij is aangenomen dat het totale moment van de elektronenring bedraagt bij H_2 : 2, bij O_2 : 6 en bij N_2 : 10 quanta.

Op p. 549/550 geeft SOMMERFELD op voor NO (dat een ring van 5 elektronen moet hebben): moment per elektron: $p_{disp.} = 1{,}74 \,.\, h/2\pi$.

Geeft men aan de geheele ring 8 quanta (als het ware 5 voor de stikstof, en 3 voor de zuurstof), dan vindt men hiervoor: $1{,}6 \,.\, h/2\pi$; met 9 quanta voor de geheele ring: $1{,}8 \,.\, h/2\pi$.

SOMMERFELD geeft de formule: $\frac{1}{5}(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \,.\, h/2\pi = 1{,}61 \,.\, h/2\pi$.

vallende Röntgenstralen — (hierbij worden de krachten die het elektron aan het atoom binden verwaarloosd, daar de frequentie der invallende trillingen zeer hoog is, en dus de traagheidsreakties veel grooter zijn dan deze krachten) — en dat ze daarbij energie uitstralen volgens formule (6) van § 31, welke energie onttrokken wordt aan de invallende straling.

Deze theorie is door C. G. BARKLA met goed gevolg toegepast ter berekening van het aantal elektronen in een atoom; zie bl. 17, noot [3]).

Verder is hiermee nauw verwant de theorie van de diffraktie en reflektie der Röntgenstralen door kristallen (LAUE, BRAGG.)

Bij een herziening van de dispersietheorie zal men ook op deze kwestie moeten letten.

§ 37. OPMERKINGEN OVER DE MAGNETISCHE EIGENSCHAPPEN VAN HET ATOOMMODEL.

Volgens de algemeen geldende opvattingen doet een rondloopend elektron, evenals een gesloten elektrische stroom, een magnetisch veld om zich heen ontstaan. In eerste benadering — voor groote afstanden tot de baan van het elektron — is het veld hetzelfde als dat van een magneetje met moment:

$$\mu = -\frac{e\,S}{c\,\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

($S =$ oppervlak van de baan; $\tau =$ omloopstijd [1])). De as van het magneetje staat loodrecht op het baanvlak.

Is p_φ het moment van hoeveelheid van beweging van het elektron, dan is: $S/\tau = p_\varphi/2\,m$, en dus:

$$\mu = -\frac{e\,p_\varphi}{2\,m\,c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31a)$$

Neemt men $p_\varphi = n\,.\,h/2\,\pi$, zooals bij de behandelde atoommodellen steeds werd aangenomen, dan vindt men:

$$\mu = \text{ca. } 5\,n \text{ magnetonen } ^{2)} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Men zou dus verwachten dat alle atomen — of tenminste de eenvoudige modellen: H, He, Li, en het H_2-molekuul [3]) — *sterk magnetisch* zijn, terwijl hiervan experimenteel niets gebleken is: H_2, He en Li zijn *diamagnetisch* [4]).

[1]) Deze formule geldt voor een exakt periodieke beweging. Zie voor de afleiding noot I bij deze paragraaf.

[2]) Cf. H. Stanley Allen, Proc. Roy. Soc. **A 90**, Meeting 19 March 1914, p. 17/18. Verder twee artikelen van Th. v. Wereide, Ann. d. Phys. **52**, p. 283, 289, 1917.

[3]) Bij meer gekompliceerde atomen is het misschien mogelijk dat de elektronen gedeeltelijk in tegengestelde richtingen loopen, en elkaars werking opheffen.

[4]) Het waterstof-molekuul zou 10 magnetonen moeten bezitten (Cf. W. H. Keesom, Versl. Akad. Amst. XXIV, p. 625, 1915); men vergelijke hiermee de

Nu hangt de vraag naar het magnetisch gedrag van een stof (b.v. van een gas) samen met de vraag: welke invloed oefenen de verschillende molekulen of atomen op elkaars bewegingen uit, en met statistische problemen.

VOIGT heeft de volgende beschouwingen ontwikkeld [1]):

Indien men de molekulen als gyroskopen opvat van onveranderlijken vorm, welke gyroskopen elektrische ladingen dragen, en door hun rotatie een magnetisch veld veroorzaken, kan men drie gevallen onderscheiden:

a) De molekulen beïnvloeden elkaars rotatie-beweging in geen enkel opzicht. Dan treedt alleen een diamagnetisch effekt op.

b) Door de botsingen der molekulen wordt wel de richting van de rotatie-as beïnvloed, doch niet de rotatie-snelheid. In dit geval gedraagt het gas zich paramagnetisch.

c) Indien bij de botsingen ook de snelheid der rotatie-beweging voortdurend gestoord wordt, treedt in het geheel geen magnetisch effekt op.

In hoeverre de bewegingen van de elektronen in de atoommodellen van RUTHERFORD en BOHR beschouwd mogen worden analoog te zijn aan de rotaties van gyroskopische molekulen verlangt nog een nader onderzoek [2]).

Neemt men echter voorloopig aan dat er een volkomen analogie bestaat, dan komt het er nog op aan uit te maken met welke der drie bovengenoemde gevallen men te doen heeft. Vermoedelijk zal het antwoord hierop luiden: met geval b). Wat men ook aanneemt omtrent de wijze waarop de verschillende molekulen elkaars inwendige beweging beïnvloeden, het is toch zeer waarschijnlijk dat de ligging van het baanvlak der elektronen voortdurend veranderd wordt [3]). Aan den anderen kant

waarde gevonden voor het zuurstof-molekuul: 7 magnetonen, voor het ijzer-atoom: 11 magnetonen, enz.

[1]) Geciteerd naar: H. A. LORENTZ, Encykl. Math. Wiss. V, 14, p. 231 (1903).

[2]) Volgens VOIGT (Ann. d. Phys. **9**, p. 115, 1902 — cf. H. A. LORENTZ, l.c.) schijnt dit niet steeds het geval te zijn.

[3]) Bij het waterstof-molekuul ligt dit zeer voor de hand: men denke slechts aan de afstooting tusschen de kernen der verschillende molekulen. — Bij *H*- en *He*-atomen kan men zich voorstellen dat wanneer twee atomen langs elkaar vliegen het magnetisch veld van het eene atoom een precessie-beweging van het baanvlak der elektronen van het andere doet ontstaan, en omgekeerd. — (Dit effekt is echter naar ruwe schatting zeer gering. Een atoom met μ^* magnetonen

loopen in den tijd waarin twee molekulen elkaar voorbij vliegen de elektronen zoovele malen rond, dat men wel mag aannemen dat de rotatie-snelheid der elektronen gemiddeld niet wordt beïnvloed [1]).

Indien dit juist is zouden dus H_2, *He*, enz., paramagnetisch moeten zijn, in tegenspraak met hetgeen wordt waargenomen.

Er doen zich derhalve de volgende problemen voor:

1) waardoor zijn H_2 , *He*, enz. *niet* paramagnetisch?

2) hoe komt het dat bij die elementen welke wel paramagnetisch zijn, de eenheid van het magnetisch moment van het atoom — het magneton — *vijf maal zoo klein* is als het magnetisch moment van een elektron dat met een moment van hoeveelheid van beweging van 1 quantum — $h/2\pi$ — rondloopt? Bestaat er werkelijk verband tusschen het magneton en dit magnetisch moment, of is dit slechts een toevallige uitkomst?

Sommige onderzoekers hebben de hypothese uitgesproken dat de kern van het atoom een magnetisch moment bezit, en dat dit de magnetische werking der elektronen geheel of gedeeltelijk opheft [2]).

In ieder geval blijkt dat het probleem van het magnetisch gedrag der atoommodellen nog verre van opgelost is [3]).

heeft op een afstand van 2 Å. E. een magnetisch veld van de orde van grootte: μ^*. 10^3 Gauss. De hierdoor teweeggebrachte precessiesnelheid is van de orde van grootte: 10^{10} (zie noot II bij deze paragraaf). Neemt men nu in aanmerking dat Helium-atomen de afstand 2 Å. E. gemiddeld in ca. 2.10^{-13} sek. afleggen, dan blijkt dat de totale draaiing van het baanvlak van de orde 0,1 à 1 graad is).

[1]) Bij waterstof-molekulen is het aantal malen dat de elektronen rondloopen gedurende den tijd waarin twee molekulen elkaar voorbij vliegen naar een ruwe schatting van de orde van grootte: 100 à 1000.

De rotatie-snelheid der elektronen is bovendien door quantenvoorwaarden gebonden; men zal dus moeten aannemen dat zoodra de molekulen elkaar gepasseerd zijn deze snelheid precies dezelfde waarde heeft als te voren. (Vermoedelijk mag men aannemen dat een overspringen van uit de eene quantenbeweging in een andere bij een „botsing" van twee molekulen praktisch niet voorkomt).

[2]) Zie: H. G. Stanley Allen, Proc. Roy. Soc. **A 90,** l.c. p. 17/18;
Phil. Mag. **29**, p. 40, 140, 1915.
Th. v. Wereide, Ann. d. Phys. **52**, p. 283, 1917.

[3]) E. Rutherford (Proc. Roy. Soc. **A 90,** l.c. p. 19) maakt de opmerking dat het sterke magnetisch gedrag van *Fe* en *Ni* vermoedelijk samenhangt met de rangschikking der elektronen aan het *oppervlak* van het atoom, daar het in hooge mate afhankelijk is van de physische en chemische toestand der atomen (allotropie, verbinding met andere elementen, enz.).

Diamagnetisme van Waterstof, Helium en Lithium.

Men kan onderstellen dat door nog onbekende oorzaken de paramagnetische werkingen niet tot uiting komen, doch dat wèl alle atomen waarin elektronen rondloopen een *diamagnetisch* effekt vertoonen, volgens de theorie van LANGEVIN (1904). De grootte van de diamagnetische susceptibiliteit is evenredig met het totale oppervlak S_t der elektronenbanen in het atoom, en is gegeven door de formule:

$$\chi_A = - N_{Av} \cdot \frac{e^2 S_t}{8 \pi m c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

Voor de afleiding dezer formule zie men noot 11 bij deze paragraaf.

Neemt men voor e en e/m de op bl. 83 gegeven waarden, dan is:

$$- \chi_A = 6{,}8.10^9 \, . \, S_t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33a)$$

Nu is gevonden:

voor Waterstof (H_2): $-\chi_A = 2{,}7.10^{-6}$ à $2{,}9.10^{-6}$ [1])
„ Helium (He): $39{,}2.10^{-6}$ [2])
„ Lithium (Li): $4{,}2.10^{-6}$ [3])

Hieruit volgt voor het totale oppervlak der elektronenbanen:

Waterstof: S_t = ca. 4,1 A. E.^{2}
Helium : 58 A. E.^{2}
Lithium : 6,2 A. E.^{2}

Uit het model van DEBYE berekent men voor het waterstofmolekuul:

$$S_t = \text{ca. } 1{,}6 \text{ A. E.}^2$$

Dit stemt dus niet overeen. Ook de voor Helium gevonden

[1]) H. KAMERLINGH ONNES & A. PERRIER, Comm. Leiden, N°. 122a, p. 10, 1911; P. PASCAL, Comptes Rendus **158**, p. 1895, 1914. — Over het hier besproken probleem is ook iets opgemerkt door JUN ISHIWARA, Proc. Tôkyô Math.-Phys. Soc. (2) **8**, p. 181, 1915.

[2]) PAUL TÄNZLER, Ann. d. Phys. **24**, p. 931, 1911.

[3]) PASCAL, l.c.

Opmerking. Volgens PASCAL is de diamagnetische susceptibiliteit der elementen in hun verbindingen een periodieke funktie van het atoomgewicht (of atoomnummer); ze wordt dus vermoedelijk bepaald door de buitenste elektronen van het atoom (evenals de chemische eigenschappen, e.d.).

waarde lijkt veel te groot om met het atoommodel in overeenstemming te kunnen zijn.

Noot I.

Magnetisch veld van een elektron dat in een periodieke baan rondloopt.

Breng een rechthoekig koordinatensysteem aan, waarvan de oorsprong in of zeer dicht bij de baan ligt. De koordinaten van het elektron zijn $\xi\ \eta\ \zeta$; deze worden als zeer klein beschouwd tegenover de koordinaten $x\ y\ z$ van het punt waar men het magnetisch veld wil kennen.

Neemt men aan dat de snelheid van het elektron klein is t.o. van de lichtsnelheid, dan vindt men voor de gemiddelde waarde der x-komponente van de vektor-potentiaal in het punt $x\ y\ z$:

$$\overline{a_x} = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \, . \frac{-e\, .\, \dot{\xi}}{c} \left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right\}^{-1/2} \, .\, . \text{(I)}$$

$$= \lim_{T=\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \, . \frac{-e}{c}\left[\frac{\dot{\xi}}{r} + \frac{1}{r^3}(x\,\xi\,\dot{\xi} + y\,\eta\,\dot{\xi} + z\,\zeta\,\dot{\xi})\right] \ldots \text{(II)}$$

Nu is:

$$\left.\begin{aligned} \lim \left|\frac{1}{T}\int_0^T dt\, .\, \dot{\xi}\right| &\leqq \lim \frac{|\xi_{max}|}{T} = 0 \\ \lim \left|\frac{1}{T}\int_0^T dt\, .\, \xi\,\dot{\xi}\right| &\leqq \lim \frac{\xi^2_{max}}{2\,T} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim \frac{1}{T}\int_0^T dt\, .\, \eta\,\dot{\xi} &= -\frac{S_z}{\tau} \\ \lim \frac{1}{T}\int_0^T dt\, .\, \zeta\,\dot{\xi} &= +\frac{S_y}{\tau} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

waar $S_x\ S_y\ S_z$ de projekties van het oppervlak van de baan

(van het juiste teeken voorzien) op de drie koordinaat-vlakken voorstellen. Hieruit volgt tenslotte voor a_x:

$$a_x = \frac{-e\,(-y\,S_z + z\,S_y)}{\tau\,c\,r^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

Analoog voor a_y en a_z.

Het magnetisch veld is dus hetzelfde als dat van een elementair-magneetje, waarvan de as loodrecht op het baanvlak staat, en dat het moment heeft:

$$\mu = -\frac{e\,S}{c\,\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

Noot II.

Invloed van een uitwendig magnetisch veld op de beweging van een elektron om een atoomkern (verg. hoofdstuk III, § 20).

Volgens bl. 104, formule (46) kan de funktie van HAMILTON voor de beweging van een elektron om een atoomkern bij aanwezigheid van een magnetisch veld steeds tot den vorm herleid worden:

$$H = \mathbf{K}\,(\mathbf{P}) = -\frac{m\,e^2\,E^2}{2\,\mathbf{P}_1^2} + \gamma\,\mathbf{P}_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VII)$$

Deze formule is ook geldig wanneer de sterkte van het magnetisch veld, en dus de grootheid γ, een funktie is van den tijd.

Hieruit volgt dat de twee elementen van de baan $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_3$ steeds konstant zijn, *ook als het magnetisch veld verandert* [1]).

[1]) *Bewijs.* Uit de formules der elektronentheorie volgt dat de beweging van een elektron in een willekeurig elektromagnetisch veld steeds beheerscht wordt door de in § 6 gegeven LAGRANGE-funktie (ook als het veld veranderlijk is). Hetzelfde geldt dus van de LAGRANGE-funktie (44) in § 20 welke slechts een bizondere vorm is van de eerste. De transformatie van HAMILTON om van de LAGRANGE-funktie op de funktie van HAMILTON over te gaan is steeds mogelijk, ook wanneer t expliciet in deze funkties voorkomt (zie b.v. WHITTAKER, Modern Analysis, Cambr. 1917, p. 263.) Dus geldt de funktie van HAMILTON (45), § 20, ook in het geval van een veranderlijk veld. Daar tenslotte de kontakt-transformaties welke gebruikt zijn om van (45) op (46) te komen, de grootheid γ *niet* bevatten en dus *niet* expliciet van t afhankelijk zijn, is ook (46) steeds geldig wanneer γ veranderlijk is (verg. WHITTAKER, l.c. p. 309).

$\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{P}_3$ zijn hier adiabatische invarianten. Vergelijk § 38.

De middelbare beweging der variable $\mathbf{Q}_1$, de grootte van de baan, en de helling van het baanvlak ten opzichte van het xy-vlak veranderen derhalve *niet* indien men een magnetisch veld aanzet.

De eenige invloed van het magnetisch veld is dat het baanvlak een precessie-beweging krijgt om de z-as (vooruitgaan der knoopenlijn):

$$\dot{\mathbf{Q}}_3 = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}_3} = \gamma\ ^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

Berekent men nu de gemiddelde waarde van de vektorpotentiaal over een tijd T, zoo groot dat de knoopenlijn zeer vele malen rondgedraaid is [2]), dan vindt men:

$$\text{Lim}\ \frac{1}{T}\int_0^T dt\,.\,\zeta\dot{\xi} = \overline{\frac{S_y}{\tau}} = 0, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

$$\text{Lim}\ \frac{1}{T}\int_0^T dt\,.\,\eta\dot{\xi} = -\frac{S_z}{\tau} - \frac{\gamma}{2\pi}\,|S_z| \quad \ldots\ldots \quad \text{(X)}$$

Het atoom gedraagt zich dus als een magneetje met moment:

$$\mu = -\frac{e}{c}\left(\frac{S_z}{\tau} + \frac{\gamma}{2\pi}\,|S_z|\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XI)}$$

waarvan de as gericht is langs de z-as van het koordinatensysteem (dus volgens de richting van het uitwendig magnetisch veld).

Heeft men te doen met een gas, bestaande uit atomen wier baanvlakken alle dezelfde grootte hebben, doch gelijkmatig over alle mogelijke standen verdeeld voorkomen, dan is:

$$S_z = 0 \qquad |S_z| = \tfrac{1}{2}\,|S| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XII)}$$

Men vindt dus voor de totale magnetisatie per grammolekuul (event. per gramatoom)

$$-N_{Av}\,.\,\frac{\gamma}{4\pi c}\,e\,|S| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIII)}$$

[1]) Deze beweging van de knoopenlijn is identiek met hetgeen men gewoonlijk aanduidt als de versnelling of vertraging van de elektronenbeweging door de induktie-werkingen bij het aanzetten van het magnetisch veld.]

[2]) Voor een magnetische veldsterkte $\mathbf{M} = 1000$ Gauss is γ ongeveer 9.10^9; de tijd T kan dus b.v. 0,0001 sek. zijn.

en voor de diamagnetische susceptibiliteit:

$$\chi_A = -N_{Av} \frac{e^2 |S|}{8 \pi m c^2} \qquad \text{(XIV)}$$

Indien men te doen heeft met atomen of molekulen die meerdere elektronen bevatten, waarvan de baanvlakken parallel zijn, mag men met groote waarschijnlijkheid aannemen dat de diamagnetische werkingen der verschillende elektronen geaddeerd worden. Men komt dus voor de susceptibiliteit tot de formule:

$$\chi_A = -N_{Av} \frac{e^2 S_t}{8 \pi m c^2} \qquad \text{(XV)}$$

waarin S_t de som der absolute waarden der oppervlakken van alle elektronenbanen in het systeem voorstelt.

HOOFDSTUK VI.

ADIABATISCHE BEÏNVLOEDING VAN EEN MECHANISCH SYSTEEM. OPMERKINGEN OVER STATISTISCHE PROBLEMEN.

§ 38. BEÏNVLOEDING VAN EEN MECHANISCH SYSTEEM DOOR UITWENDIGE KRACHTEN. ADIABATISCHE BEÏNVLOEDING.

De aanleiding tot de volgende opmerkingen is een hypothese opgesteld door EHRENFEST over de z.g. omkeerbaar-adiabatische veranderingen van een mechanisch systeem [1]).

Indien een mechanisch systeem onderworpen is aan de werking van uitwendige krachten blijven in het algemeen de bewegingsvergelijkingen van HAMILTON niet meer geldig. De berekeningen van hoofdstuk II kunnen dan niet worden toegepast, en men kan — tenminste volgens de tegenwoordige stand der theorie — geen quantenvoorwaarden invoeren. Er is nog geen methode bekend om deze problemen aan te passen aan de quantentheorie [2]).

Er bestaat evenwel een bizondere wijze van beïnvloeden waarbij de vergelijkingen van HAMILTON hun geldigheid wel behouden: dit geschiedt in vele gevallen waarin de beïnvloeding bestaat in een langzame verandering van bepaalde parameters die in de funktie van HAMILTON voorkomen.

[1]) P. EHRENFEST, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 412 vgl., 1916. (= Ann. d. Phys. **51**, p. 327, 1916).

[[2]) De beïnvloeding door periodieke krachten, waarmede men te doen heeft bij het probleem der dispersie, is besproken in § 36, bl. 215–218.]

Als voorbeeld kan o.a. het volgende genoemd worden:

De beweging van een elektron in een elektromagnetisch veld wordt beheerscht door de LAGRANGE-funktie:

$$L = -mc^2\left(\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1\right) + e\left(\varphi - \frac{a_x\dot{x} + a_y\dot{y} + a_z\dot{z}}{c}\right) \quad (1)$$

(zie § 6). Deze funktie geldt — op grond van de vergelijkingen der elektronentheorie — ook indien de vier potentialen: φ, a_x, a_y, a_z funkties van den tijd t zijn [1]).

Uit L leidt men met behulp der bekende transformatie van HAMILTON de funktie van HAMILTON af:

$$H = -e\varphi + mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\sum\left(p_x + \frac{e\,a_x}{c}\right)^2} - 1\right) \quad . \; . \; (2)$$

De transformatie van HAMILTON mag ook toegepast worden in het geval dat in L (en dus in H) t *expliciet* voorkomt [2]).

Dus is de funktie van HAMILTON (2) ook geldig zoo het elektromagnetische veld veranderlijk is [3]).

Men stelle zich nu voor dat een elektron in een gegeven konstant elektromagnetisch veld een bepaalde beweging B_0 uitvoert. Dan kan men door de parameters a_1, a_2, ... die het veld bepalen oneindig langzaam te veranderen van de oorspronkelijke waarden a_{10}, a_{20}, ... naar waarden a_{11}, a_{21}, .., de gegeven beweging B_0 van het elektron in een nieuwe B_1 doen overgaan. De konstanten die de beweging B_1 bepalen kan men met behulp van de vergelijkingen der mechanika berekenen uit de konstanten der beweging B_0, zoo de variaties der parameters a_1, a_2 ... bekend zijn [4]). De variaties dezer konstanten zijn onafhankelijk van de wijze waarop de variatie der parameters plaats vindt, mits de laatste slechts oneindig langzaam geschiedt.

Deze wijze een mechanisch systeem te beïnvloeden definieert EHRENFEST als: *reversibel-adiabatisch* [5]).

[1]) K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1903, bl. 127; G. A. SCHOTT, Electromagnetic Radiation (Cambr. 1912), p. 284, verg. (456).

[2]) Zie b.v. E. T. WHITTAKER, Anal. Dynamics, Cambr. 1917, p. 263.

[3]) Ditzelfde bewijs is voor een meer speciaal geval reeds boven gegeven (in noot [1]) op bl. 232).

[4]) Cf. J. M. BURGERS. Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 851, 1916.

[5]) P. EHRENFEST, l. c.

EHRENFEST heeft nu de hypothese uitgesproken: indien de oorspronkelijke beweging B_0 voldoet aan de quantenvoorwaarden, zal dit ook het geval zijn met elke beweging B_1 die door een adiabatisch-reversibele transformatie er uit is afgeleid.

Geeft men de quantenvoorwaarden in den vorm (zie hoofdstuk II, § 10):

$$P_i = n_i \, . \, h/2\pi \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (3)$$

waar $P_1 \ldots P_k$ de z.g. intensiteitskonstanten der beweging zijn, dan kan de hypothese aldus uitgedrukt worden:

De grootheden: $P_1, P_2, \ldots P_k$ zijn invariant tegenover een adiabatische beïnvloeding van het systeem . . . . (4)

Indien deze hypothese juist is zou men er uit mogen afleiden dat de reversibele adiabatische processen geheel volgens de klassieke mechanika behandeld mogen worden. Dit zou een middel aan de hand doen om weer een belangrijke schrede verder door te dringen in de „quanten-mechanika”.

Een groote steun voor deze onderstelling is de *verschuivingswet* van W. WIEN, welke betrekking heeft op de adiabatische kompressie van straling. Ofschoon deze te midden van de quantentheorie der straling staat, is ze geheel langs klassieken weg afgeleid [1]).

EHRENFEST heeft bewezen dat in bepaalde gevallen de quantenvoorwaarden *niet* verbroken worden bij een adiabatische beïnvloeding [2]); naderhand is door BURGERS een algemeen bewijs gegeven van stelling (4), dat echter in sommige opzichten niet mathematisch streng is, en daardoor niet volkomen zeker [3]). Bovendien doen zich nog groote moeilijkheden voor bij de z.g. semi-periodieke of ontaarde systemen (zie hoofdstuk II, § 13); deze zullen beneden besproken worden.

Voorloopig zal worden aangenomen dat de hypothese juist is, en dat van de moeilijkheden die bij ontaarde systemen optreden mag worden afgezien.

[1]) Zie P. EHRENFEST, l. c.

[2]) L. c. — EHRENFEST noemt de grootheden welke niet veranderen bij een adiab. proces: *adiabatische invarianten;* men moet dus aantoonen dat de quantenvoorwaarden betrekking hebben op dergelijke adiabatische invarianten.

[3]) Zie: J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amsterdam XXV, bl. 849, 918, en speciaal 1055, 1916/17.

Men kan de hypothese plaatsen naast de reeds vroeger genoemde hypothesen der quantentheorie. Men krijgt dan de volgende (voorloopige) grondstellingen der „quantenmechanika":

A) de hypothesen over de stationnaire of quantenbewegingen (geen uitstraling van energie; formuleering der quantenvoorwaarden); zie hoofdstuk II, § 6, 7 en 10.

B) hypothesen over de beïnvloeding van een mechanisch systeem door uitwendige oorzaken:

I) Bij een *adiabatisch proces* blijven de intensiteitskonstanten P_i onveranderd; de beweging blijft voldoen aan de quantenvoorwaarden, en de quantengetallen veranderen *niet*.

II) Bij *stralingsprocessen* veranderen de quantengetallen direkt: voor deze processen gelden de hypothesen van Bohr en Einstein (hoofdstuk II, § 8; V, § 33).

Door middel van beide processen kan energie aan het systeem geleverd worden:

bij een adiabatisch proces is:

$$\delta \alpha = \sum_i \frac{\partial K(P, a)}{\partial a_i} \delta a_i \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

(waar $K(P, a)$ de funktie van Hamilton is, uitgedrukt in de P's en de parameters);

bij een stralingsproces is:

$$\Delta \alpha = \alpha(n''_1 \dots n''_k) - \alpha(n'_1 \dots n'_k) \quad \dots\dots\dots (6)$$

Men kan zich nu ook eenigszins een denkbeeld vormen van de wijze waarop verschillende mechanische systemen elkaar beïnvloeden (zooals b.v. de molekulen van een gas). Men kan hierbij evenzoo twee typen van werkingen onderscheiden:

I) *adiabatische*: het eene molekuul wijzigt door zijn eigen krachtveld het veld van een ander molekuul, waar het langs vliegt. Gedurende dit proces blijven voortdurend de bewegingen in elk molekuul quantenbewegingen.

II) Beide systemen kunnen door *straling* energie afstaan en opnemen; in het algemeen zijn beide in wisselwerking met het stralingsveld. Hierdoor kan indirekt energie (en hoeveelheid van beweging — hypothese van Einstein, zie boven bl. 36) van het eene systeem aan het andere worden meegedeeld.

Deze voorstelling moet echter met de grootst mogelijke reserve worden beschouwd. Er zijn groote moeilijkheden aan verbonden, welke nog bijna volkomen onopgelost zijn:

A) Bij het bovenstaande is niet gesproken over het geval dat op een mechanisch systeem krachten werken, welke niet oneindig langzaam veranderen, zooals b.v. *periodieke krachten* (elektrische trillingen, e. d.). Deze kwestie, welke ook de groote moeilijkheid vormde bij de dispersieproblemen, blijft nog onopgelost. [Zie echter § 36, bl. 215—218.]

(Wanneer twee molekulen langs elkaar vliegen zal men verwachten dat ze ook periodiek wisselende krachten op elkaar uitoefenen, tengevolge van de periodieke bewegingen der elektronen, enz. in elk molekuul. Het zou echter mogelijk zijn dat deze periodieke krachten niet werkzaam zijn, door een of andere oorzaak welke verband houdt met de afwezigheid van een uitstraling van energie door deze bewegingen.)

B) Een tweede kwestie (vermoedelijk van minder gewicht) is: hoe moet men de gewone botsingen opvatten? Dit hangt samen met het probleem van de translatie-bewegingen (zie hoofdstuk II, § 15, a). Men kan zich hier (1^e^) op het standpunt plaatsen dat translatie-bewegingen *niet* gequantiseerd moeten worden, en de botsingen op de klassieke wijze behandelen (zooals b.v. door RUTHERFORD gedaan is in de theorie van de verstrooiing der alpha-deeltjes; zie hoofdstuk I, § 3).

(2^e^) kan men de translatie-bewegingen wel aan quantenvoorwaarden onderwerpen, volgens de methode waarop dit geschiedt in de gastheorie van PLANCK [1]). De wetten van de botsing zullen dan geheel gewijzigd moeten worden, vooral indien men de tweede quantentheorie van PLANCK gebruikt.

(3^e^) kan men de translatie-bewegingen der molekulen tot periodieke herleiden, zooals in sommige gastheorieën geschiedt (LENZ, KEESOM, e. a.). Dan zullen de botsingen op een geheel andere wijze moeten worden opgevat.

C) De grootste moeilijkheid hangt evenwel samen met het probleem der *ontaarde* systemen.

Volgens de formuleering der quantenvoorwaarden in hoofdstuk II, § 10, 11, wordt bij ontaarde systemen (d. z. systemen waar rationale betrekkingen bestaan tusschen de middelbare bewegingen) slechts een gedeelte der P's (eventueel der **P**'s) gequantiseerd. Omtrent de waarden der overige intensiteitskon-

[1]) M. PLANCK, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1916, p. 653 vgl. (zie boven § 15, a).

stanten kan in het algemeen niets worden vastgesteld, daar *deze niet eenduidig bepaald zijn* (zie hierover § 13).

Men kan bij deze systemen twee typen van adiabatische beïnvloeding onderscheiden:

(1) Een beïnvloeding waarbij de eenmaal bestaande rationale betrekkingen onveranderd geldig blijven. Dan zijn de gequantiseerde **P**'s adiabatische invarianten; over de andere kan in het algemeen niets gezegd worden. Dit geval geeft niet tot bizondere moeilijkheden aanleiding [1]).

2) In de meeste gevallen zullen bij een verandering der parameters de rationale betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen geheel of ten deele verdwijnen. Men gaat dan van een systeem met beperkte quantiseering over op een volledig (of althans minder beperkt) gequantiseerd systeem, en de vraag doet zich voor: hoe komen de oorspronkelijk niet gequantiseerde **P**'s op hun juiste waarden?

(Men houde hierbij vooral in het oog dat indien men van een ontaard systeem naar verschillende niet-ontaarde overgaat, men op geheel uiteenloopende quantenvoorwaarden kan komen [2])).

Ter oplossing dezer moeilijkheid kan men twee wegen inslaan:

(*a*) Men kan als een bizondere hypothese invoeren dat bij den overgang van een ontaard systeem op een niet-ontaard, de oorspronkelijk niet gequantiseerde **P**'s a. h. w. „automatisch" (door nog onbekende werkingen) de juiste waarden krijgen. Deze hypothese lijkt evenwel zeer gekunsteld; bovendien strijdt ze ook tegen de oorspronkelijke hypothese van EHRENFEST dat de adiabatische processen geheel volgens klassieke methoden berekend kunnen worden.

(*b*) Men kan met EPSTEIN [3]) aannemen *dat ontaardingsgevallen*

---

[1]) Voorbeeld: Een periodiek systeem, waar de exakte periodiciteit gedurende het variatie-proces steeds behouden blijft. Hier is de adiabatische invariante:

$$\int_0^\tau dt \, . \, 2\,T = \frac{2\,T}{\nu} \quad \left(\tau = \frac{1}{\nu} = \text{periode}\right) \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Zie EHRENFEST, l. c. en BURGERS l.c. p. 918.

[2]) Zie hoofdstuk II, § 13. Het in § 13 beschouwde grensproces waarbij een systeem ontaardt, kan in vele gevallen een adiabatisch proces zijn.

Op deze kwesties is reeds gewezen door P. EHRENFEST in het geciteerde artikel. Daar is ook een voorbeeld behandeld.

[3]) P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. **51**, p. 182, 1916.

in strengen zin niet voorkomen. De beweging van een elektron om een atoomkern zal b.v. steeds gestoord worden door de elektrische en magnetische krachten der naburige atomen, welke een anisotropie van het veld veroorzaken, enz.

Alle systemen zijn dan steeds volledig gequantiseerd; wat ons als ontaard systeem voorkomt is een soort overgangsgebied, waar een bepaald type van quantenvoorwaarden in een ander overgaat.

Het schijnt dat men op deze wijze de moeilijkheden geheel kan ontgaan. Een voorbeeld van een dergelijk overgangsproces zal beneden (§ 40) vermeld worden [1]).

Afgezien van het bovenstaande blijft de kwestie der rationale betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen bij de theorie der adiabatische invarianten nog een andere moeilijkheid opleveren; men zie hiervoor bl. 244, opmerking 1).

[1]) Neemt men deze onderstelling van Epstein aan, dan zal in het algemeen een door een beperkt aantal quantengetallen gekarakteriseerde bewegingstoestand van een systeem dat ons als ontaard voorkomt, inderdaad zijn een bepaalde groep van bewegingstoestanden van een volledig gequantiseerd systeem. De vorm van de quantenformules die men moet toevoegen aan het beperkte stel van $f-\lambda$ voorwaarden dat voor het „ontaarde" systeem is opgesteld, hangt, zooals in § 13 besproken is, af van de aard der storingen welke maken dat het systeem inderdaad niet ontaard is. Heeft men een bepaalde storing en gaat men langs adiabatischen weg naar een andere over, zonder dat een oogenblik exakte ontaarding optreedt, dan gaan deze „aanvullings"-quantenvoorwaarden van het eene type over in het andere; het beperkte stel dat men aan het ontaarde systeem had toegekend blijft daarbij in eerste benadering onveranderd. (N.B. Het veranderen van den vorm der quantenvoorwaarden is niet in strijd met de adiabatenhypothese; deze eischt dat de *quantengetallen* onveranderd blijven).

De energie van het systeem is daarbij gegeven door een formule van de gedaante:

$$\varepsilon = \mathsf{K}_0(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots \mathsf{P}_{f-\lambda}) + \mathsf{K}_1(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots \mathsf{P}_{f-\lambda}, \mathsf{P}_{f-\lambda+1}, \ldots \mathsf{P}_f; b_1, b_2, \ldots)$$

waarin $b_1, b_2, \ldots$ de parameters voorstellen die de storingen bepalen; deze komen niet voor in de hoofdterm K_0. De funktie K_1 is zeer klein ten opzichte van K_0, daar aangenomen is dat de storingen zeer gering zijn.

In de meeste gevallen zal men de bewegingen slechts behoeven te kennen voor zoover ze bepaald zijn door $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{f-\lambda}$ (b.v. wanneer men de energie moet berekenen); bewegingen waarvoor $\mathsf{P}_{f-\lambda+1} \ldots \mathsf{P}_f$ verschillend zijn onderscheiden zich dan niet.

Men vergelijke in verband hiermee ook de opmerkingen over de gewichtsfunktie voor ontaarde systemen, bl. 256, vgl.]

§ 39. OPMERKINGEN OVER HET BEWIJS VOOR DE INVARIANTIE DER P's.

Een bewijs voor de invariantie der P's (eventueel der **P**'s) bij een adiabatische beïnvloeding van het systeem is gegeven door BURGERS [1]).

Dit bewijs zal hier niet herhaald worden; slechts wil ik er enkele punten van vermelden.

Ondersteld wordt dat gedurende de variatie van een parameter a de vergelijkingen van HAMILTON, uitgedrukt in de oorspronkelijke koordinaten en momenten q en p, blijven gelden (definitie van „adiabatisch"); verder wordt aangenomen dat da/dt konstant is [2]).

Omtrent het mechanische systeem zelf is aangenomen dat de beschouwde groep van oplossingen stabiel is in den zin van definitie (1) op bl. 135, en dat deze oplossingen kunnen worden uitgedrukt met behulp van reeksontwikkelingen naar de sinussen en cosinussen van n hoekvariabelen.

Is de parameter a konstant, dan wordt de beweging der grootheden Q en P beheerscht door de funktie van HAMILTON:

$$H = K(P\,,a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

welke de Q's niet bevat (zie bl. 43). De middelbare bewegingen der Q's zijn gegeven door:

$$\frac{d\,Q_k}{dt} = \omega_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ondersteld wordt dat er geen rationale betrekkingen tusschen de ω's bestaan [3]).

[1]) J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 1055, 1917.

[2]) Dat de wijze waarop a met den tijd verandert zonder invloed is op het resultaat der adiabatische beïnvloeding, is nog niet bewezen. Vermoedelijk is dit juist, indien slechts niet da/dt „resoneert" op een der frequenties van het systeem, en oneindig klein is t. o. v. de snelheden in het systeem.

[3]) Indien er een aantal rationale betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen bestaan, en men zich beperkt tot die beïnvloedingen welke deze betrek-

Indien a *niet* konstant is, blijft voor de beweging der Q's en P's de funktie van HAMILTON (8) in het algemeen *niet* geldig, daar de parameter in de transformatie-vergelijkingen kan voorkomen. In de plaats van (8) komt dan de funktie:

$$H^* = K(P, a) - F(Q, P, a) \,.\, da/dt \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

waar F te schrijven is als een meervoudige FOURIER-reeks naar de Q's [1]).

Uit (10) volgt dat de bewegingsvergelijking voor P_k is:

$$\frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_k} = \dot{a}\left[\sum \pm m_k \,.\, C_{m_1 \ldots m_f} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} (m_1 Q_1 + \ldots m_f Q_f)\right] \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Bestaan er nu *geen rationale betrekkingen* tusschen de middelbare bewegingen der Q's, dan is het tijdgemiddelde van deze

kingen onveranderd laten, zal op een analoge wijze aangetoond kunnen worden dat die **P**'s welke volgens § 10 en 11 gequantiseerd moeten worden, adiabatische invarianten zijn. (Vergelijk voor het geval dat de bewegingsvergelijkingen met behulp der methode v/d separatie der variabelen behandeld kunnen worden: J. M. BURGERS, l. c. p. 918.)

[1]) [De vorm der funktie H^* is af te leiden met behulp van de theorie der kontakttransformaties; zie WHITTAKER, Analytical Dynamics (Cambr. 1917), p. 288 en vgl. Volgens deze theorie moet men in den differentiaalvorm:

$$\Sigma\, p\, dq - H(q, p, a)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

voor de q's en p's hun uitdrukkingen in de Q's, de P's en a substitueeren, waarbij a als gegeven funktie van t beschouwd moet worden. Hierdoor gaat (I) over in:

$$\Sigma\, P\, dQ - H^*(Q, P, a)\, dt + D\,W(Q, P, a) \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

waar $D\,W$ de volledige differentiaal van een funktie W van de Q's, de P's en t is:

$$D\,W = \sum \frac{\partial W}{\partial Q} dQ + \sum \frac{\partial W}{\partial P} dP + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{da}{dt} dt \quad \ldots \quad (III)$$

De koefficient H^* van dt in (II) is dan de funktie van HAMILTON voor de Q's en P's gedurende het variatieproces, en men kan aantoonen dat deze van de boven aangegeven gedaante is, m.a.w. dat de Q's hierin slechts in den vorm van trigonometrische funkties voorkomen. Op dit laatste berust de afwezigheid van sekulaire termen in de vergelijking (11) voor $\frac{dP_k}{dt}$, zoodat de totale verandering van P_k willekeurig klein gemaakt kan worden t.o.v. de verandering van de parameter a.]

Zie J. M. BURGERS, l.c. p. 1057, 1059.

uitdrukking nul, en dus is:

$$\text{Lim} . \frac{\partial P_k}{\partial a} = 0 \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Opmerkingen.

1) In het bovenstaande is steeds aangenomen dat er geen rationale betrekkingen bestaan tusschen de middelbare bewegingen. Deze middelbare bewegingen zijn echter in het algemeen funkties van de parameters a, zoodat hun waarden veranderen bij de variatie der a's. *Dan loopen hun verhoudingen voortdurend door rationale waarden heen* [2]).

In hoeverre dit tot moeilijkheden aanleiding kan geven is nog niet nader onderzocht.

In verband hiermee moet het volgende opgemerkt worden:

Steeds is omtrent de gebruikte reeksontwikkelingen aangenomen dat ze gelijkmatig en voldoende sterk voor *alle* waarden van t konvergeeren. Dit schijnt bij vele problemen niet het geval te zijn: de meeste reeksen die in de astronomische mechanika gebruikt worden zijn z.g. asymptotische reeksen [3]).

Hierbij schijnt ook de kwestie van het al of niet aanwezig zijn van rationale betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen van belang te zijn: het kan voorkomen, dat men zoodra er rationale betrekkingen tusschen de ω's bestaan, reeksontwikkelingen moet gebruiken welke niet aansluiten bij die voor naburige problemen, waar deze rationale betrekkingen niet bestaan [4]).

Al deze problemen moeten grondig onderzocht zijn, voordat de theorie der adiabatische invarianten op vasten grondslag gesteld kan worden. De laatstgenoemde (over de konvergentie der reeksen) zijn trouwens ook voor de geheele theorie der hoekvariabelen van groot belang.

Het is mogelijk dat alle theorema's over de ontwikkeling naar hoekvariabelen en wat hiermee samenhangt, slechts uitgesproken mogen worden voor een begrensd tijdsverloop T.

---

[1]) Cf. J. M. Burgers, l.c. p. 1058.

[2]) Idem, p. 1061.

[3]) Zie b.v. een interessant artikel van K. Schwarzschild, Phys. Zeitschr. **4**, p. 765, 1903: Über Himmelsmechanik.

[4]) Vergelijk in verband hiermee: E. T. Whittaker, On the Adelphic Integral of the Equations of Dynamics, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **37**, p 95, 1917.

dat in het algemeen wel zeer groot is, doch niet oneindig [1]).

In vele gevallen schijnt het me toe dat de moeilijkheid verminderd, of soms geheel weggenomen wordt, doordat men zich kan beperken tot een *eindig* aantal termen in de reeksontwikkelingen en ook in de funktie $F(Q, P, a)$ in verg. (10). Dan zijn er in het algemeen slechts bepaalde rationale betrekkingen welke gevaar kunnen opleveren, terwijl de overige niet hinderen.

Met het volgende voorbeeld kan dit toegelicht worden:

Beschouw een anisotrope oscillator van twee graden van vrijheid; de beide elasticiteitskonstanten ω_1^2 en ω_2^2 zijn de parameters. De funktie van HAMILTON luidt:

$$H = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Transformatie-vergelijkingen ter invoering der hoekvariabelen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2 P_1 / \omega_1} \cos Q_1 \\ p_x &= -\sqrt{2 P_1 \omega_1} \sin Q_1 \end{aligned}\right\} \text{enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Vergelijking (10) wordt in dit geval:

$$H^* = \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 - \dot{\omega}_1 \frac{P_1 \sin 2 Q_1}{2 \omega_1} - \dot{\omega}_2 \frac{P_2 \sin 2 Q_2}{2 \omega_2} \quad . \; . \quad (15)$$

Zoodat:

$$\frac{d P_1}{d t} = + \dot{\omega}_1 \frac{P_1 \cos 2 Q_1}{\omega_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Uit vergelijking (16) blijkt dat bij dit eenvoudige probleem rationale betrekkingen tusschen ω_1 en ω_2 niet storen; de eenige waarden van ω_1 en ω_2 waarvoor een singulariteit kan optreden zijn:

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{en:} \qquad \omega_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Een nader onderzoek omtrent deze problemen is echter zeer gewenscht.

2) Een algemeen kriterium om te beslissen wanneer een verandering der parameters als een adiabatische beschouwd mag worden, en wanneer niet, is nog niet gegeven [2]).

[1]) In de astronomie kan men slechts bewijzen dat ons planetenstelsel gedurende een eindige, zeer groote tijd stabiel is (cf. K. SCHWARZSCHILD, l.c.).

[2]) Eenige voorbeelden zijn door BURGERS genoemd, l.c. p. 851; zie ook boven bl. 236.

Ook moet nog onderzocht worden of het voldoende is dat de vergelijkingen van HAMILTON voor de oorspronkelijke koordinaten en momenten q en p slechts tot op termen van de 2e en hoogere orde in $\dot{a}$ onveranderd blijven [1]).

3) De theorie der adiabatische invarianten kan — in den boven gegeven vorm — niet worden toegepast op bewegingen die het karakter van periodiciteit of quasi-periodiciteit geheel missen, zooals b.v. hyperbolische bewegingen [2]).

Of het mogelijk zal zijn een zoodanige uitbreiding te vinden dat dergelijke bewegingen er ook onder vallen, is nog niet onderzocht [3]).

[1]) BURGERS, l.c. p. 1060.

[2]) Vergelijk P. EHRENFEST, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 427 of 428, 1916; Ann. d. Phys. **51**, p. 345, 1916.

[Evenmin is een oplossing gevonden voor de moeilijkheid die zich voordoet bij het passeeren van een singuliere beweging met *oneindig groote periode* (asymptotische bewegingen). Vergelijk P. EHRENFEST, l.c. ongeveer p. 420, en ook Versl. Akad. Amst. XXII, p. 586, 1913.]

[3]) Misschien kunnen voor deze problemen van nut zijn de opmerkingen van POINCARÉ over de analytische voortzetting van banen die naar het oneindige loopen (H. POINCARÉ, Mécanique Céleste III, p. 168).

§ 40. VOORBEELD VAN EEN ADIABATISCH PROCES, DAT OM EEN ONTAARDINGSGEVAL HEENGAAT. [1])

In het volgende zal worden afgezien van de in § 39 genoemde moeilijkheden; aangenomen wordt dat de adiabaten-hypothese juist is.

Beschouwd wordt de beweging van een elektron in een gegeven elektromagnetisch veld; ter vereenvoudiging wordt het probleem tot twee afmetingen beperkt.

Men kan uitgaan van een *anisotroop, quasi-elastisch* krachtveld, en dit door een adiabatische transformatie omzetten in een *isotroop, niet quasi-elastisch* (m.a.w. in een willekeurig centraal) krachtveld [2]). In het eerste geval moeten de beide hoofdtrillingen gequantiseerd worden; in het tweede het moment van hoeveelheid van beweging, en de faze-integraal:

$$\int\limits_{\leftrightarrow} p_r \, d r.$$

Voert men nu den overgang aldus uit: men laat eerst het krachtveld:

$$V = \tfrac{1}{2} (\varkappa \, x^2 + \lambda \, y^2)$$

in een *isotroop* overgaan, door de beide elasticiteitskonstanten $\varkappa$ en λ aan elkaar gelijk te maken, en men maakt daarna het veld *niet quasi-elastisch* door termen van den vorm: $A_i \, r^i$ aan de potentieele energie toe te voegen, dan gaan deze quantenvoorwaarden *niet* in elkaar over zooals door Ehrenfest is aangetoond.

[1]) Dit voorbeeld is gekozen naar aanleiding van een opmerking van P. Ehrenfest, Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 426 of 427, 1916; Ann. d. Phys. **51,** p. 343, 1916.

[2]) Deze overgang geeft een verband tusschen de oorspronkelijke quantenonderstellingen van Planck, en die van Sommerfeld.

Cf. P. Ehrenfest, l.c.

Wil men dat het eene stel quantenvoorwaarden *kontinu* in het andere overgaat, dan moet worden zorg gedragen dat het singuliere geval van een isotroop quasi-elastisch veld *niet optreedt.* Men kan dit bereiken door reeds voordat $\varkappa = \lambda$ geworden is termen van den vorm: $A_i r^i$ aan V toe te voegen.

Een andere methode — welke voor de berekening gemakkelijker is — bestaat hierin dat men een magnetisch veld aanbrengt, loodrecht op het vlak der beweging; de oorspronkelijk *rechtlijnige* hoofdtrillingen in het anisotrope veld gaan dan over in *elliptische,* die bij het verdwijnen der anisotropie *cirkulair* worden. Daarna kan men aan V de extra termen $A_i r^i$ toevoegen, en het magnetisch veld laten verdwijnen.

Het eerste gedeelte van dit proces — tot aan de beweging in een isotroop veld, onder invloed van een magnetische kracht — is in een eenigszins ander verband boven (§ 23, **I**) behandeld; daar is aangetoond dat de quantenformules voor het anisotrope, quasi-elastische veld kontinu overgaan in die voor een centraal veld:

$$\int\limits_{\leftrightarrow} p_r \, dr = n_1 h; \qquad 2\pi p_\varphi = n_2 h \, .$$

De overgang van hier naar een niet quasi-elastisch centraal veld, zonder magnetisme, is zeer gemakkelijk [1]).

[1]) Het probleem is gekarakteriseerd door de funktie van HAMILTON:

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + \gamma p_\varphi + \sum A_i r^i + \tfrac{1}{2}\gamma^2 r^2$$

In het geval van een quasi-elastisch krachtveld zijn alle koefficienten $A_i = 0$, met uitzondering van A_2; in het andere grensgeval hebben deze koefficienten willekeurige waarden, doch is $\gamma = 0$.

De quantenvoorwaarden zijn:

$$\left\{\begin{aligned} &\int\limits_{\leftrightarrow} dr \sqrt{2\alpha - 2\gamma p_\varphi - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - 2\sum A_i r^i - \gamma^2 r^2} = n_1 h \\ &2\pi p_\varphi = n_2 h \, . \end{aligned}\right.$$

§ 41. OPMERKINGEN OVER STATISTISCHE PROBLEMEN.

Over de statistika van een ensemble van systemen wier bewegingen door quantenvoorwaarden zijn gebonden, zullen hier slechts enkele punten vermeld worden.

Voor eenige algemeene onderzoekingen die op dit gebied betrekking hebben wordt verwezen naar artikelen van P. Ehrenfest, speciaal: Phys. Zeitschr. **15**, p. 657, 1914 en Akad. Amsterd. XXV, p. 423, 1916 (= Ann. d. Phys. **51**, p. 340, 1916). De verschillende problemen die door Ehrenfest opgeworpen en onderzocht zijn zullen in het volgende niet worden behandeld: ik wil me beperken tot het aangeven van een bepaalde toestandsverdeeling en aantoonen dat deze voldoet aan de door Ehrenfest gestelde eischen.

A. Ondersteld wordt dat men een ensemble heeft van N *nietontaarde* (dus *volledig gequantiseerde*) systemen [1]).

De bewegingstoestand van elk systeem kan gekarakteriseerd worden door de waarden der $2f$ integratiekonstanten: $P_1 \ldots P_f$ $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f$ (cf. boven, § 10), zoodat de systemen afgebeeld kunnen worden door punten in een $2f$-dimensionale ε-P-ruimte. — De P's kunnen slechts de diskrete waarden: $P_i = n_i \,.\, h/2\pi$ hebben; de ε's daarentegen kunnen alle waarden van 0 tot 2π kontinu doorloopen.

Nu wordt aangenomen dat de stationnaire toestandsverdeeling in de ε-P-ruimte beschreven kan worden als de *waarschijnlijkste verdeeling* der systemen bij gegeven totale energie, wanneer men elke bewegingstoestand:

[1]) Voor ontaarde systemen zie men beneden **C, II.**

$$\left.\begin{array}{l} P_i = n_i \,.\, h/2\pi \\ \varepsilon_i = willekeurig \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

als *a priori even waarschijnlijk* beschouwt [1]).

Het aantal systemen waarvoor: $P_i = n_i\, h/2\pi$ is, terwijl de faze-konstanten tusschen ε_i en $\varepsilon_i + d\,\varepsilon_i$ liggen, zij voorgesteld door:

$$\frac{N}{(2\pi)^f} \,.\, \Phi\,(n_1 \ldots n_f\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f\, a_1\, a_2 \ldots)\, d\,\varepsilon_1 \ldots d\,\varepsilon_f \;{}^{2)}) \ldots \quad (2)$$

Volgens bl. 43 is de energie van een bepaald systeem slechts een funktie der P's (dus der quantengetallen $n_1 \ldots n_f$) en der parameters $a_1\, a_2 \ldots$ van het systeem; ze is onafhankelijk van de ε's:

$$\alpha = \alpha\,(n_1 \ldots n_f\, a_1\, a_2 \ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hieruit volgt dat ook de verdeelingsfunktie Φ onafhankelijk moet zijn van de faze-konstanten, zoodat het totale aantal systemen waarvoor $P_i = n_i\, h/2\pi$ is bedraagt:

$$N \,.\, \Phi\,(n_1 \ldots n_f\, a_1\, a_2 \ldots) \;{}^{3)}) \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De funktie Φ moet nu voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$\sum_{n_1} \ldots \sum_{n_f} \Phi\,(n, a) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\sum_{n_1} \ldots \sum_{n_f} N \,.\, \Phi\,(n, a) \,.\, \alpha\,(n, a) = E = \textit{totale energie} \,. \quad (6)$$

$$W = \frac{N!}{\prod\limits_{n_1} \ldots \prod\limits_{n_f} (N \,.\, \Phi)!} = maximum \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De laatste voorwaarde kan ook geschreven worden:

$$lg\; W = konst. - \sum_{n_1} \ldots \sum_{n_f} N \,.\, \Phi \,.\, lg\; \Phi = maximum \quad .\,. \quad (7a)$$

[1]) In de terminologie van EHRENFEST uitgedrukt:
in de ε-P-ruimte wordt ingevoerd de *gewichtsfunktie*:

$$G\,(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f\, P_1 \ldots P_f) = G\,(P_1 \ldots P_f) = \begin{cases} 1 \left(P_i = n_i \dfrac{h}{2\pi}\right) \\ 0 \left(P_i \gtrless n_i \dfrac{h}{2\pi}\right) \end{cases}$$

[2]) $a_1, a_2 \ldots$ zijn de parameters van het systeem.

[3]) Men kan dit ook gemakkelijk uit de formules afleiden indien men eerst $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f$ in de funktie Φ laat staan, en dan op de gewone wijze doorrekent.

Uit deze drie voorwaarden vindt men volgens bekende methoden:

$$\Phi = \frac{1}{Z} e^{-\mu \alpha} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

waar $\mu = \mu(E, a_1, a_2, \dots)$ een ingevoerde multiplikator is (onafhankelijk van de n's); terwijl:

$$Z = Z(E, a_1 \dots) = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_f} e^{-\mu \alpha} \text{ [1]} \quad \dots\dots \quad (9)$$

B. De gevonden verdeelingsfunktie Φ bezit de volgende eigenschappen:

I). Ze voldoet aan de door EHRENFEST gestelde eischen, welke noodig zijn opdat het ensemble aan de tweede hoofdwet kan voldoen [2]).

Bewijs.

a) Beschouw een kleine verandering van den toestand van het ensemble, waarbij de parameters a_i toenemen met δa_i, en de totale energie met δE wordt vermeerderd [3]).

Bij dit proces wordt door het ensemble een *uitwendige arbeid* verricht, gegeven door de formule:

$$\delta A = -\sum_{n_1} \dots \sum_{n_f} N \Phi \left(\sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} \delta a_i \right) = -\sum_{n_1} \dots \sum_{n_f} N \Phi \delta \alpha \text{ [1]} \, (10)$$

---

[1]) [Hierbij is ondersteld dat de reeks $\Sigma \dots \Sigma e^{-\mu \alpha}$ konvergeert. Vergelijk voor een geval waarbij dit niet zoo is: § 42.]

[2]) P. EHRENFEST, Phys. Zeitschr. l.c.

[3]) De verandering geschiedt oneindig langzaam ten opzichte van de bewegingen en de energie-uitwisseling in het ensemble, zoodat men mag onderstellen dat op elk oogenblik de toestandsverdeeling een stationnaire is.

[1]) Indien men — adiabatisch — de parameters $a_1, a_2, \dots$ van het systeem varieert, neemt de energie toe met:

$$\delta \alpha = \sum_i \frac{\partial K(P, a)}{\partial a_i} \delta a_i = \sum_i \frac{\partial \alpha(n, a)}{\partial a_i} \delta a_i \quad \dots\dots \quad (I)$$

daar bij het proces de grootheden $P_1 \dots P_f$, en dus de quantengetallen $n_1 \dots n_f$, *niet veranderen* (vergelijk ook § 38, formule 5).

Als „aan het ensemble toegevoerde warmte" wordt gedefinieerd de grootheid:

$$\delta Q = \delta E + \delta A = \delta E - N \sum \Phi \, \delta \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Nu is $\mu \, \delta Q$ een volledige differentiaal:

$$\mu \, \delta Q = \delta (\mu E) - E \, \delta \mu - N \sum \mu \, \Phi \, \delta \alpha =$$
$$= \delta (\mu E) - \frac{N}{Z} \sum (\alpha \, \delta \mu + \mu \, \delta \alpha) \, e^{-\mu \alpha} =$$
$$= \delta (\mu E + N \, lg \, Z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Uit formule (7a) volgt dat voor deze toestandsverdeeling:

$$lg \, W = konst. + (\mu E + N \, lg \, Z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

zoodat:

$$\underline{\mu \, \delta Q = \delta (\mu E + N \, lg \, Z) = \delta \, lg \, W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Deze vermeerdering van energie is daaraan te danken dat bij de verandering der parameters door uitwendige krachten arbeid aan het systeem is geleverd. Het tijdgemiddelde van deze uitwendige krachten is dus gelijk aan:

$$f_i^* = \frac{\partial \alpha (n, a)}{\partial a_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

en de gemiddelde kracht door het *systeem* „in de richting van de parameter a_i" uitgeoefend:

$$f_i = - \frac{\partial \alpha (n, a)}{\partial a_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (III)$$

(Cf. J. M. BURGERS, Versl. Akad. Amst. XXV, p. 1058, noot [1].)

Heeft men een *ensemble*, dan volgt uit de gelijkmatige verdeeling der systemen over de ε-ruimte, in verband met de periodiciteitseigenschappen der systemen, dat men het tijdgemiddelde voor een bepaald systeem mag vervangen door het getalgemiddelde voor alle systemen waarvoor de quantengetallen dezelfde waarden hebben.

De kracht door het ensemble „in de richting van de parameter a_i" uitgeoefend is dus:

$$F_i = - \sum_{n_1} \ldots \sum_{n_f} N \, \Phi \, \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (IV)$$

terwijl bij een verandering der parameters door het ensemble een arbeid wordt geleverd:

$$\delta A = \sum_i F_i \, \delta a_i = - \sum_{n_1} \ldots \sum_{n_f} N \, \Phi \left(\sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} \, \delta a_i \right) \quad . \; . \; . \; (V)$$

b) Koppelt men twee ensembles van systemen, en bepaalt men de waarschijnlijkste toestandsverdeeling bij gegeven totale energie, dan treedt bij beide ensembles dezelfde parameter μ in de verdeelingsfunktie op [1]). Neemt men voor het eene ensemble een klassiek ideaal gas, dan is μ de parameter van de snelheidsverdeeling van MAXWELL, en is dus gelijk aan:

$$\mu = \frac{1}{k\,T} \qquad (15)$$

waar T de *absolute temperatuur* is.

c) Op grond van het bovenstaande kan men nu

$$S = k \,.\, lg\, W \qquad (16)$$

definieeren als de *entropie* van het ensemble, en verder:

$$F = E - T \,.\, S = - N \,.\, k \,.\, T \,.\, lg\, Z \qquad (17)$$

als de *vrije energie* [2]).

Men heeft dan de volgende relaties:

uit (14), (15), (16):
$$\frac{\delta Q}{T} = \delta S \qquad (18)$$

verder:
$$\frac{\partial S(E, a_1, a_2 \ldots)}{\partial E} = \frac{1}{T} \;{}^{3)} \qquad (19)$$

en uit (17):
$$-\frac{\partial F(T, a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_i} = F_i \qquad (20)$$

Hierin stelt F_i de kracht voor, door het ensemble in de richting van de parameter a_i uitgeoefend [4]).

[1]) Zie P. EHRENFEST, Phys. Zeitschr. **15**, p. 661 (§ 4, (II)), 1914.

[2]) S moet beschouwd worden als funktie der totale energie E en der parameters a_1 $a_2 \ldots$: $S = S(E, a_1, a_2, \ldots)$.

F moet opgevat worden als funktie van de absolute temperatuur T en van de parameters: $F = F(T, a_1, a_2, \ldots)$.

[3]) Bewijs: Uit (13) volgt: — (N.B.: W is evenals S funktie van E, a_1, enz.) —

$$\frac{\partial\, lg\, W}{\partial E} = \mu + E\frac{\partial \mu}{\partial E} + \frac{N}{Z}\frac{\partial Z}{\partial E} = \mu + E\frac{\partial \mu}{\partial E} - \frac{N}{Z}\sum \alpha \frac{\partial \mu}{\partial E} e^{-\mu\alpha}$$
$$= \mu \,.$$

[4]) Dit volgt onmiddellijk uit verg. (17) door differentiatie naar een der parameters. (Zie noot [1]), bl. 251/252).

Uit de bovenstaande formules blijkt dat een ensemble met de door vergelijkingen (8) en (9) gegeven toestandsverdeeling voldoet aan de verschillende formules der thermodynamika.

Opmerkingen.

1) Over de thermodynamische funktie Ψ van PLANCK zie noot [1]).

2) Op de kwestie van de *absolute waarde der entropie* zal hier niet worden ingegaan.

II) De beschouwde gewichtsfunktie G sluit zoo nauw mogelijk aan bij die welke in de klassieke statistische mechanika door BOLTZMANN is ingevoerd: nl. dat aan gelijke volumina der fazeruimte (q-p-ruimte) gelijke gewichten worden toegekend. (Zie P. EHRENFEST) [2]).

Men heeft nl. [3]):

$$\frac{\partial(q_1 \ldots q_f\, p_1 \ldots p_f)}{\partial(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_f\, P_1 \ldots P_f)} = \frac{\partial(q_1 \ldots q_f\, p_1 \ldots p_f)}{\partial(Q_1 \ldots Q_f\, P_1 \ldots P_f)} = 1 \quad \ldots \text{(21)}$$

Met gelijke volumina in de q-p-ruimte korrespondeeren dus gelijke volumina in de ε-P-ruimte.

Volgens BOLTZMANN zou men derhalve aan gelijke volumina van de ε-P-ruimte gelijke gewichten moeten toekennen. Bij de boven gebruikte gewichtsfunktie hebben gelijke volumina in de ε-ruimte hetzelfde gewicht, terwijl in de P-ruimte een net van equidistante punten genomen is („hyperkubisch net”), aan elk waarvan hetzelfde gewicht is gegeven.

[1]) Zie M. PLANCK, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **17**, p. 444, 1915.

$$\Psi = \Psi(T, a_1, a_2 \ldots) = N k\, lg\, Z = N k\, lg \sum e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Uit Ψ volgt omgekeerd voor de energie:

$$E = T^2 \frac{\partial \Psi}{\partial T}.$$

Hieruit de soortelijke warmte:

$$c = \frac{\partial E}{\partial T} \left(= c_{a_1 a_2 \ldots}\right).$$

[2]) P. EHRENFEST, Phys. Zeitschr. **15**, p. 657, 1914;
Versl. Akad. Amsterdam XXV, p. 423/424, 1916.

[3]) Zie b.v. E. T. WHITTAKER, Analytical Dynamics, Cambr. 1917, p. 312, Ex. 3.

III) Voor zeer hooge temperaturen levert de beschouwde toestandsverdeeling het *equipartitie-theorema.*

Volgens formule (I) in § 16, **b**) kan men als *gemiddelde kinetische energie per vrijheidsgraad van een bepaald systeem* beschouwen:

$$\overline{T_i} = \frac{1}{2} P_i \dot{Q}_i = \frac{1}{2} P_i \omega_i = \frac{1}{2} P_i \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{1}{2} n_i \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

De gemiddelde waarde voor alle systemen van het ensemble is dus:

$$\overline{T_i} = \frac{1}{2} \frac{\sum \ldots \sum n_i \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} e^{-\mu\alpha}}{\sum \ldots \sum e^{-\mu\alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Bij zeer hooge temperaturen mag men approximatief de sommaties door integraties vervangen; men krijgt dan op de bekende wijze:

$$\overline{T_i} = \frac{1}{2} \frac{\int \ldots \int dn_1 \ldots dn_f \, n_i \frac{\partial \alpha}{\partial n_i} e^{-\mu\alpha}}{\int \ldots \int dn_1 \ldots dn_f \, e^{-\mu\alpha}} = \frac{1}{2\mu} = \frac{kT}{2} \quad . \; . \; . \quad (24)$$

Opmerking.

Hierbij is aangenomen dat:

a) over de n's hetzij van 0 tot ∞, hetzij van $-\infty$ tot $+\infty$ geïntegreerd wordt;

b) dat voor $n_i = 0$ de funktie α geen singulariteiten vertoont;

c) dat voor $n_i = \pm \infty$:

$$\lim_{n_i = \pm\infty} \; \alpha(n_1 \ldots n_f) = \infty.$$

Aan deze voorwaarden is niet steeds voldaan; zie b.v. beneden, § 42 (statistika van het atoommodel van Waterstof — K. F. Herzfeld).

C. *Verdere opmerkingen.*

I) De besproken toestandsverdeeling is axiomatisch afgeleid

als een waarschijnlijkste verdeeling onder bepaalde voorwaarden. Men moet echter ook aantoonen:

a) dat ze werkelijk stationnair is;

b) dat een willekeurig gegeven toestandsverdeeling vanzelf in deze overgaat.

Voor zoover ik weet zijn in deze richting nog geen onderzoekingen gedaan. — Het zal hiervoor noodig zijn nader in te gaan op de werkingen tusschen de systemen onderling, en op de wisselwerking der systemen met het stralingsveld. Dit laatste zal vermoedelijk een belangrijke rol spelen, daar de quantengetallen in de eerste plaats, zoo niet uitsluitend, veranderen tengevolge van emissie of absorbtie van lichtstraling [1]).

II) „*Ontaarde systemen*".

Indien een systeem niet volledig gequantiseerd is kan men de boven aangenomen gewichtsfunktie G niet meer gebruiken.

Door het ontaarde systeem op te vatten als een grensgeval van een niet-ontaard (volledig gequantiseerd) systeem, wordt men er toe gebracht te onderstellen dat de quantenbewegingen:

$$\mathbf{P}_i = n_i\, h/2\,\pi \qquad (i = 1 \ldots f - \lambda)\ ^{2)}$$

niet alle hetzelfde gewicht hebben, doch dat aan elk een zoo groot gewicht moet worden toegekend, als het aantal der niet-ontaarde bewegingen bedraagt, waaruit de beschouwde ontstaan is. [3])

Voorbeelden.

(1) *Isotrope oscillator van twee graden van vrijheid.*

Bij een anisotrope oscillator wordt aan elke beweging:

$$P_1 = n_1\, h/2\,\pi \quad ; \quad P_2 = n_2\, h/2\,\pi$$

hetzelfde gewicht toegekend.

Gaat de oscillator over in een isotrope, dan worden de mid-

[1]) Men zou het probleem kunnen vereenvoudigen door zich te beperken tot systemen die niet onmiddellijk op elkaar inwerken, doch slechts energie uitwisselen met het stralingsveld, terwijl de parameters alleen door uitwendige krachten kunnen worden beïnvloed.

[2]) λ is het aantal der rationale betrekkingen tusschen de middelbare bewegingen (zie § 10).

[[3]) Vergelijk noot [1]) op bl. 241.]

delbare bewegingen van Q_1 en Q_2 aan elkaar gelijk. Pas de transformatie toe:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \mathbf{P}_1 \qquad & Q_1 &= \mathbf{Q}_1 \\ P_2 &= \mathbf{P}_2 \qquad & -Q_1 + Q_2 &= \mathbf{Q}_2 \end{aligned}$$

Bij een anisotrope oscillator zijn de quantenbewegingen dan voor te stellen door:

$$\mathbf{P}_1 = n_1^* \, h/2\pi \quad ; \quad \mathbf{P}_2 = n_2^* \, h/2\pi .$$

Elke kombinatie: n_1^*, n_2^* heeft hetzelfde gewicht [1]); echter is steeds:

$$0 \leqslant n_2^* \leqslant n_1^*$$

zoodat er bij *één* waarde van n_1^*: $(n_1^* + 1)$ waarden van n_2 zijn.

Ontaardt nu de oscillator in een isotrope, dan wordt de middelbare beweging van $\mathbf{Q}_2$ *nul*; alleen $\mathbf{P}_1$ wordt gequantiseerd. Aan elke beweging:

$$\mathbf{P}_1 = n_1^* \, h/2\pi$$

zal men nu een gewicht:

$$\underline{\Gamma = n_1^* + 1}$$

moeten toekennen.

(Men kan de isotrope oscillator ook laten ontstaan uit een beweging in een niet quasi-elastisch, centraal krachtveld. Dit moet hetzelfde resultaat geven.

In een niet quasi-elastisch, centraal krachtveld zijn de quantenformules:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\leftrightarrow} p_r \, dr = n_1 \frac{h}{2\pi} ; \quad P_2 = p_\varphi = n_2 \frac{h}{2\pi} .$$

Gaat het veld over in een quasi-elastisch krachtveld, dan wordt de middelbare beweging van Q_1 gelijk aan tweemaal die van Q_2 [2]). Men voere nu de substitutie uit:

[1]) Men denke hierbij aan de betrekking:

$$\frac{\partial (\mathbf{P}_1 \; \mathbf{P}_2)}{\partial (P_1 \; P_2)} = 1 .$$

[2]) Voor de energie, uitgedrukt in de P's, vindt men:

$$\alpha = K(P) = \omega \, (2 P_1 + |P_2|) \qquad (\omega = \text{frequentie}).$$

$$2P_1 + |P_2| = \mathsf{P}_1 \qquad\qquad \pm \; Q_2 = \mathsf{Q}_1$$
$$P_1 \qquad = \mathsf{P}_2 \qquad\qquad Q_1 \mp 2\,Q_2 = \mathsf{Q}_2$$ [1]) [2]).

In het niet-ontaarde geval zijn de bewegingen gekarakteriseerd door:

$$\mathsf{P}_1 = n_1^*\, h/2\pi \quad ; \quad \mathsf{P}_2 = n_2^*\, h/2\pi$$

waarbij het teeken van P_2 positief of negatief kan zijn.

Bij de aftelling van het aantal quantenbewegingen waarvoor $\mathsf{P}_1 = n_1^*\, h/2\pi$ is, moet onderscheiden worden tusschen $n_1^* =$ even of $=$ oneven:

a) $n_1^* =$ *even.*

Dan kan n_1 de waarden hebben: $0, \quad 1, \ldots n_1^*/2$;
en n_2 : $\pm n_1^*, \pm(n_1^* - 2), \ldots\ldots 0$.
Totaal: $n_1^* + 1$ bewegingen.

b) $n_1^* =$ *oneven.*

Waarden van n_1: $0 \;, \quad 1 \;, \ldots\ldots (n_1^* - 1)/2$;
van n_2: $\pm n_1^*, \pm(n_1^* - 2), \ldots\ldots \pm 1$.
Totaal: $n_1^* + 1$ bewegingen.

In beide gevallen vindt men dus $n_1^* + 1$ bewegingen, zoodat in het geval van een quasi-elastisch, isotroop veld aan de beweging waarvoor:

$$\mathsf{P}_1 = n_1^*\, h/2\pi \text{ is,}$$

het gewicht:

$$\underline{\Gamma = n_1^* + 1}$$

moet worden toegekend.

Dit stemt overeen met het boven gevonden resultaat, daar in beide gevallen P_1 dezelfde grootheid voorstelt [3]).)

(2) KEPLER-*bewegingen.*

Op analoge wijze als boven vindt men bij de elliptische beweging met inachtname der relativistische termen, dat aan de beweging, bepaald door de quantenvoorwaarden:

$$\mathsf{P}_1 = n_1\, h/2\pi \quad ; \quad \mathsf{P}_2 = n_2\, h/2\pi$$

[1]) Men moet de bovenste, resp. de onderste teekens nemen al naar dat P_2 positief of negatief is.

[2]) Funktionaaldeterminant: $\dfrac{\partial(\mathsf{P}_1\, \mathsf{P}_2)}{\partial(P_1\, P_2)} = \dfrac{\partial(Q_1\, Q_2)}{\partial(\mathsf{Q}_1\, \mathsf{Q}_2)} = \mp 1.$

[3]) Dit blijkt het eenvoudigste uit de formule voor de energie, welke in beide gevallen luidt: $\alpha = \omega\, \mathsf{P}_1$.

waar $n_2 \leqslant n_1$ is, het gewicht moet worden toegekend:

$$\underline{\Gamma = 2\, n_2 + 1.}\ ^{1)}$$

Houdt men geen rekening met de relativistische korrekties, zoodat de beweging zuiver periodiek is, en alleen P_1 gequantiseerd wordt, dan heeft de beweging waarvoor:

$$\mathsf{P}_1 = n_1\, h/2\,\pi$$

het gewicht:

$$\Gamma = \sum_{n_2=1}^{n_2=n_1} (2\, n_2 + 1) = \underline{(n_1 + 1)^2 - 1}\ ^{2)}.$$

Een algemeene formule voor deze gewichtsfunktie Γ^* heb ik niet kunnen vinden.

[1]) Zie hoofdstuk III, § 17 en 19.

Is een magnetisch veld aanwezig met krachtlijnen // de z-as — zie hoofdstuk III, § 20 — dan zijn er bij gegeven waarden van n_1 en n_2: $2\,n_2 + 1$ verschillende standen van het baanvlak mogelijk, daar n_3 alle waarden van $-n_2$ tot $+n_2$ kan doorloopen.

[2]) In aansluiting aan Sommerfeld wordt aangenomen dat een ellips met excentriciteit 1 niet kan voorkomen: de waarde $n_2 = 0$ wordt uitgesloten (zie boven, bl. 82 noot [5])). In de uitdrukking voor Γ moet de sommatie dus loopen van $n_2 = 1$ tot $n_2 = n_1$.

N.B. n_2 kan geen negatieve waarden hebben.

[Sluit men $n_2 = 0$ niet uit, dan is $\Gamma = (n_1 + 1)^2$.]

§ 42. OPMERKINGEN OVER DE STATISTIKA VAN HET ATOOMMODEL VAN WATERSTOF.

De toepassing der besproken statistische formules op verschillende systemen zal hier voorbijgegaan worden [1]).

Slechts zou ik een paar opmerkingen willen maken naar aanleiding van een onderzoek van K. F. HERZFELD over de statistika van het model van het Waterstof-atoom volgens BOHR [2]).

Wanneer men afziet van de relativistische korrekties is de beweging van het elektron om de atoomkern exakt periodiek; de intensiteitskonstanten („elementen") der elliptische baan zijn:

$$\mathbf{P}_1 = \sqrt{m e^2 a} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_2 = \sqrt{m e^2 a (1 - \varepsilon^2)} \\ \mathbf{P}_3 = \sqrt{m e^2 a (1 - \varepsilon^2)} \, . \cos i \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(I)}$$

(Zie hoofdstuk III, § 17.) — Van de drie grootheden $\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3$ wordt slechts de eerste, $\mathbf{P}_1$, gequantiseerd.

Voor de energie, uitgedrukt als funktie der $\mathbf{P}$'s, wordt gevonden:

$$\alpha = -\frac{m e^4}{2\,\mathbf{P}_1^2} = -\frac{2\,\pi^2\, m\, e^4}{n^2 h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Het probleem vertoont de volgende bizonderheden:

1) er is ontaarding;

2) het quantengetal n kan slechts positieve waarden vanaf 1 tot oneindig doorloopen;

3) wanneer n oneindig wordt, nadert α tot een eindige grenswaarde (in casu: 0).

[1]) Statistische problemen in verband met de quantentheorie zijn behandeld door PLANCK, EHRENFEST, EPSTEIN en vele anderen. — Met betrekking tot de roteerende systemen, speciaal het model van het H_2-molekuul, zij hier slechts vermeld: P. EHRENFEST, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, p. 451, 1913 en P. S. EPSTEIN, idem, **18**, p. 398, 1916.

(Vergelijk over het laatste ook noot [1]) aan het slot van § 29).

[2]) K. F. HERZFELD, Ann. d. Phys. **51**, p. 261, 1916.

I) Ter vereenvoudiging zal vooreerst worden afgezien van de ontaarding en zal worden gerekend alsof het probleem slechts 1 graad van vrijheid bezit (gerepresenteerd door $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{Q}_1$).

Dan volgt uit 3) dat:

$$Z = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\alpha/kT} \qquad \textit{divergeert.}$$

Men kan hier dus niet de statistische formules van § 41 toepassen.

Om een konvergente funktie Z te verkrijgen zou men een gewichtsfunktie $\Gamma(n)$ kunnen invoeren, zoodat:

$$Z^* = \sum_1^{\infty} \Gamma(n) \,.\, e^{-\frac{\alpha(n)}{kT}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

eindig is [1]).

In aansluiting aan het artikel van HERZFELD zal hier genomen worden:

$$\Gamma(n) = \left\langle \begin{matrix} 1 & (1 \leqslant n \leqslant s) \\ 0 & (n > s) \end{matrix} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

waar s een gegeven getal is.

Dan is:

$$Z^* = \sum_1^s e^{-\frac{\alpha(n)}{kT}} = \sum_1^s 10^{\frac{64000}{n^2 T}} \;{}^{2)} \quad \ldots\ldots \text{(V)}$$

De waarschijnlijkheid „a posteriori" of verdeelingsfunktie Φ (cf. bl. 251, form. 8) is:

$$\Phi = \frac{1}{Z^*} 10^{\frac{64000}{n^2 T}} \qquad (n \leqslant s) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

De zoo verkregen toestandsverdeeling bezit o.a. de volgende eigenaardigheden:

$$a) \quad \frac{\sum_2^s \Phi(n)}{\Phi(1)} < (s-1)\, e^{-\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{kT}}, \text{ dus: } < (s-1)\, 10^{-\frac{48000}{T}}.$$

[1]) Bij invoering van een gewichtsfunktie Γ kan men met de hier gedefinieerde funktie Z^* evenzoo rekenen als vroeger met de funktie Z (zie boven § 41, **B**, en: M. PLANCK, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **17**, p. 444, 1915). — *Zal het ensemble voldoen aan de tweede hoofdwet, dan moet de gewichtsfunktie aan bepaalde eischen gehoorzamen, welke door* EHRENFEST *geformuleerd zijn* (Phys. Zeitschr. **15**, p. 657, 1914).

Zie hierover het slot van deze §.

[2]) De getallenwaarde is overgenomen van HERZFELD, l.c. p. 269.

Voor niet te groote waarden van s en T is deze verhouding zeer klein, zoodat praktisch alle elektronen zich op de binnenste baan ($n = 1$) bewegen [1]).

b) De soortelijke warmte is bij lage temperaturen nul, neemt dan toe tot een maximumwaarde, en *neemt voor hoogere temperaturen weer tot nul af* [2]).

II) Wil men in aanmerking nemen dat de beweging 3 graden van vrijheid heeft doch ontaard is, dan kan men in aansluiting aan bl. 259 als gewichtsfunktie invoeren b.v.

$$\Gamma(n) = \begin{cases} (n+1)^2 - 1 & \{ 1 \leqslant n \leqslant s \} \\ 0 & \{ n > s \} \end{cases} \quad \ldots \text{(VII)}$$

Het algemeene karakter van de toestandsverdeeling bij niet te hooge temperaturen verandert hierdoor niet.

III) HERZFELD zelf voert niet in een bovenste grens voor n — wat neer zou komen op een maximumwaarde voor de groote as van de baan — maar een grenswaarde R_0 voor den *afstand elektron-kern* [3]).

De aphelium-afstand elektron-kern is:

$$a(1+\varepsilon) = \frac{\mathsf{P}_1^2}{m e^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \mathsf{P}_2^2/\mathsf{P}_1^2} \right\} \leqslant R_0 \quad . \; . \; \text{(VIII)}$$

Men kan 3 groepen van banen onderscheiden:

(Ter bekorting der notatie wordt geschreven:

$$R_0 = \frac{s^2 h^2}{4 \pi^2 m e^2}; \qquad \mathsf{P}_2 = \frac{n_2 h}{2\pi}; \qquad \mathsf{P}_3 = \frac{n_3 h}{2\pi} \quad \ldots \text{(IX)}$$

waarin s, n_2, n_3 niet geheel behoeven te zijn).

A) $n^2 \leqslant s^2/2$.

Deze banen liggen alle binnen een bol met straal R_0, onafhankelijk van de grootte der excentriciteit.

B) $s^2/2 < n^2 \leqslant s^2$.

De banen liggen slechts dan binnen den bol, zoo de excentriciteit niet te groot is: m.a.w. zoo:

$$n_2^2 \geqslant 2 s^2 - s^4/n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

[1]) Zie HERZFELD, l.c. p. 269-271.

[2]) HERZFELD, l.c. p. 272—275.

[3]) HERZFELD, l.c. p. 261, vgl.

C) $n^2 > s^2$.

Alle banen snijden den bol.

De vraag is nu: hoe moet in dit geval de gewichtsfunktie Γ gekozen worden?

In aansluiting aan het voorgaande (bl. 256—259) zou men kunnen nagaan hoeveel verschillende *geheele* waarden van n_2 en n_3 mogelijk zijn bij een gegeven waarde van n, en daarnaar de gewichten kunnen verdeelen.

Men komt dan tot:

A) $$\Gamma(n) = (n+1)^2 - 1 \qquad \text{(XIa)}$$

B) $$\Gamma(n) = (n+1)^2 - (n^*)^2 \qquad \text{(XIb)}$$

waar: $n^* = n^*(n)$ de *kleinste geheele* waarde van n_2 is, die aan vergelijking (X) voldoet [1]).

C) $$\Gamma(n) = 0 \text{ [2])} \qquad \text{(XIc)}$$

Herzfeld zelf kiest een andere gewichtsfunktie [3]).

Aan welke gewichtsfunktie men bij dit probleem de voorkeur moet geven, valt moeilijk te zeggen; hoogst waarschijnlijk zal men later de middelen vinden, noodig om deze problemen op te lossen.

Op de statistika der *hyperbolische* banen, en de theorie van de dissociatie van waterstof-atomen welke Herzfeld geeft [4]), zal hier niet worden ingegaan.

Echter moeten nog eenige woorden gezegd worden over de vraag of de besproken toestandsverdeelingen voldoen aan de tweede hoofdwet.

[1]) Steeds is: $n^* \geqslant 1$ (cf. bl. 259, noot [2]).)

[2]) *Voorbeeld.*

Zij: $s = 10$. Dan heeft men:

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11, enz.
n^* =	1	1	1	1	1	1	1	7	9	10	—
Γ =	3	8	15	24	35	48	63	32	19	21	0, enz.

[3]) Herzfeld, l.c. p. 268.

Men vergelijke ook: A. Sommerfeld, Sitz. Ber. Münch. Akad. 1917, p. 183, vgl. (Sommerfeld bespreekt verschillende methoden om tot een gewichtsfunktie te komen).

[4]) Herzfeld, l.c.

Ter vereenvoudiging wil ik me beperken tot het boven onder **I**) (bl. 261) besproken probleem.

In de gebruikte gewichtsfunktie (IV), en dus ook in de verkregen verdeelingsfunktie Φ, komt een parameter s voor, de bovenste grens voor het quantengetal n. In plaats van s kan men, zooals reeds gezegd is, een bovenste grens R invoeren voor de *groote as* van de elliptische baan.

Zal de verkregen toestandsverdeeling voldoen aan de tweede hoofdwet, dan moet volgens EHRENFEST [1]) de gewichtsfunktie gehoorzamen aan de betrekking:

$$\sum_n e^{-\frac{a(n)}{kT}} \cdot \frac{\partial \Gamma(n)}{\partial s} \delta s = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \text{(XII)}$$

of — wat op hetzelfde neerkomt — aan:

$$\sum_{n=A}^{n=B} \frac{\partial \Gamma(n)}{\partial s} \delta s = 0 \; ^{2)} \ldots \ldots \ldots \text{(XII*)}$$

Hieraan is niet voldaan; dus schijnt de verkregen toestandsverdeeling *niet* in overeenstemming te wezen met de tweede hoofdwet.

Men zou dit op twee verschillende wijzen in orde kunnen brengen:

a) Men zou kunnen aannemen dat bij geen enkel proces dat met een verzameling van waterstof-atomen wordt uitgevoerd, de grootheid s (of R) verandert. s verliest dan het karakter van een parameter, en (XII) en (XII*) vervallen.

Dit lijkt me echter in strijd te zijn met de opvatting van HERZFELD: HERZFELD denkt zich de maximumwaarde voor de grootte der banen een gevolg te zijn van de botsingen der atomen; volgens hem moet R (of R_0) van de orde van grootte van de middelbare vrije weglengte zijn [3]). Dan zou R en dus s veranderen met de dichtheid van het gas.

b) Men zou de funktie voor de energie zoo kunnen wijzigen, dat voor $n > s$ de energie *oneindig groot* wordt, zoodat reeds

[1]) P. EHRENFEST, Phys. Zeitschr. **15**, p. 657, vgl., 1914.

[2]) P. EHRENFEST, l.c. p. 660.

[3]) K. F. HERZFELD, l.c. p. 271.

zonder dat men een extra gewichtsfunktie invoert:

$$\lim_{n=\infty} e^{-\varepsilon/kT} = 0 \text{ is,}$$

en

$$Z = \sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon(n)}{kT}} \textit{ konvergeert.}$$

Men is dan nog volkomen vrij in de manier waarop men deze wijziging wil aanbrengen en hoe men s b.v. van het volume van het gas zal laten afhangen; steeds zal voldaan zijn aan de tweede hoofdwet daar er nu geen van s afhankelijke gewichtsfunktie meer is.

Zoodra men de parameter s in de energie-formule brengt, zal het ensemble een „kracht" in de richting van deze parameter uitoefenen (zie bl. 252, formule (IV)). Indien s een funktie is van het volume van het gas zou dit een bijdrage geven in de *druk*[1]).

---

[1]) Het probleem vertoont groote analogie met het probleem van de druk in de klassieke kinetische gastheorie. Schrijft men bij de berekening van de toestandsverdeeling aan de molekulen eenvoudig voor dat ze alle binnen een volume V moeten liggen — voert men dit dus in als een „gewichtsfunktie" — dan geeft de aan (IV), bl. 252, analoge formule *niet* de druk van het gas tegen de wanden van het volume, en de afleiding van formule (14) voor de tweede hoofdwet geldt niet meer (in de klassieke theorie verloopt de afleiding hiervan op dezelfde wijze als in § 41, **B**, **I**). Voert men evenwel een potentieele energie van de molekulen in welke oneindig groot wordt, zoodra de molekulen buiten V zouden komen, dan hoeft men geen extra gewichtsfunktie in te voeren: de op de gewone wijze verkregen toestandsverdeeling levert vanzelf dat alle molekulen binnen V liggen, terwijl men de druk van het gas volgens formule (IV) van bl. 252 kan berekenen.

EUG. DUBOIS.

OVER HET ONTSTAAN EN DE GEOLOGISCHE GESCHIEDENIS VAN VENNEN, VENEN EN ZEEDUINEN.

(Korte inhoud eener voordracht, gehouden op 15 November 1916.)

De geologische geschiedenis van de vennen: meertjes, moerassen, droge kommen in het landschap van Brabant en Limburg's noordelijke helft, is zeker nauw verbonden met die van de Maas en haar bijrivieren. Dat bewijst reeds hun, in zekeren zin, regelmatige ligging in de delta-bocht van de Maas, welker wateren zich ongetwijfeld steeds meer in noordoostelijke richting zijn gaan beperken, en hun ligging in min of meer aan de rivieren parallele rijen. Zij is dan nauw verbonden ook met het ontstaan van den diluvialen bodem.

Waar de Maas, bij Eysden, komt op Nederlandsch gebied, en tot bij Maastricht, loopt zij in een dal, dat $3^1/_2$ tot 4 kilometer breed en meer dan 60 meter diep, in het krijtplateau van Zuid-Limburg is uitgesneden.

Uit de tegenwoordige toestanden kan men de wording van dat wijde dal onmogelijk verklaren, want lang zoo ver breiden zich de wateren van de Maas bij de hoogste overstroomingen niet uit: zij bereiken zelfs nooit een anderen in het landschap zichtbaren, op belangrijk lager niveau gelegen ouden oever, den rand van het zoogenaamd *middenterras*. Wel naderen de hoogste buitenwaterstanden den veel dichter bij den tegenwoordigen oever gelegen rand van het *laagterras*. Maar deze is bij Eysden toch nog 8 meter boven het gemiddeld rivierpeil gelegen, en bij die grootsche metamorphose van de rustig mooie Maas in den ontzaglijken, twintig maal breederen stroom, zag men dezen aldaar nooit tot voorbij het laagterras stijgen.

Toch staat het vast, dat de Maas, in lang verleden tijd, den rand van het dal in het krijtplateau ver heeft overschreden en op het *hoogterras*, d.w.z. over het plateau stroomde. Niet, dat de rivier toen ook de geheele dalgleuf vervulde: de zooeven aangeduide terrassen bewijzen, dat eerst na die grootste breedte geleidelijk het dal dieper is geworden, maar ook telkens minder breed.

Inderdaad begon, in die oudste phase van de Maas, bij Eysden hare *delta*, en deze verbreedde zich van daar noordwaarts en oostwaarts over het grootste deel van Limburg en westwaarts ver in Noord-Brabant en de Belgische Kempen. Wij kunnen dat met zekerheid beoordeelen uit hare afzettingen. In het Zuiden van Limburg treffen wij op het krijtplateau afzettingen van de oudste phase van de Maas aan, vooral grind, welks hoofdbestanddeelen, blijkens den aard der gesteenten, slechts kunnen komen uit het stroomgebied van den bovenloop der Maas, uit de Ardennen vooral. Het massief van de Ardennen is het ook hoofdzakelijk, dat het materiaal geleverd heeft voor den diluvialen bodem van de oostelijke helft van Brabant en het noordelijk gedeelte van Limburg, waarin de vennen gelegen zijn en de venen van de Peel.

Alleen van de hardste deelen der rotsen van de Ardennen (vooral kwartsieten en gangkwarts uit de zandsteenen, een enkel zeer hard conglomeraat e.d.) en vuursteen uit het tufkrijtgebergte van Zuid-Limburg kunnen die hoofdbestanddeelen van het Maas-grind: kwartsieten van verschillende soort, witte kwarts, een hard, bont conglomeraat, vuursteen en enkele andere, afkomstig zijn. Door den stroom werden deze niet geheel fijn te maken of op te lossen deelen tot rolsteenen geslepen en dan als grind opgehoopt of wel als afzonderlijke keien en keitjes in het zand, dat als hoofdproduct der verweering en afschuring van den gebergteromp der Ardennen werd medegevoerd, op bedoeld plateau neergelegd.

Een ander bewijs, dat inderdaad de Maas eenmaal over het Zuidlimburgsche krijtplateau stroomde leveren ons de „aardpijpen" of „geologische orgelpijpen" van den Sint-Pietersberg. Dat zijn meest rechtstandige, buisvormige, onder gesloten holten in het tufkrijt, die bij de grotvormige excavatie van den berg, de vorming van steengroeven ter verkrijging van bouwsteen,

open kwamen. Al moge ook oplossing van tufkrijt medegewerkt hebben tot het eerste ontstaan van die pijpen, en de kleinste daaraan wel geheel het aanzijn te danken hebben, zoo moeten toch de grootere, steeds min of meer vertikale, op andere wijze verder gevormd zijn. Ongetwijfeld zijn zij van denzelfden aard als de „reuzenketels", die in zandsteenachtige bedden van snelstroomende rivieren (vooral in tegenwoordige of vroegere gletscherstreken, doch ook wel elders) werden uitgeschuurd door steenen, welke in holligheden van het rivierbed door den stroom werden rondgevoerd. Meestal zijn die rechtstandige pijpen met grind, ten deele ook met de eigenaardige leemsoort van Zuid-Limburg, de *löss*, welke als een jongere laag het grind bedekt, opgevuld. Sommige van die aardpijpen vertoonen nog duidelijke sporen van het wielen der steenen waardoor zij gevormd werden.

Het onderzoek van het grind, dat de Maas op het krijtplateau, o.a. ook op den Sint-Pietersberg, heeft neergelegd, leert ons niet alleen zijne herkomst kennen, maar ook de wijze waarop het hier is gekomen. Het is veelal zeer grof en bevat niet zelden reusachtig groote steenblokken, zoodat het onmogelijk uit de Ardennen door water alleen kan getransporteerd zijn. Drijfijs moet daarbij mede geholpen hebben. Op den Sint-Pietersberg, nabij het dorp Sint-Pieter (niet ver van Slavante), bij ongeveer 50 M. boven de tegenwoordige Maas, werd in grove grind een $3^1/_2$ M. lang steenblok (geelachtig grijze kwartsiet) aangetroffen, dat ik in 1912 gefotografeerd heb. In 1904 mat ik o.a. twee blokken, met ongeveer 1.80 M. grootste afmeting, van een donkergrijze geaderde kwartsiet uit een grindgroeve in Savelsbosch, op het plateau van den oostelijken Maaskant. Groote steenblokken worden telkens in het plateaugrind aangetroffen en ERENS heeft, reeds lang geleden, vele van die „zwerfblokken" op het plateau van Zuid-Limburg beschreven. Het is te betreuren, dat deze en dergelijke verschijnselen, die voor de kennis der wording van den bodem van Nederland ten minste even belangrijk zijn als die aan het noordelijk landijs moeten worden toegeschreven, wel sterk verwaarloosd zijn. Het reusachtig gletscherijs der Alpen en dat der Vogezen, en stellig niet minder het winterlijk rivierijs, vooral ook der Ardennen, hadden voor de wording van onzen bodem zeker nog wel grooter beteekenis dan het Finsch-Scandinavische landijs. Reeds lang voor den diluvialen tijd was ons

land bijna geheel Rijn-Maasdelta en het materiaal van den diluvialen *ondergrond* is tot in Drente en Friesland, Terschelling en onder onze voeten door die rivieren, hier vooral den Rijn, geleverd. Van het oppervlakkig diluvium van ons land is ongeveer de helft van zuidelijken oorsprong. Toch heeft de omstandigheid, dat, na STARING's tijd, vooral van Groningen en Utrecht het onderzoek van ons diluvium is voortgezet geworden, ten gevolge gehad, dat de noordelijke helft van den bodem van ons land veel beter onderzocht en bekend is dan de zuidelijke. Intusschen is door onderzoekingen van geologen der Rijksopsporing van Delfstoffen daarin wel groote verbetering gekomen. Maar de beteekenis van het zuidelijk ijs voor het ontstaan van ons land wordt toch nog onderschat.

Heeft aldus ontwijfelbaar ijstransport bij het ontstaan van het Maasdiluvium een zoo belangrijke rol gespeeld, hoe moet men zich dat transport dan voorstellen?

Daar aldus het grind op den Sint-Pietersberg en ook veel verder noordelijk — gewezen zij slechts op de groote blokken van gesteenten der Ardennen, benevens tal van andere uit het stroomgebied van den Rijn, die bij Tegelen en ook bij Maarn worden aangetroffen — noodzakelijk in een ijstijd moet zijn afgezet, heeft men dus na te gaan of, in koude luchtstreken, tegenwoordig nog zulk een transport door rivieren plaats heeft, misschien, gedurende koude winters, onder bijzondere omstandigheden, zelfs in Europa.

Inderdaad nam men deze waar, in den winter van 1879 op 1880, in den loop van de Loire en van de Saône. Er vormden zich, op plaatsen waar in den rivierloop belemmeringen voorkomen, reusachtige ijsdammen (*embacles*), die van de oppervlakte tot den bodem uit opeengestapelde ijsschotsen bestonden, gemengd met grind, die ze van het rivierbed hadden opgeploegd. Bij Saumur had zich in 1880 zulk een *embacle* in de Loire gevormd, van 9 kilometer lengte; de ijsblokken waren een halve meter dik en in het midden der rivier verhief zich de ijsdam 5 tot 6 meter hooger dan aan de kanten.

De vorming van ijsdammen is een gewoon verschijnsel, dat zich ieder jaar herhaalt, in de Sint-Laurens-rivier, boven Montreal. Wanneer dan, bij ingetreden dooi, de ijsdam verbroken wordt en het ijs ten slotte den normalen rivierloop afdaalt, heeft er

op groote schaal met dat drijfijs transport van grind en zand plaats. Maar het gebeurt ook wel, dat de ijsdam aan de afkomende wateren een onoverwinnelijken weerstand biedt en hen dwingt een nieuwen uitweg ernaast te zoeken. Dan blijven later, na het afsmelten van het ijs, de vaste bestanddeelen (zand en grind), die de opeengestapelde ijsschotsen aan den bodem hadden ontrukt, als een heuvelachtige dijk liggen.

In Siberië bevriezen vele rivieren (behalve de zeer groote) in den winter tot den bodem en ook hier verheffen zich de ijsmassa's hoog boven het normale oppervlak, doordien nog steeds water uit het Zuiden, waar de Siberische rivieren in het algemeen ontspringen, wordt aangevoerd. Wanneer dan, bij zachter weersgesteldheid, de dooi intreedt, beginnen ook het eerst in het Zuiden de rivieren weder te loopen. Het water stroomt eerst rechts en links van de opgehoopte ijsmassa's en vormt twee zijdelingsche rivieren; dan zet zich ook het door de winterkoude gescheurd en gebroken ijs op zijn beurt in beweging. De stukken, die aan het rivierbed kleefden komen aan de oppervlakte, beladen met zand, grind en zelfs groote steenblokken. Die massa, op haren weg naar het Noorden dikwijls opgehouden door nog vast gebleven ijsdammen, ploegt diepe gleuven in den bodem en geeft iederen winter den stroom nieuwe oeverlijnen. Zij vervracht aldus geleidelijk, van afstand tot afstand, materialen, welke de rivier als zoodanig nooit zou hebben kunnen verplaatsen.

In Alaska hebben soortgelijke verschijnselen plaats aan de monding van de reusachtige Yoekon. Gedurende acht maanden van het jaar is hare strooming onderbroken. Bij het losraken van het ijs doorploegen zijne massa's de delta, de steile rivieroevers worden afgebroken en de mondingen verplaatsen zich telkens.

Ik heb deze verschijnselen van den tegenwoordigen tijd, die zoover mij bekend is, het eerst door DE LAPPARENT zijn in het licht gesteld, eenigszins uitvoerig besproken, omdat zij niet alleen het ontstaan der grindafzettingen in het Nederlandsche diluvium kunnen verklaren, maar ook licht werpen op andere problemen van onzen bodem, onder andere het ontstaan van vennen.

Het kon wel niet anders of ook op de delta dier oudste Maas moeten drijvende ijsmassa's het grindachtig „Maasdiluvium" heb-

ben afgezet, toen het klimaat zeer koud geworden was. Maar het ligt ook voor de hand, dat na het transport, in de eerste ijstijden, van het grind, dat zich, gedurende den langen voorafgaanden warmen tijd, in den bovenloop der rivier gevormd had, in de latere ijstijden toch nog ontzaglijke massa's ijs naar de delta kunnen zijn afgedreven.

Meerdere ijstijden hebben zich inderdaad bij de vorming van het diluvium van Nederland doen gelden. In het noordoostelijk gedeelte van ons land is duidelijk waar te nemen hoe op het „grinddiluvium" van de Rijn- en (Maas-)delta rust het „Scandinavisch diluvium", daarvan wel gescheiden door de interglaciale „Potklei". Dat Rijn- (elders Maas-)diluvium behoort dus tot een of meer oudere ijstijden. In Noord-Brabant en de noordelijke helft van Limburg wordt het grindachtige Maasdiluvium bedekt door het „zanddiluvium". Het ligt voor de hand, althans het diepste deel van dit zanddiluvium als synchronisch met het Scandinavisch diluvium te beschouwen.

Het komt mij voor, dat de eigenaardige Zuidlimburgsche leemsoort, die men met den Duitschen naam „löss" aanduidt, welke op het grindachtig Maasdiluvium van het krijtplateau werd afgezet, eveneens als met het Scandinavisch diluvium gelijktijdig ontstaan te beschouwen is. Tot voor korten tijd pleegde men wel de löss als een interglaciale formatie aan te zien. Het droge klimaat, waarin de bestanddeelen van deze leemsoort als steppenstof, vooral ook blijkens de daarin aangetroffen overblijfselen van steppendieren, door den wind moeten zijn afgezet, werd onvereenigbaar geacht met het klimaat van een ijstijd. PENCK toonde evenwel (in 1905) aan, dat noodzakelijk het groote noordsche landijs op zijne omgeving zulk een invloed moest uitoefenen, dat eene zone met droog klimaat het in het Oosten en Zuiden omgaf. Evenals thans op het Antarktische landijs een groote anticyclone gelegen is, moet op dat noordsche ijs een groot luchtdrukmaximum, eene anticyclone, gelegen hebben; van welk ijsgebied de lucht als noordelijke en oostelijke winden afvloeide. Ten zuiden van het landijs, dat op het noordelijk gedeelte van Nederland lag, tot aan een iets bezuiden Utrecht verloopende, ter hoogte van Nijmegen het tegenwoordig bed der Maas naderende schuine lijn, moeten toen, in plaats van de tegenwoordig overwegende westelijke winden, oostenwinden ge-

waaid hebben. Die winden kunnen slechts droog geweest zijn. Men moet aldus wel tot een steppenklimaat ook voor het zuidelijk gedeelte van ons land besluiten. Een krans van löss is inderdaad aan de continentale en zuidzijde van het groote landijs, in Rusland, Duitschland, Nederland, België en Frankrijk, ook in het zuiden van Engeland, te vinden. Deze leemsoort heeft, ten minste in haren oorspronkelijken toestand (primaire löss), alle eigenschappen van steppenleem en aan hare basis worden vele door den wind glad geslepen kantenkeien gevonden, die ook bewijzen voor een droog klimaat. Zij komt onder locale omstandigheden voor, die hare afzetting door water uitsluiten, bevat overblijfselen van steppendieren, zooals de Saiga-antilope en de Springmuis en heeft algemeen, waar zij niet secundair ontkalkt werd, een hoog kalkgehalte. Deze laatste eigenschap is niet wel te vereenigen met een herkomst van het materiaal uit rivierleem, daarentegen zeer begrijpelijk indien men de löss beschouwt als verstoven gletscherslib van het noordsche landijs, dat, naar men mag aannemen, algemeen kalkrijk geweest is.

In de omstandigheid, dat primaire (kalkrijke) löss in Limburg op het plateau-grind werd afgezet, nadat de Maas zich reeds een bed van zekere diepte daarin had uitgesneden, en tot dat hoog terrein beperkt is, ligt op zich zelf, reeds een bewijs voor haar ontstaan als een afzetting door den wind en uit gletscherslib — anders kon het kalkgehalte niet zoo hoog zijn —, aldus voor gelijktijdigheid met het „Scandinavisch diluvium". De klimatische omstandigheden, waaronder löss als steppenleem moet zijn afgezet, laten geen plaats voor twijfel aan die gelijktijdigheid over.

Lag op het noordsche landijs een luchtdrukmaximum, dan waren daardoor de banen der atlantische depressies welke tegenwoordig boven de Noord- en Oostzee verloopen, afgesloten. De luchtwervels, die het noordwestelijk Europa nu den meesten neerslag brengen, zullen gedwongen zijn geweest de mediterrane baan te volgen en veelvuldiger dan tegenwoordig waren op de Zuideuropeesche schiereilanden de regenbrengende westelijke winden. Daardoor heerschten aan de westkusten dier schiereilanden, gedurende den ijstijd dergelijke klimatische toestanden als tegenwoordig heerschen in westelijk Patagonië, in Nieuw-Zeeland, in Zuid-Alaska: buitengewoon lage ligging der sneeuw-

grens; de boomgrens daaronder op zoo klein mogelijken afstand en onmiddellijk zwaar bosch. PENCK kwam tot deze voorstelling, doordien hij werkelijk de diluviale sneeuwgrens op de westzijde der schiereilanden bijzonder laag gevonden had en, palaeontologisch bewezen, het mediterraangebied het ijstijdelijk woudland van Europa was. Ook Noord-Afrika genoot een pluviaal klimaat, waardoor in de tegenwoordige woestijnen rivieren konden bestaan, uit welker dalen ten deele *wadis* geworden zijn.

Wat nu betreft de noordelijke helft van Limburg en Noord-Brabant, daar rust op het Rijn-Maasdiluvium het zoogenaamd „zanddiluvium", een volstrekt niet eenvoudig samenstel van lagen zand, ten deele met, ten deele zonder rolsteentjes en keien, en leem, dat zeer wel in verschillende glaciale (en interglaciale) tijdvakken kan zijn gevormd. Voldoende gegevens, waarop een algemeene indeeling van dit zanddiluvium zou kunnen gegrond worden, staan nog niet ter beschikking. Waarschijnlijk is het evenwel, dat van *twee* zuidelijke ijstijden daarin afzettingen voorkomen.

PENCK en BRÜCKNER hebben in de Alpen de sporen van vier ijstijden kunnen onderscheiden, als de Günz-, Mindel-, Riss- en Würm-tijden. Met een enkel woord zij betoogd, dat het zanddiluvium slechts op de Riss- en de Würm-glaciatie der Alpen en Vogezen kan betrekking hebben. Het Rijn-Maasdiluvium is namelijk in een oudere en jongere helft te verdeelen. Dit is o.a. gebleken bij eene boring door de nog in haar normale ligging zich bevindende lagen *in* een der kleigroeven bij Tegelen. Bij die, onder mijne leiding, in opdracht van Teyler's Stichting, in December 1904, uitgevoerde boring werd bevonden, dat *onder* de 8.5 M. dikke kleilaag, die aldaar bedekt wordt door ongeveer 8 M. Rijn-Maasdiluvium, eene *diepere* laag Rijn-Maas-diluvium, van 13 M. dikte, gelegen is, welke op hare beurt een diepere kleilaag, van 6 M. dikte, bedekt, waaronder weder zand, ten deele met rolsteentjes. Ook leerden, omstreeks denzelfden tijd, boringen in de prise d'eau der Amsterdamsche waterleiding, de duinstreek tusschen Vogelenzang en Zandvoort, duidelijk een bovenste en een onderste „grove" (grindachtige) afdeeling in het diluvium onderscheiden, waartusschen een middelste „fijne" (zand- en kleiachtige) afdeeling. Het ligt voor de hand, de twee grindlagen hier en ginds als produkten van twee ijstijden te

beschouwen, die slechts de Günz- en de Mindel-tijd kunnen zijn. De Klei van Tegelen en de kleiachtige en fijnzandige laag in het duin moeten dan tot het oudste interglaciaal gerekend worden.

Er is hier aanleiding een geologisch gebruik te herzien. Men pleegt namelijk de geheele periode der ijstijden, met de tusschen-ijstijden, de Diluviale periode (de periode van de groote vloeden) te noemen en deze, samengevat met het tegenwoordig of nieuwste tijdperk der geschiedenis van de aarde, als Kwartair tijdperk te stellen tegenover het Tertiaire. Daarbij neemt men aan, dat de diluviale periode zich, behalve door de klimatische bijzonderheid der ijstijden, ook nog zou onderscheiden hebben van het voorafgaand Tertiair tijdvak, doordien reeds in het begin der periode het meeste in de dieren- en plantenwereld nieuw zou zijn geweest, plistoceen (van het grieksch *pleiston* = het meeste en *kainos* = nieuw), in tegenstelling zelfs met de jongste of pliocene afdeeling van het Tertiair tijdvak, toen het verschil met de tegenwoordige planten- en dierenwereld nog betrekkelijk groot was. (Plioceen, van *pleioon* = meer en *kainos* = nieuw, beteekent dat wel meer nieuw in de levensvormen was dan in het ouder tertiair).

De interglaciale Klei van Tegelen behoort evenwel, naar hare fossiele fauna en flora, tot het Plioceen. In tegenstelling met hetgeen men als vanzelfsprekend en algemeen geldig aannam, is hier Diluvium niet hetzelfde als Plistoceen. Vooral hertensoorten van Aziatisch type, zooals zij het Plioceen van centraal Frankrijk kenmerken (en waarnaast moderne Europeesche typen ontbreken) en eene pliocene paardesoort (*Equus Stenonis*), naast andere zoogdieren, die in Europa althans nooit in het jonger diluvium worden aangetroffen, zooals *Hippopotamus major*, *Rhinoceros etruscus* en *Trogontherium Cuvieri* en vooral eene boom- en zoetwaterflora met de Oostaziatische *Magnolia Kobus* en *Euryale*, met de Amerikaansche *Juglans cinerea* en *Taxodium distichum*, de mediterrane en Himalaya-typen *Pterocarya caucasica*, *Staphylea pinnata* en *Picea morinda*, stempelen de Klei van Tegelen tot eene jong-pliocene laag. Men wordt aldus genoopt aan te nemen, dat de Diluviale periode, in den zin van glaciale periode, reeds begon in de Pliocene afdeeling van het tertiaire tijdvak en heeft de voorstelling, dat Plistocene en Glaciale of Diluviale periode elkander dekkende begrippen zijn,

op te geven. Het eene is dan ook, naar zijnen aard, een palaeontologisch, het andere een klimatologisch begrip: deze behoeven niet parallel te gaan.

Welke opvatting men hieromtrent moge huldigen, zeker laat het palaeontologisch karakter der Klei van Tegelen slechts de chronologische interpretatie toe, haar als *oudste* interglaciaal te beschouwen en derhalve het bovenste Rijn-Maasgrind tot den Mindel-tijd te rekenen. Het op dat „Rijn-Maasdiluvium" rustend Zanddiluvium moet dan, voor zoover het in ijstijden gevormd werd, tot den Riss- en den Würm-tijd gerekend worden. Want het is ondenkbaar, dat deze beide zuidelijke ijstijden niet, en de vroegere wel belangrijke afzettingen in ons land zouden hebben nagelaten.

In den Riss-tijd lag op de grootste, noordelijke helft van Nederland het fenno-scandinavische landijs, waardoor de wateren van den Rijn gedwongen werden naar het Zuiden uit te wijken. Bezuiden den tegenwoordigen Maasloop werd in de toen tot Noord-Brabant en de noordelijke helft van Limburg met de Belgische Kempen beperkte, doch daarom des te waterrijker delta, door Rijn- en Maaswateren en, in het Westen, door wateren van de Schelde, het ouder zanddiluvium, ter dikte van gemiddeld enkele tientallen meters, over het in den voorafgaanden langen interglacialen tijd ongelijk geworden grinddiluvium uitgespreid. Met het eindigen van dezen derden zuidelijken ijstijd en het terugtrekken tevens van het landijs, dat de noordelijke helft van ons land bedekt had, verlegde de Rijn zijn takken weder naar het Noorden en liet de delta in het tegenwoordig vennengebied geheel aan de Maas en de Schelde over. Het klimaat bleef nu weder langen tijd gematigd en de wateren krompen tot een beperkt aantal takken in, die diepe geulen uitschuurden.

In den alsdan intredenden vierden of laatsten zuidelijken ijstijd, den Würm-tijd, werd nogmaals dit gebied, nu dan alleen door de Maas en de Schelde, overstroomd en het jongste glaciale zanddiluvium aldaar afgezet. Het waarschijnlijk synchronisch „Baltisch landijs" bereikte Nederland niet.

Toen ook deze laatste koude, natte tijd ten einde gekomen was, trokken de wateren van de Maasdelta zich voor goed in bepaalde, meestal wel nieuwe loopen terug, waaruit ongetwijfeld

de tegenwoordige Maas en vele beken in het vennengebied ontstaan zijn. Aldus tot weinige geulen beperkt, schuurden zij hun bedden meer of min diep in de zandvlakte. Aan de westzijde van de Maas en langs de Neerbeek, tegenover Roermond, zijn duidelijk de randen van de toenmalige valleien te herkennen, aan den bovenkant van het zoogenaamd „middenterras". De wateren brachten het dan nooit meer tot een overstrooming van de oude zanddelta, maar wel verlaagden zij, sprongsgewijs, haar niveau binnen de valleien van de Maas en haar bijrivieren. Het „middenterras" en het „laagterras", welke o.a. in de bedoelde streek te herkennen zijn, moeten dan aan minder beteekenende klimaatschommelingen (van den „Post-Würm-tijd") of aan bodembewegingen in het stroomgebied van de Maas gedurende den postglacialen tijd worden toegeschreven [1]).

Uit dat alles blijkt, dat de in het zanddiluvium van den vierden zuidelijken ijstijd gelegen venkommen na haar ontstaan niet aan overstrooming en gevaar van dichtspoelen zijn blootgesteld geweest. Maar tevens is het duidelijk, dat de vennen in geen geval *ouder* kunnen zijn dan het jongste zanddiluvium van de Maasdelta. Stellig zijn vele even oud. Men heeft haar ontstaan wel toegeschreven aan uitkolking door de „wilde" deltawateren, deze eigenschap blijkbaar niet alleen bedoelend in den zin van onregelmatig of nog niet in bepaalde banen geleid, doch ook van woest, krachtig. Maar zou integendeel uit de omstandigheid, dat het door de deltawateren van de Maas nu alleen, niet meer van den Rijn, afgezette zand zelden zeer grof is en (zoover niet drijfijs bij het vervoer medewerkte) slechts weinig en lichte steentjes bevat, niet moeten worden afgeleid, dat de stroomsnelheden op de delta slechts gering waren en zeker niet groot genoeg voor de bedoelde uitkolking, die niet zelden eenige meters diepte zou bereikt hebben?

Meer voor de hand liggend was het om de heuvels, die de vennen algemeen vergezellen, alleen naar hun voorkomen, voor

1) In een artikel „Hoe ontstonden de vennen bij Oisterwijk?" opgenomen in de Verslagen van de Vereeniging tot Behoud van Natuurmonumenten in Nederland (Amsterdam 1917, p. 8), schreef ik ten onrechte alleen het „laagterras" aan deze oorzaken toe. Het voorhanden zijn van een „middenterras" aan de Neerbeek, zoowel als aan de Maas, bewijst zijn postglaciaal ontstaan.

duinen te houden en de venkommen zelf door uitwaaiing te verklaren.

Deze verklaring is evenwel oogenschijnlijk niet bestand tegen het nader onderzoek van de samenstelling der heuvels. Het zand van de vermeende oude stuifheuvels blijkt namelijk steentjes te bevatten. Wel zijn deze dikwijls niet groot — de grootste en zwaarste, in de vermeende duinen bij de vennen van Oisterwijk door mij en anderen verzameld, bereikten slechts 1 c.M. lengtemaat en wogen een halve gram — maar toch wel te groot voor duinzand. In de naast vennetjes gelegen zandheuvels bij Horn, ten westen van Roermond, die op de Topographische kaart als „duinen" en in den Atlas van Staring als zandstuivingen staan aangegeven, komen zij, tot bovenaan, in horizontale snoertjes van grof zand voor; een vuursteenkeitje werd daaraan ontnomen van 22 m.M. grootste lengtemaat en 3.15 G. gewicht [1]). Deze heuvels vertoonen ook overigens duidelijk fluviatiele gelaagdheid, doordien horizontale lagen van grover en fijner zand met elkander afwisselen. Toch ziet het landschap geheel duinachtig uit, maar de wind werkt er veeleer afbrekend, waardoor op vlakke plaatsen nabij de toppen tal van keitjes vrij komen te liggen. Waar ook ik in Noord-Limburg en Noord-Brabant het zanddiluvium daarop onderzocht, ontbraken keitjes nergens, noch in de heuvelachtige, noch in de vlakke streken — al zijn ze niet overal even talrijk —; men vindt ze meestal verstrooid, maar in deze en gene ook wel in horizontale en dan duidelijk door water afgezette laagjes.

Op geringe diepte, onder dit zanddiluvium, dat in de vlakke streken de oppervlakte vormt en waaruit zeker althans de meeste heuvels bestaan, nog een paar meter boven het niveau van den bodem der diepste vennen, wordt in het vennengebied der Neerbeek eene gemiddeld ongeveer 70 c.M. dikke laag van bruine, fijnzandige leem aangetroffen. Deze is duidelijk en scherp gestratificeerd. Daarboven bevindt zich eene zone van eenigszins leemhoudend fijn zand, die hier en daar keien bevat van karakteristieke Maasgesteenten (o.a. kwartsiet van Revin en conglomeraat van Burnot uit de Ardennen, vuursteen van het Zuid-

[1]) Dit is het grootste in de heuvels door mij in situ aangetroffen keitje (in Augustus 1918).

limburgsche krijtplateau). Gedurende de laatste tien jaar had ik gelegenheid die streek nader te onderzoeken en bevond, dat kilometers ver de samenstelling van den bodem in dat vennengebied gelijk blijft. De gemiddelde, uit vele ingravingen voor slooten berekende onderlinge afstand der keien van meer dan 4 c.M. grootste lengteafmeting (de grootste kunnen enkele decimeters bereiken; een kwartsiet woog 22.7 K.G.) is 2.5 tot 3 M. Op enkele plaatsen vindt men bepaald ophoopingen. Zulk een dichte uitstrooiing van keien in fijn zand is wel niet anders te verklaren dan door ijstransport. Andere verschijnselen bevestigen dit. In het profiel vertoont namelijk de bedoelde zone, waarin de keien gelegen zijn, waar ook zij eene, hoewel onregelmatige gelaagdheid bezit, algemeen verbuigingen of kronkels en de doorloopend duidelijk gestratificeerde bruine leemachtige laag daaronder, welke de regen scherp van de keienvoerende fijnzandige zone in het profiel afscheidt, menigvuldige rechtopstaande of scheeve scheuren en breede gapingen, waar dan het grovere witte zand van den bovengrond is ingedrongen; ook wel heeft dit laatste brokken van het gelaagde afgerukt en scheef gedrukt of naar boven verplaatst. Dit zijn welbekende verschijnselen van ijsdruk, zooals zij. op veel grooter schaal, in de noordelijke helft van ons land. welke het landijs schuivend bedekt heeft, worden waargenomen.

Zware ijsschotsen en ijsmassa's moeten dus ook op de jongste zanddelta nog altijd talrijk aan den grond geraakt zijn. Wel vervoerden zij slechts zelden en weinig keien en dan juist bij de geringe stroomsnelheid, waarin het eenigszins leemhoudend fijn zand tot afzetting gekomen is.

De daaronder gelegen leemachtige laag heeft hare donkerbruine kleur te danken aan een hoog ijzergehalte. De zwarte kleur der laagvoegjes dezer scherp gestratificeerde afzetting wordt veroorzaakt door mangaanoxyde. Mangaanconcreties worden ook veel in secundair ontkalkte löss van Zuid-Limburg aangetroffen en men weet, dat waar ijzer- en mangaanoplossingen, bij aanwezigheid van voldoende hoeveelheden lucht, in den bodem met koolzure kalk in aanraking komen, niet slechts het ijzer, doch ook het mangaan wordt neêrgeslagen. Het is daarom volstrekt niet onwaarschijnlijk, dat de bruine leemachtige, thans mangaanhoudende laag oorspronkelijk zeer kalkrijk geweest is en als afspoelingsproduct der Zuidlimburgsche löss in het op

den Riss-ijstijd volgend interglaciaal tijdvak te beschouwen is. Deze beschouwingswijze als juist aannemend, zou daarboven dan het jonger zanddiluvium, dat in den Würm-ijstijd gevormd werd, gelegen zijn. De met betrekking tot de oudere afdeeling van het zanddiluvium dan zeer geringe dikte van het jonger zanddiluvium is in goede overeenstemming met de omstandigheid, dat tot het ouder zanddiluvium Rijn en Maas gezamenlijk, tot het jonger alleen de Maas heeft bijgedragen.

Tot eenig begrip van het ontstaan der vennen kunnen wij, behalve door het onderzoek van de geologische samenstelling van den bodem in het vennengebied, slechts geraken door tevens hunne topographie na te gaan.

Blijkbaar behooren de meertjes, of vennen in engeren zin, met de moerassige of met veen opgevulde en met de droge, op gelijke wijze als de omgeving, — bijvoorbeeld met heideplanten — begroeide verdiepingen van de bodemoppervlakte in dat gebied genetisch te zamen. Het zijn alle min of meer ronde of langwerpige, in eene bepaalde streek naar ligging en vorm karakteristiek gerichte en ook wel herhaaldelijk in gelijke richting gelobde kommen. Inderdaad bestaat er tusschen die drie soorten van kommen menigvuldige overgang en samenhang. Al deze bodemverdiepingen plegen in groepen voor te komen en in een en dezelfde groep ziet men de verschillende soorten van kommen met elkander afwisselen. Eenvoudig ten gevolge van de zeer verschillende en wisselende diepteligging van hare bodems, van de grooter of geringer vruchtbaarheid van den grond, van de verschillende opneming van lucht door het water, bij meer of minder blootstelling aan den wind en al of niet aanwezige strooming. Inderdaad hangt het van deze natuurlijke omstandigheden af of de vennen „blauw als zomerlucht" of wel moerassig begroeid en zelfs met veen opgevuld zijn.

Bijzonder opvallend is nu de groepeering van vele vennen in richtingen, evenwijdig met die van rivieren en beken, richtingen die zich ook in hunne vormen openbaren.

Men kan dit het best nagaan door de waterstaatskaart van het vennengebied voor zich uit te leggen.

Dan ziet men bedoelde groepeering en richting op de grootste schaal tot openbaring komen in de vennenreeks, waarin op een flauw gewelfden rug de venen van de Peel ontwikkeld werden.

Hoewel op aanzienlijken afstand van, en hoog boven het dal van de Maas gelegen, volgt zij, van de Belgische grens bij Weert tot bezuiden Grave, de groote Noordlimburgsche bocht dier rivier. Een veel kleinere vennenreeks met venen ligt ook aan de Oostzijde van de Maas, evenwijdig met den loop dier rivier tusschen Venlo en Afferden en, veel zuidelijker, een andere ten Oosten van Susteren en Echt.

Duidelijke scharing is ook te herkennen in de meest zuidoostelijke kleine vennenreeksen, aan de linkerzijde van de Maas, ten Westen en Noordwesten van Roermond, parallel met de algemeene noordoostelijke stroomrichting van de Neerbeek en de Maas aldaar.

Een in het oog springende vennenrichting is verder die op de eveneens flauw gewelfde strook tusschen de Astensche Aa en het Dommelbekken.

Schijnbaar minder regelmatig liggen vele vennen tusschen de beken van het bovenstroomgebied van de Dommel en de Beerze, maar ook hier openbaart zich toch plaatselijk scharing, parallel met beken. Aldus vooral bezuiden Valkenswaard, langs den wortel van de eigenlijke Dommel.

De vennen van Oisterwijk openbaren zeer duidelijk een algemeene richting van het Zuidwesten naar het Noordoosten, gelijk de stroomrichting van de Run, den Voorsten Stroom of Lei en het deel van den Achtersten Stroom of Reusel, naast hetwelk de meeste gelegen zijn. Ook in de lobben van het Choorven en het Kolkven komt die richting te voorschijn.

Ontwijfelbaar is de oorzaak van die in het oog loopende evenwijdigheid te zoeken in gelijksoortigheid van de omstandigheid, waaronder èn al deze venkommen èn beken en rivieren ontstaan zijn. Maar de ligging der eersten ten opzichte van de laatsten, op *grooten afstand*, in *hooger* terreinen, en met hunne bodems — zooals ik in eenige gevallen door waterpassing en peiling heb kunnen vaststellen — wel *dieper* reikend dan de bedden dier stroomende wateren, ofschoon deze toch nog steeds uitschuurden, is wel alleen te verklaren door aan te nemen, dat *eerst* de venkommen en daarna de beken ontstaan zijn.

Zeker zijn niet alle venkommen genetisch gelijkwaardig. Eenige liggen in het verlengde van beken of ten minste in de dalen. Voor deze kan wel aan gemeenschappelijk en gelijktijdig ontstaan

met de beken gedacht worden. Sommige andere vennen zouden door uitwaaiing in een na den laatsten zuidelijken ijstijd ontwijfelbaar geheerscht hebbenden drogen tijd kunnen ontstaan zijn. Maar ik meen, op grond vooral van die detail-topographie, dat toch andere wijzen van ontstaan dan fluviatiel uitzonderingen zijn. In vele gevallen is inderdaad de overeenkomst van vennenrijen of ook wel van enkele samengestelde vennen met deelen van oude rivierloopen onmiddellijk in het oog springend en onafwijsbaar; alleen de tusschen deze oude stukken waterloop zich verheffende en onderbrekende heuvels zijn met zulk een eenvoudig ontstaan niet wel te vereenigen. Stuifheuvels toch zijn deze zeker in de meeste gevallen niet, wegens hunne samenstelling en ook omdat zij niet beantwoorden aan de verdiepingen. Achter — dat zou dan zijn aan de lijzijde van — ondiepten en landtongen in de vennen plegen, in de heerschende richting, juist de *hoogste* toppen te liggen en de grootste diepten en wijdste deelen van de kom liggen volstrekt niet regelmatig voor — aan de loefzijde van — de hoogste en breedste heuvels. Als eenvoudig overgebleven rivierstukjes zouden deze ook niet zoo beperkt zijn tot enkele groepen, doch in de bedoelde richtingen veel algemeener gevonden worden en zouden in iedere groep de diepten niet zoo afwisselend zijn als wordt waargenomen.

Van een regelmatig oud rivierdal vindt men zelden overblijfselen, hoewel de bodems, zeker wel van vele vennen, beneden die van naburige parallele dalen reiken. Aldus in het gebied van de Neerbeek, dwars op de algemeene stroomrichting, ligt de bodem van de Heythuizer beek bij 24 M. + A. P., van het meertje den Bedelaar (in het midden) bij 23.15 M. + A. P. en van de Haelender beek bij 22.10 M. + A. P.; de bodem van de iets meer stroomopwaarts gelegen Groote of Heelder Peel (in het midden) bij 22.60 M. + A. P. en van de Haelender beek daarnaast ongeveer 2 Meter hooger. Aan de vennenzijde van de Haelender beek neemt men wel, over zekeren afstand, als *revers* van den steilrand der oudste Haelender beek, een flauw naar de vennen afhellenden valleirand waar, maar dat is volstrekt geen algemeen verschijnsel.

Blijkbaar zijn de meeste vennen wel uit oude rivierloopen, doch op zeer bijzondere wijze ontstaan, het meest waarschijnlijk op analoge wijze als vele van de meertjes, veentjes en droge

kommen, die als *Pfuhle* of *Sölle* bij honderden in de Noordduitsche laagvlakte verspreid liggen. De Duitsche geologen zijn het er nu wel over eens, deze kommen alle als onder direkte medewerking van het ijs of zijn smeltwateren ontstaan te beschouwen en vele als ontstaan door het smelten van in het zand bedolven stukken „dood ijs", welke zich van de landijsmassa, bij haar terugtrekken, hadden afgescheiden. Betrekkelijk veel talrijker dan deze incidenteel afgescheiden ijsstukken zullen nu ontwijfelbaar, in den laatsten zuidelijken ijstijd, geweest zijn de schotsen en vlotten van het drijfijs op de delta van de Maas. De verklaring van het ontstaan der venkommen uit aan den grond geraakte ijsschotsen en -vlotten heeft dan nog wel meer recht van bestaan dan de bedoelde interpretatie van de *Sölle*.

Wanneer namelijk ook over de geheele delta het water in vele, telkens verlegde takken zich heeft uitgebreid, kan toch worden aangenomen, dat in sommige standvastige, breede en diepe geulen de meeste met zand beladen en onbelaste ijsschotsen en -vlotten afdreven, zich ophoopten en vastraakten. Het laat zich dan denken, dat aldus en door zand, dat de stroom achter deze ijshindernissen moest afzetten — waardoor de heuvels benedenstrooms of aan de „lijzijde" van de vennen gevonden worden —, vele van die oude geulen over het grootste deel harer breedte met ijs en zand, plaatselijk zelfs hoog boven de deltavlakte, opgevuld werden of wel geheel verstopt raakten. Hiermede waren dan de voorwaarden gegeven voor het ontstaan van venkommen, op analoge wijze als *Sölle* in het diluvium van Noord-Duitschland, en van hen vergezellende heuvels, zoo omtrent als in den benedenloop van Siberische rivieren, van de Yoekon in Alaska en van de Sint-Laurens in Canada nog telkenjare geweldige zandophoopingen ontstaan. Ter verklaring van de evenwijdigheid der vennenscharen met tegenwoordige rivieren en beken, zij herinnerd aan de telkens waargenomen vorming van een of twee zijdelingsche waterloopen aan de Sint-Laurens en Siberische rivieren, waar ijsdammen het bij ingetreden zachter weersgesteldheid afkomende water dwingen nieuwe uitwegen te zoeken. In andere gevallen zijn vennenrijen als overblijfselen van gelijktijdige parallele takken te beschouwen.

Aan het einde van dien laatsten pluvioglacialen tijd moeten aldus de wateren op de delta zich weder in bepaalde, voor een

groot deel nieuw gevormde, takken hebben teruggetrokken. Uit deze deltatakken zijn de tegenwoordige beken en rivieren geworden.

Venen. — Vele venkommen zijn opgevuld met veen; vooral is dit het geval in de Peel [1]. Meestal, zoo niet altijd, is zeker wel de ontwikkeling van het veen uitgegaan van de venkommen. Van daar heeft het zich dan ook over de omgeving uitgebreid, maar de onderste laag is tot de venkommen beperkt, de bovenste wordt wel alleen, zonder de andere, op hooge punten der omgeving gevonden.

De onderste bestaat uit veenmodder of darg, wordt in de Peel „sleep" en „smeer" genaamd en is eene ook in Drentsche en Noord-Duitsche venen welbekende, in water ontstane — limnische — afzetting [2]. Daarop volgt, in de Peel zoowel als elders, eene laag, die vele overblijfselen van moerasplanten bevat, in de Peel vooral Seggen (*Carex*), en die zich aldus onder moerastoestanden — telmatisch — ontwikkeld heeft [3]. Zij heet in de Peel „pijpert" en beantwoordt aan hetgeen in Drente „haverstroo" genoemd wordt. Deze telmatische laag gaat naar boven over in het, onder nog weder minder natte toestanden van den bodem, semiterrestrisch, gevormde zwartveen, welke als „zwarte turf" met de daaronder gelegen turfsoorten vooral voor brandmateriaal gebruikt wordt. Tusschen de drie genoemde veenlagen bestaan min of meer geleidelijke overgangen, maar van het zwartveen is naar boven scherp gescheiden het *grauwveen*, de „vale turf" van de Peel, zoowel door zijne veel geringer dichtheid in drogen staat (die gemiddeld nauwelijks een derde van de dichtheid der zwarte turf bereikt) als door zijne kleur. Dit grauwveen levert het turfstrooisel.

Vooral in het zwartveen, onregelmatig verspreid of als laagjes van geringe uitgestrektheid, doch ook wel in het grauwveen komt het zoogenaamde „lok" of „vlok" voor, als min of meer bleeke vezelige massa's, overblijfselen van wollegrasplanten

---

[1]) Peel beteekent poel en is verwant met het latijnsche pălus voor poel, moeras. *Paludi* noemden de Romeinen de bewoners van die streken. Het Limburgsche „peel" is synoniem met „ven", dat echter meest voor kleiner uitgestrektheden gebruikt wordt.

[2]) *Limne* (Gr.) = meer.

[3]) *Telma* (Gr.) = moeras.

(*Eriophorum*). Dat deze eene bepaalde, regelmatig voorkomende zone aan den bovenkant van het zwartveen zouden vormen, gelijk in Noord-Duitschland, naar het schema van C. A. WEBER, als „Grenztorf", moet voor de Peel en ook voor Drente ontkend worden [1]). In de Peel zag ik haar nooit. Het zwartveen werd, naar de onderzoekingen van WEBER, evenals het grauwveen, hoofdzakelijk door veenmos (*Sphagnum*) gevormd, doch dit is in het zwartveen (of ouder sphagnetum) veel meer vergaan en aldus moeilijker te herkennen. Overblijfselen van heideplanten spelen in beide een ondergeschikte rol.

Verder treft men veelvuldig onder het veen, en niet alleen op de hoogere terreinen, doch ook in de kommen, overblijfselen aan van boomen, in de Peel Grove Den, Berk en Eik, als zoögenaamde „zandstobben", aldaar „zandpoesten" genoemd. Deze wortelstronken, waarnaast ook wel gevonden wordt wat van de omgevallen stammen aan verrotting ontkomen is, vertakken zich op normale wijze en met behoorlijken penwortel naar beneden in het zand. Daarentegen vindt men in of op de pijpertlaag de veenstobben van Den en Berk met zeer wijd, plaatachtig vlak uitstrijkend wortelgestel, van slechts rudimentairen penwortel voorzien. Merkwaardig is aan deze „veenpoesten", dat de stamrestanten, die naar boven min of meer spits, kegelvormig eindigen (ten gevolge van het doorrotten, juist in het niveau waar te gelijk lucht en water dit proces, na den stikkingsdood der boomen door den veenmosgroei, begunstigden) zeer algemeen sabelvormig gebogen zijn. De holle zijde, van deze kromme stamstukken is algemeen naar het Westen gericht. Men kan zich het ontstaan dier kromming niet anders voorstellen dan zoo, dat de heerschende wind krachtig en westelijk was. Niettegenstaande de verankering der boomen door de stevige, lange, vlak uitgespreide wortels, drukte de wind den stam telkens scheef, maar de top van dezen groeide toch weder loodrecht omhoog.

Bijzonder merkwaardig zijn ook de in het zwartveen voorkomende brandlagen, welbekend ook in Drente en Noord-Duitsch-

---

[1]) J. VAN BAREN, die het schema van WEBER ook op de Drentsche venen meende te mogen toepassen, kon toch slechts in 1 van MOLENGRAAFF's 3 en 2 van zijn eigen 3 profielen iets als „Grenztorf" onderscheiden.

land. Men kan ze, in verschillende, onbepaalde niveaux, niet zelden over groote uitgestrektheden, vervolgen. De worteldeelen der boomen en de daarbij aangetroffen losse stammen vindt men dan dikwijls oppervlakkig meer of min verkoold; ook kan men wortelplaten tegenkomen, die van boven litteekens vertoonen van zelfs herhaaldelijk plaats gehad hebbende brandverwonding; de wonden werden dan van de randen uit weder gedeeltelijk overwald. Aan den Heer A. Bos, directeur der Maatschappij Helenaveen, die mij herhaaldelijk in de gelegenheid stelde de veenderijen te bezoeken, heeft het Geologisch laboratorium der Amsterdamsche Universiteit ook zulk een fraaie wortelplaat met oude brandwonden te danken.

Zeer waarschijnlijk werden die voorhistorische veenbranden niet door menschenhand, doch door den bliksem aangesticht. Menschen waren toen in die streken althans zeker te zeldzaam in vergelijking met de veelvuldigheid van de bedoelde brandsporen.

De aanwezigheid van den mensch in oude veentijden herkennen wij daarentegen met zekerheid aan de zoogenaamde veenbruggen of houtwegen van Drente en Noord-Duitschland. In ons land hebben de Valther brug en de Buiner brug groote bekendheid gekregen. De meeste veenbruggen liggen onmiddellijk onder, in, of boven de grens van de zwarte en de grauwe turf. Daar omstreeks het begin onzer tijdrekening de legers der Romeinen van de door hen *pontes longi* genoemde veenbruggen gebruik hebben gemaakt en vele, naar hun constructie, alleen door een hoog georganiseerd volk kunnen zijn aangelegd, zouden deze, naar de heerschende meening, ongeveer tweeduizend jaar oud zijn. Slechts enkele zouden dan ouder, vóór-Romeinsch zijn, enkele andere zijn zeker middeleeuwsch. Het is evenwel zeer goed mogelijk, dat de door de Romeinen gebruikte en te voren wel in orde gebrachte *pontes longi* reeds lang voor hunnen tijd bestonden. Door de onderzoekingen van CONWENTZ weet men, dat eene veenbrug van oogenschijnlijk Romeinsch karakter, aan de grens van Oost- en West-Pruisen (20 K.M. ten Zuiden van Elbing, bij het Frische Haff), eenige eeuwen voor het begin onzer tijdrekening door een Germaanschen volksstam, waarschijnlijk Gothen, moet zijn aangelegd. Ook beschreef PREJAWA eene veenbrug, in Oldenburg, (zijn n°. VI), die naar haar karakter echt Romeinsch, toch midden in het grauwveen gelegen is.

De houtweg bij Buinerveen daarentegen ligt, volgens VAN GIFFEN 0.9 tot 1.0 M. onder den bovenkant van het zwartveen.

Dat alles geeft grond aan de meening, dat de vorming van het grauwveen *vroeger* begonnen is dan 2000 jaar geleden.

Ook vele andere feiten zijn niet wel te vereenigen met den aldus gelimiteerden ouderdom. De scherpe begrenzing van het zwartveen ten opzichte van het grauwveen, welks vorming nog in onzen tijd voortgaat, bewijst dat de natuurlijke omstandigheden waaronder de vorming van het grauwveen plaats had, gelijk waren aan de tegenwoordige, maar bewijst tevens, dat de vorming van het zwartveen — niettegenstaande gelijke plantentypen als het grauwveen hebben opgebouwd daarbij werkzaam waren — onder eenigszins andere uitwendige omstandigheden heeft plaats gehad, of wel, dat deze *tijdelijk*, vanaf bedoeld tijdstip, gewijzigd waren, waardoor het ouder sphagnetum, dat oorspronkelijk geheel het voorkomen had van grauwveen, tot zwartveen veranderd werd.

Dit laatste is de voorstelling van C. A. WEBER, waarbij zich velen hebben aangesloten. De „Grenztorf", met veel wollegras- en heideplanten-overblijfselen, zou dan in dien tusschentijd ontstaan zijn. Inderdaad laat het zich goed denken, dat in een tijdelijk droger klimatischen toestand het oude sphagnetum kan zijn uitgedroogd en, aldus voor lucht meer toegankelijk geworden, in zwartveen veranderd werd. Immers iets dergelijks neemt men waar als gevolg van ontwatering van venen. De bedoelde droge tusschentijd zou, met het begin van onze tijdrekening ongeveer samenvallende, 2000 jaar achter ons liggen. Maar er zijn geen onomstootelijke bewijzen voor het bestaan van zulk een drogen tijd; integendeel is nu wel afdoend aangetoond, o. a. door LEO BERG, dat omstreeks het begin onzer tijdrekening de klimatische toestanden gelijk waren aan de tegenwoordig heerschende. Is dus de voorstelling van WEBER juist, dan moet een veel vroegere droge tusschentijd worden aangenomen.

In de andere voorstelling past de tijdsduur van tweeduizend jaar ook niet voor de vorming van het grauwveen, daar eene plotselinge wijziging van de klimatische omstandigheden, die omstreeks 2000 jaar geleden zou hebben plaats gehad, uit niets gebleken is.

Toch is uit de samenstelling der venen veel leering te trekken

voor de beoordeeling van de klimatische toestanden gedurende de tijdsruimte hunner ontwikkeling.

Om te beginnen kunnen wij aannemen, dat, toen op den bodem van venkommen boomen groeiden, welker overblijfselen nu als zandstobben, onder limnische, telmatische en semiterrestische veensubstantie, die de venkommen opvult, worden aangetroffen, een droger klimaat dan het tegenwoordige moet geheerscht hebben. Wij kunnen ook eenigszins nagaan in welken geologischen tijd dat geweest is. De gemiddelde dikte en de gemiddelde dichtheid van al het veen onder het grauwveen zijn zoodanige, in vergelijking met die van deze bovenste laag, welker ouderdom wij op meer, doch wel niet veel meer dan twee duizend jaar kunnen stellen, dat zeer wel het geheel zich in een dergelijk tijdsbestek als twaalf duizend jaar of eenige duizendtallen meer kan ontwikkeld hebben. Twaalf duizend jaren verliepen namelijk, naar de zekerste schatting, van DE GEER, sedert het eind van den laatsten ijstijd in Scandinavië. Het is dan wel geoorloofd aan te nemen dat de dennen, berken en eiken der zandstobben op den bodem van vele vennen groeiden aan het eind van den laatsten ijstijd en dat destijds het klimaat droger was dan het daarna ooit geweest is. Want eene terrestrische vegetatie heeft daarna slechts voorbijgaand voet kunnen vatten, toen de dennen en berken der veenstobben op het omhoog gegroeide moerasveen gunstiger voorwaarden vonden dan de moerasplanten zelven. WEBER en de meeste andere onderzoekers achten het, ter verklaring van de veenstobbenlagen, niet noodig seculaire veranderingen van het klimaat aan te nemen. Tot aan het grauwveen zijn, volgens WEBER, alle lagen onder gelijke klimatische omstandigheden ontstaan.

Het postglaciale droge klimaat, waaronder de boomen der zandstobben groeiden, kan aan soortgelijke toestanden, als die welke het steppenklimaat aan den omtrek van het landijs in zijn grootste uitbreiding veroorzaakten, worden toegeschreven. Mogelijk hebben na het afsmelten van het laatste landijs in Scandinavië, gedurende den zoogenaamden *Littorina*-tijd, toen de Oostzee uitgestrekter en vermoedelijker iets kouder was dan tegenwoordig, veelvuldiger oostenwinden dan tegenwoordig dat droog klimaat veroorzaakt. Het is evenwel waarschijnlijker dat de aan de veenontwikkeling onmiddellijk voorafgaande droge tijd samenvalt met het zoo-

genaamd *Ancylus*-tijdperk, toen de Oostzee in den toestand van een groot, afgesloten zoetwatermeer verkeerde en in Scandinavië nog over een niet onaanzienlijk oppervlak zich landijs uitstrekte. Neemt men dit laatste aan, dan wordt het begrijpelijk hoe die terrestrische toestand door een limnische vervangen werd: De van den Atlantischen Oceaan komende regenbrengende luchtwervels konden namelijk, gedurende het afsmelten van dat ijs, allengs meer de tegenwoordige noordelijke banen volgen, en er moet dan een tijd geweest zijn, dat die regenbrengende depressies meer dan tegenwoordig over Nederland en Noord-Duitschland hun weg namen. Dit kan vele droge kommen in het vennengebied tot meertjes gemaakt hebben, waarin het limnisch veen, de darg, zich vormde. Als de groote vochtigheid van het klimaat dan weder voorbij ging, ontwikkelde zich eerst telmatisch- of moerasveen en toen dit zijn hoogtegrens bereikt had, doordien de moerasplanten door de dikke veenlaag belemmerd werden, hun levenselement het bodemwater te bereiken, het semiterrestrisch sphagnetum of mosveen, plaatselijk wel voorafgegaan door boomvegetatie. Waarschijnlijk was in Noord-Duitschland de atmospherische watervoorziening van het ouder sphagnetum iets minder gunstig dan in de Peel, waardoor aldaar de veenmosvegetatie meer afhankelijk van het grondwater was en bij het omhoog groeien zich eindelijk veelal een „Grenztorf"-vegetatie ontwikkelde, met veel wollegras en heideplanten, in de Peel niet.

De scherpe onderscheiding van dit sphagnum-veen in een oudere en een jongere laag, het zwart- en het grauwveen, is geographisch beperkt tot Nederland, Denemarken en een groot deel van Noord-Duitschland. In de venen van het meest oostelijk gedeelte van Duitschland ontbreekt, gelijk elders in Europa, zulk een scheiding. Het door de klassieke beschrijving van Weber bekend geworden veen van Augstumal in de Memel-delta behoort, chronologisch, geheel tot het bovenste sphagnetum. Andere venen zijn veel ouder, maar het scherp en regelmatig onderscheid van een jongere en een oudere laag komt buiten het bedoelde gebied niet voor.

Het ligt voor de hand, de oorzaak van deze geographische beperking ook in een geographisch beperkte verandering van het klimaat te zoeken, die alsdan zeker meer dan tweeduizend jaar geleden heeft plaats gehad en waardoor de tegenwoordige toestand ontstaan is.

Algemeen is in dat geographisch gebied voorhanden het opvallend onderscheid en de scherpe scheiding van het ouder- of zwart veen en het jonger of grauwveen. Daar de veenmossen, welke deze lagen gevormd hebben, biologisch van andere planten afwijken, doordien zij van andere dan klimatische levensvoorwaarden vrijwel onafhankelijk zijn, kan die tweedeeligheid wel alleen door eene verandering van het klimaat verklaard worden. De Veenmos- of Sphagnum-soorten hebben de zeer bijzondere eigenschap, dat zij door cellen in de bladeren, welker wanden van gaatjes voorzien zijn, iederen regendruppel en vooral ieder nevelbolletje dadelijk opzuigen en vasthouden. Zij zuigen zich aldus telkens vol als een spons en kunnen tamelijk lang van het water, dat de groene cellen aan de watercellen ontnemen, leven. Zij kunnen dus alleen bij behoorlijke vochtigheid van het klimaat gedijen en daar het water in het midden van het veenmostapijt het best bewaard blijft groeit het veen daar ook het snelst en vertoont een horlogeglasvormige welving. Vandaar dat men de Sphagnum-venen *hooge venen* of *hoogvenen* genoemd heeft, in tegenstelling met de uit andere planten gevormde, vlakke *laag-* en *moerasvenen*. Vele hoogvenen hebben zich op laag- en moerasvenen ontwikkeld. De behoefte der veenmossen aan minerale voedingsstoffen is gering; dat bewijst hun laag aschgehalte. Zij ontvangen daarvan genoeg uit de lucht. Maar ook in hunne stikstofvoeding voorziet de atmosfeer. Gelijk de in de vochtige heiden der hoogveenstreek en op het hoogveen zelf thuis zijnde Zonnedauw haar stikstofvoedsel ontleent aan insekten, welke de plant vangt en het Bláaskruid der veenplassen aan kleine schaal- en andere waterdiertjes, welke het in fuikvormige blaasjes opsluit, kan men zeggen, dat de Veenmossen vooral door de opgevangen nevelbolletjes in hun stikstofvoeding voorzien. Dat deze niets te wenschen overlaat bewijst de schitterend smaragdgroene kleur van het groeiende hoogveen. In het veenlandschap zijn nevelvormingen, vooral in den herfst en den winter, de hoofdgroeiperiode van de veenmossen, bijzonder veelvuldig en uit vele onderzoekingen is gebleken, dat in het nevelwater gemiddeld 3 maal meer stikstofverbindingen zijn dan in het regenwater. In enkele monsters van door mij in de Peelstreek opgevangen nevel- en regenwater vond Dr. C. Blomberg nog belangrijk sterker verhouding. De waterbolletjes, miniem kleine druppeltjes

waaruit de nevel bestaat, vormen zich inderdaad voor een groot deel om kernen van stikstofverbindingen (vooral ammoniak). Ook draagt wel de rook onzer vuurhaarden, lokomotieven, enz., veel tot de nevelvorming bij — men kan dat door den reuk in de veenstreken waarnemen — en daar die rook veel zwavelverbindingen bevat, kan aldus wel het hoog zwavelzuurgehalte van veenwater verklaard worden.

Wat wij van de biologie der veenmossen weten doet ons aldus aannemen, dat het een plotseling ingetreden verandering der vochtigheid van het klimaat moet geweest zijn, waardoor in de kustlanden ten Oosten van de zuidelijke helft der Noordzee het door gelijke planten in den grauwveen- en tegenwoordigen tijd gevormde veen zich in een zoo geheel anderen toestand bevindt als dat van den zwartveen-tijd. In eens is het — laten wij zeggen drie duizend jaar geleden; het kan nog iets vroeger geweest zijn — blijkbaar *vochtiger* geworden. Dat het in den zwartveentijd droger was bewijzen de herhaaldelijk gewoed hebbende veenbranden, en uit het feit, dat daarna toch telkens weer de veenmossen konden gedijen blijkt dat deze droogte periodiek was. Ook in onzen tijd zijn in den zomer de veenstreken droger dan in de overige jaargetijden en in meerjarige periode keeren droge zomers terug. Deze tijdelijke veranderingen moeten bij algemeen geringer vochtigheid van het klimaat veel grooter beteekenis gehad hebben. Daardoor kan dan ook telkens het veen uitgedroogd, en ten slotte in den meer verganen toestand, dien het zwartveen vertoont, gekomen zijn.

Wij hebben dus nu om te zien naar meer directe bewijzen voor het intreden eener geographische verandering, waardoor in bedoeld gebied het klimaat plotseling in zijn tegenwoordigen vochtigheidstoestand gekomen is.

Die meer directe bewijzen levert ons de geologische geschiedenis der Nederlandsche **zeeduinen**, in het bijzonder van het gedeelte dat ik zou willen noemen onze *zuidelijke* of *blonde* zeeduinen, in onderscheiding van de *noordelijke* of *witte* duinen der noordelijke helft van het Noordhollandsche vasteland en den eilandenboog aan den ingang der Zuiderzee. Laatstbedoelde duinen zijn blijkbaar ouder, uit door de Noordtijstroomingen aangevoerd bleekzand van de Doggersbank en omgeving opgebouwd, in een tijd toen de zuidelijke duinen nog niet bestonden. Bleek, dat wil zeggen

ijzerarm, is het zand aldaar ook op groote diepte onder de duinen, en tevens veel kalk- (schelpen-) armer dan de zuidelijke duinen.

Deze rusten, in hun geheele breedte, op strandzand met schelpen, en daar de jongste diluviale laag vele meters dieper dan deze basis der duinen gelegen is, dateeren zij van geruimen tijd na het diluvium. Eenig oordeel omtrent het tijdstip van het begin hunner vorming kunnen wij verkrijgen uit de beschouwing van bedoeld strandvlak. Dat dit ter breedte van wel 5 K.M. nooit *te gelijker tijd* strand kan zijn geweest blijkt vooral ook uit de afhelling, die het niet zeewaarts, doch *landwaarts* vertoont. Uit honderden boringen en ingravingen kon worden vastgesteld, dat die helling een bedrag van 3 tot 4 meter bereikt; zooveel lager liggen de hoogste schelpenbanken onder de duinen aan de landzijde dan nabij de zee. Men kan dat verschil in hoogteligging niet wel anders verklaren, dan door aan te nemen dat de duinvorming aan de landzijde begonnen is en zich zeewaarts heeft voortgezet, terwijl te gelijker tijd de bodem daalde. Onder de oudste duinen moet dan het strand zooveel verzakt zijn als sedert hunne vorming de bodem gedaald is.

Naar de peilschaalonderzoekingen van RAMAER kan, als men daarbij in aanmerking neemt de door periodieke klimatologische oorzaken teweeggebrachte veranderingen van het zeeniveau, de daling van den bodem in de duinstreek op circa 10 c.M. per eeuw gesteld worden. Voor den ouderdom der duinen vindt men aldus drie- tot vierduizend jaar. Evenals de voor den ouderdom van het grauwveen berekende tijdsduur is ook deze, naar den aard der gegevens, slechts als een benaderende schatting te beschouwen. Aan de gevonden overeenstemming kan intusschen wel beteekenis worden toegekend, indien er verband blijkt te bestaan tusschen het begin der grauwveenvorming en het begin der duinvorming.

Dit verband nu bestaat, naar ik meen, werkelijk. Hadden getijdenstroomen uit het Noorden, van bezuiden Texel's vaste diluviale kern en van Texel zich langs verderen diluvialen grondslag in den naar buiten afgeronden boog der tegenwoordige eilanden voortzettend, reeds veel vroeger de *witte duinen* opgebouwd, zoo begon eerst drie- of vierduizend jaar geleden een plotselinge afdamming van het zuidelijk deel der oude stille zeebocht, die gedurende zeer langen tijd de plaats had ingenomen van het tegenwoordige Nederlandsche laagland en de Zuiderzee. De ge-

beurtenis, welke tot die plotselinge afsluiting aanleiding gaf, kan geen andere geweest zijn dan de doorbraak der landengte van Calais-Dover, de opening van het Nauw van Calais. Nu werd het, als afslag van ongetelde eeuwen in het Engelsche Kanaal en de Noordzee neergezette zand door de zeestroomingen uit het Zuiden mobiel gemaakt en tusschen de beide vaste punten, de krijtrotsen van Calais en de diluviale kern van Texel, die als twee hoofden aan de zuid- en aan de noordzijde van de oude Nederlandsche zeebocht lagen, werd in vloeiende lijn, welker verlenging door den reeds bestaanden noordelijken duinhaak ging, de boog uitgespannen van wat de eerste gesloten duinketen worden zou.

Dan werden geleidelijk de gesloten duinen zeewaarts uitgelegd. Er zijn geen bewijzen van een algemeene tijdelijke onderbreking in die duinvorming, want in het middelste stuk der duinen van het vasteland, dat nog heden aangroeit, is de helling van het oude strandvlak, de algemeene basis der duinen, zeer gelijkmatig, zooals het geval moet zijn bij geleidelijke daling van die basis en geleidelijke aanwas naar buiten van de duinen daarop. Aan het voorkomen van tal van ondergestoven duinvlakten, vooral in de landzijde-helft der duinbreedte, een lang bekend feit, kan niet het recht ontleend worden om zulk een tijdperk van stilstand in de duinvorming aan te nemen. Ook tegenwoordig toch treft men tal van sedert menschenheugenis bestaande duinvlakten, en de meeste en best begroeide, in de oostelijke helft der duinen aan; de nabijheid van de zee is en was voor de begroeiing en dus voor humus- en veenvorming niet gunstig. Evenwel nadert in het midden van de duinketen van Hollands vastland een enkele veenlaag de zee tot dichter dan 1000 meter en in het noordelijk (afnemend) stuk komt een uitgestrekte veenlaag op het strand aan den dag. De ondergestoven humus- en moerasveenlagen van oude duinvlakten liggen op zeer verschillende niveaux en vormen volstrekt geen doorloopende of zelfs maar algemeene zone, hetgeen wel het geval zou moeten zijn, waren zij in eene periode van algemeenen stilstand der duinvorming (als wel ondersteld is geworden) ontstaan. De veen- en humuslagen zijn blijkbaar van verschillenden tijd, doch ontwikkeld in soortgelijke duinvlakten als de tegenwoordige. Dat onder die veen- en humuslagen niet zelden het zand over eenige decimeters dikte gebleekt en ontkalkt is en daaronder tot een zandoerlaag verhard — een

ook in vele buitenlandsche duinen waargenomen verschijnsel — mag niet als een kenmerk van bijzonderen en hoogen ouderdom beschouwd worden. Hetzelfde proces van uitlooging door humuszuren is op vele heiden, vooral ook in het vennengebied, bijna onder iederen voetstap aan te treffen en kan daar, in niet zeldzame gevallen, onmiskenbaar van recenten datum, immers door menschelijk toedoen ontstaan, zijn. Onder een, 60 jaar geleden gemaakte greppel, bijvoorbeeld, heeft de daarin uit mos en bladeren gevormde humus bleekzand en zandoer doen ontstaan. Evenmin kan met reden beweerd worden, dat oudere en aan de landzijde gelegen duinen zich *algemeen* door gelijke kalkarmoede onderscheiden.

Een vertikale bouw der zeeduinen, die zou beantwoorden aan de vertikale tweedeeling van het sphagnetum der hoogvenen, welke in de duinen gelijk in de venen zou zijn teweeggebracht door een droge tusschenperiode met oostenwind, die hier de duinvorming, ginds de veenvorming tijdelijk deed stilstaan, kunnen wij derhalve niet met eenig recht aannemen.

Er is daarentegen alle reden om aan te nemen, dat met de opening van het Nauw van Calais niet slechts de zuidelijke duinen zich zijn gaan vormen, maar te gelijker tijd de veenvorming sterk begunstigd is geworden. Uit de onderzoekingen van VAN DER STOK is gebleken, dat vooral gedurende de maanden van September tot Februari (dat is juist de voornaamste groeitijd der veenmossen) de temperatuur van het noordzeewater nabij onze kust belangrijk hooger is dan op het land. Dit moet westelijke windrichtingen bevorderen en het landklimaat vochtiger maken, in vergelijking met den toestand toen de Noordzee in het zuiden, bij Calais, was afgesloten en alleen met de kouder noordelijke zeeën in open verbinding stond. Het valt wel niet te betwijfelen, dat door de opening van het Nauw van Calais het klimaat van Nederland, noordwestelijk Duitschland en Denemarken vochtiger geworden is, waardoor zoowel de conserveeringsals de groeivoorwaarden der Veenmossen permanent beter werden en de grauwveenlaag kon ontstaan; maar te gelijker tijd werden door die gebeurtenis de eerste zuidelijke duinen aangelegd en een haf gevormd, waarin zich veen ontwikkelde.

W. G. C. BIJVANCK.

SPINOZA EN MOLIÈRE.

THEOLOGISCH-POLITISCH TRACTAAT en TARTUFFE.

(Uittreksel uit een voordracht gehouden op 20 December 1916.)

De namen van deze tijdgenooten staan ongetwijfeld op een verren afstand van elkander. Zoo plaatsen zij zich ten minste in ons vizier naar de gewone beschouwing. De vraag is echter of niet werk van den een door vergelijking licht zal geven aan werk van den ander, wanneer wij, ons los makend van de uiterlijke voorstelling, het type van de actie zooals MOLIÈRE haar schept, gaan meten aan het voortbrengsel van SPINOZA.

Wij verkeeren hier dus niet in het gebied van den *uiterlijken*, maar van den *innerlijken* vorm.

Toch wil ik eerst op eenige uiterlijke punten van overeenkomst wijzen tusschen den *Tartuffe* van den Franschen blijspeldichter en den *Tractatus theologico-politicus* van den Hollandschen wijsgeer, want zonder eenig reëel houvast loopt men gevaar zijn gedachte in het vage te doen opgaan.

Beide, *Tractatus* en *Comedie*, zijn zeer diep overlegde stukken geweest, geschreven in meesterschap: de volledige uitwerking van het plan heeft niet alleen de schrijvers ongeveer een gelijke ruimte tijd, maar ook ongeveer dezelfde jaren bezig gehouden (1665—1670). Dezelfde strooming van den tijd heeft op de gedachte van twee denkers ingewerkt.

Is dan het product van den een een drama en van den ander een politiek philosofische verhandeling, zij gelijken hierin op elkander dat zij voor een dadelijk doel zijn geschreven: het

komische drama houdt de maatschappij van den dag den zedespiegel voor, maar ook de *verhandeling* heeft een bepaalde strekking ingrijpend in het maatschappelijk en staatsleven van die dagen. Het *Tractatus* van SPINOZA heeft wel een omvattenden inhoud, men heeft er zelfs in gevonden de grondslagen van de moderne Bijbelkritiek, de drift van het geheel bemoeit zich echter om de vraag *van de orde in den staat* en *de machten die de orde verstoren*.

HUME heeft het, in de volgende eeuw, zeer gelukkig uitgedrukt toen hij, handelend over de beroering door geestelijken in de wereld gebracht, *van de mannen*, sprak, *die gevonden hebben waarnaar Archimedes zocht*, nl. *een standpunt buiten de aarde waarmede zij de aarde in beweging konden brengen*. Als bondgenoot van JOHAN DE WITT, maar ook in zijn eigen recht als uitgestootene uit de Jodengemeenschap, heeft SPINOZA in zijn *tractaat* den waan bestreden van een geestelijkheid, die krachtens een hooger recht en een hemelsche opdracht haar oordeel wilde uitspreken over wetten en instellingen van staat en samenleving, hij heeft daartoe de Bijbelboeken ontleed, en de hooge aanspraken onder het licht der redeneering tot hun eenvoudigsten vorm herleid. Dat alles in een levendige voorstelling, prikkelend van satire en bittere wijsheid, op een manier die meer doet denken aan Romaanschen dan aan Germaanschen stijl (SPINOZA van afkomst is Spanjaard). Hierdoor komt ook uiterlijk veel voor wat den wijsgeer doet toenaderen tot den comicus.

De hoofdzaak echter voor de vergelijking moet blijven het type van de actie.

Voor MOLIÈRE is dat de handeling van den *schijnheilige*, die onder het dek van vroomheid zijn eigen belangen dient en door de verheffing van geestelijke waarden, eenzijdig, de orde van het burgerhuishouden verstoort, ja, den staat aantast omdat hij de burgers te gronde wil richten. Zoover dringt de beroering door, dat alleen *de opperste staatsmacht* haar weerstand kan bieden.

Het is dezelfde gang en het zijn dezelfde wezenstrekken in het *Tractatus*. Daar is het de profeet van het O. Testament voortlevend in de strenge predikanten die het geregelde gezag niet tot rust laat komen: ook daar moet de arm van den machtige te hulp worden geroepen. Wij zien haar onder andere maskers in onze Republiek dan in het Frankrijk van LODEWIJK XIV, maar het is dezelfde wereld.

Zoo trekken wij onze conclusie.

In het gelijktijdige verschijnen van *Tractaat* en *Comedie* zien wij een voorgevoel van een tijd van geestelijke reactie; zij komt nader in de jaren na 1670, in 1680 is zij reeds doorgebroken. In Holland gaat zij gepaard met strenge kerkelijke censuur en onderdrukking van vrije gedachte, in Frankrijk met de niet meer verafliggende terugroeping van het *edict van Nantes* en de *dragonnades.*

Analogieën als tusschen *tractaat* en *comedie* bewijzen de algemeenheid van de gedachtengolven die over West-Europa gaan.

W. VAN DER VLUGT.

DE OUDE ATHENERS EN WIJ.

(Voordracht, gehouden op 21 Februari 1917.)

D. & H., Ter voldoening aan het gewaardeerde verzoek, dat tot mij kwam van directeuren dezer, ook mij dierbare, stichting, heb ik een onderwerp gekozen, waaraan ik den titel geef: „De „oude Atheners en wij''. Ik wilde, namelijk, gaarne U den indruk doen deelen, dien studie der Helleensche oudheid bij toeneming op mij heeft gemaakt: dat Athenae in de anderhalve eeuw tusschen Themistokles en Demosthenes onder ettelijke opzichten een leerzaam spiegelbeeld geeft te zien van wasdom en gesteldheid onzer eigen samenleving.

Tweeledig is, over het algemeen, het geheel der kenmerken, bruikbaar ter bepaling van het groeitijdperk, waarin zich eene gegeven maatschappij bevindt: de stand van haar geestelijk en van haar volkshuishoudelijk leven. Wat de ons omringende wereld haar vergelijkenderwijs nieuwerwetsch stempel opdrukt, het is, éenerzijds, een wijdverbreid besef der geesten van te zijn ontgroeid aan geloofsvoorstellingen, waarin zij vroeger rust hebben gevonden, te moeten zoeken naar een herzienen kijk op wereld en leven, meer strokend met hunne gewijzigde behoeften; en het is, daarnaast, die eigenaardige verschuiving in het stoffelijk volksbestaan, te wier gevolge het landbouwbedrijf, de kostwinning uit den voorvaderlijken tijd, al meer en meer wordt overvleugeld door de twee jongere takken van rijkdomsvoortbrenging: handel en nijverheid.

Welnu, zoo van de éene als de andere dier twee bewegingen

vinden wij in het tijdperk, dat ik zooeven afbakende, ook het Atheensche leven vol. De beschikbare uren vergunnen mij niet, helaas! eerst iets te zeggen over het pogen tot vrijmaking der gedachte. Ik moet terstond en bij uitsluiting uwe aandacht vragen voor de wijze, waarop gelijktijdig de volkshuishouding en het maatschappelijk leven zich vernieuwden. Daartoe ga ik dan nu over.

Tot aan de Medische oorlogen, het begin der 5e eeuw vóór onze jaartelling, vertoont ons Attika het beeld van een landschap met eene opkomende hoofdstad nabij de zee, maar toch voorshands nog minder van de stedelijke bedrijven, koophandel en ambachten, dan veeleer van landbouw zich geneerend. Macht en aanzien berustten daarom bij de bezitters van den grond, de „lieden van goede familie" — zoo noemden zij zich zelven —, de „jonkers", gelijk wij thans hen betitelen zouden. Zij woonden het grootste deel des jaars op hunne goederen, door het vlakke middelstuk van Attika verspreid. Een korter tijd verbleven zij in hunne stadswoningen, die, rondom den voet der burchtrots, de nauwe kromme straten belijnden der deftige wijk. Hun vooral had de aanvankelijke opkomst der stad-bij-het-zeestrand winst gebracht. Want zij verschafte hun eene markt, waar zij de overschotten van hun oogst voor geld konden kwijt raken. Eene winst, intusschen, die de gezondheid van het samenleven ten platten lande niet bevorderde. Hoe meer toch de heer op het groote huis zijne voortbrengselen teelde voor den uitvoer, te minder was er allengs sprake van zijne oude, aartsvaderlijke mildheid jegens den kleinen buurman, mildheid met overtollig zaaikoren, of met een stuk jong vee, dat den arme kon schadeloos stellen voor het zijne, plotseling verloren. Een vroeger nooit gezien verschijnsel kwam het leven op Attika's platteland binnen: het „interest" bij geldleening. En een „interest", dat te hooger kon zijn, naarmate de winsten, gemiddeld op de Atheensche markt te behalen, nog grover plachten te wezen. Dat alles kweekte in 's jonkers hart een ongemoedelijken geest van „zaken doen": eene stemming, eene gezindheid, die ook op de verhoudingen binnen'shuis tot vrouw en kroost en knechten een stempel drukte van hard, inhalig meesterschap. Naast den stand der jonkers noem ik nog twee andere groepen uit de bevolking van het landschap. Vooreerst: de karre-boeren, kleine lieden, maar

die ten minste op een gedoetje zaten, dat voor zijne bewerking een trekdier vergde. En dan: de allerarmsten in grondbezit, deels keuterboertjes, een schamel stuk brood ontwringend aan den dorren grond, daar, waar de vruchtbare vlakte eindigde en het schrale heuvelland begon, deels strandbewoners, wien de zee een bestaan verzekerde met kustvaart en vischvangst, en op wie inzonderheid, de groeiende hoofdstad bij toeneming hare aantrekkingskracht oefende. Het spreekt wel van zelf: die „kleine „luyden", hoe dichter zij in de buurt der groote grondbezitters woonden, hadden een te zwaarder strijd te strijden, om staande te blijven in de mededinging en zich te houden buiten de grijpklauwen hunner winst en woeker bejagende geburen. Nogtans: een deel van hen maakte zich — en gevoelde dat — steeds meer van het jonkerdom onafhankelijk. Dat waren de kustvaarders en visschers langs het strand, maar bovenal de bouwers, reeders, bevrachters en optakelaars der schepen, de houders van herbergen en werfkantoren voor matrozen in de drie stranddorpen, die eerlang de beroemde havens van Athenae zouden worden, kortom: zij allen, wien de steeds tieriger zeevaart een bestaan verschafte. Sinds dien viel wrijving, strijd eerlang tusschen de machthebbers van dusver en de opkomelingen, die zich voelden, niet te vermijden. De honderdvijfentwintig jaren, die de Medische oorlogen voorafgingen, waren er vol van. Solon's gelegenheidswetgeving was een pogen om de strijdende machten te verzoenen, de „tyrannis" van Peisistratos en zijne zonen eene rustpoos in den kamp, naardien de twee partijen, strijdensmoê, zich tijdelijk schikten onder het gezag van een „redder" des gemeenen lands. Totdat de inval van den Perzenkoning eene kentering bracht, waardoor voor goed de oude machtsverhoudingen werden omgekeerd, het onderste boven kwam en het bovenste onder geraakte.

Gij weet, voor welke keuze de nadering des vijands, de toebereiding tot zijn afweer het volk van Attika plaatste. Landoorlog? of zeeoorlog? dat was de tweesprong. Het was, voor wie haar hadden te beslissen, natuurlijk, eene vraag van krijgsbeleid. Voor ons echter was het in zijne gevolgen tevens een besluit van maatschappelijke strekking. Zou men, om de zee, de kostgeefster der stedelingen, open te houden, het platteland, de bezittingen der jonkers, prijsgeven? Of voor het minst eene poging

doen om die goederen voor vernieling te bewaren? Onder de leiding van Themistokles werd in den eersten zin beslist. Het platteland bleef tegen Xerxes' scharen onverdedigd; landhuizen, akkers, ook de zoo kostbare olijven-plantaadjes, die minstens 40 jaren noodig hadden, om weer hersteld te worden in hun vorigen staat, de Pers maakte alles tot eene wildernis. De vloot echter, op wier uitrusting en bemanning Athenae hare volle kracht had saamgetrokken, veegde niet slechts de zee van Perzen schoon, maar werd eerlang ook het middel om Attika's koopvaarders te bevrijden van hunne geduchtste mededingers in den Saronischen zeeboezem: de Aegineten.

Het was voor het jonkerdom een onherstelbare slag. Hoezeer het platbranden harer grondbezittingen ettelijke der „goede fa„miliën" had verarmd, laat daarvan éen als voorbeeld dienen. Neemt Aristeides. Hij was vóór den oorlog een rijk man geweest, bezitter van heel wat land onder Phaléron. Zelfs had hem zijn vermogen in staat gesteld om kostbare tooneelvoorstellingen te betalen uit zijne beurs. Na 480 evenwel was het met die heerlijkheid gedaan. En daar hij nog niet er aan denken kon, zijn fortuin te herstellen met oorlogswinsten, als eerlang in de dagen van Kimon in zwang kwamen, stierf hij, 13 jaar later, in armoede. Hij moest begraven worden op staatskosten. Zijne dochters kregen, bij haar huwelijk, een bruidschat uit de openbare kas, Lysimachos, zijn zoon, werd van staatswege geholpen aan een hoefje van 10 hectaren. Toch kwam het geslacht er niet meer boven op. Omstreeks 310 ontmoette Demetrios van Phaléron een afstammeling van Aristeides „den rechtvaardige". De stumper verdiende den kost, als droomuitlegger!

Evenals de groote grondeigenaars, beleefden ook de „karre„boertjes" terstond na den inval der Perzen een zwaren tijd. De verre krijgstochten, zoo spoedig volgende op het verlies ook van hun have en goed, lieten hen niet op adem komen. Terwijl het schamele deel, dat den zwaar gewapenden soldaat werd toegewezen uit den buit, wel allerminst hem zijne verliezen en zijne offers vergoedde. Hooge uitzondering, o zeker, was het jaar, waarin men op de gedenkzuilen der „Pottebakkerswijk" niet minder dan 177 namen had te schrijven van gevallenen uit eene enkele der 10 „phylen" (kantons) waarin Attika was ingedeeld. Doch ook de gemiddelde verliescijfers dier klasse waren zeer gevoelig.

Zoo niettemin de middelgroep zich wist staande te houden, het was dank zij haar vermogen om zich te schikken in den nieuwen toestand. Toen de aanwas van de kapitaalsmacht der stedelingen op allengs grooter schaal den invoer vergunde van koren uit den vreemde, liet de „karreboer" den, onprofijtelijk geworden, graanteelt varen, om zich bij voorkeur toe te leggen op den kweek van de beroemde Attische vijgen en bovenal op honingwinst. Was het wegens de aanhoudende zorg, welke die fijnere bedrijven van hem vergden? Hoe het zij, het gros van hen, die de trouw bewaarden aan het landleven, sloot meer en meer zichzelf van deelneming aan wat er in de stad gebeurde uit. Voortaan kwamen de meesten nog slechts voor de Dionysische feesten naar Athenae, om te genieten van hoe hunne lievelingsdichters de staatsknutselaars aan de kaak stelden, wien, ondertusschen, hunne lakschheid maar altijd door het heft in handen liet.

Eene minderheid der karreboeren zocht tegen hare verliezen op den graanbouw eene toevlucht in stedelijke winkelnering of ambachtsoefening. Dus, bijvoorbeeld, het echtpaar, dat Sokrates het leven schonk. De man, Sophroniskos, won den kost met beeldjes snijden voor den huislijken eeredienst zijner klanten. En als de verdiensten wat traag vloeiden, ging moeder de vrouw uit bakeren. Talrijk echter waren zulke voormalige boertjes onder de stedelingen nooit. Want het teveel dier middelklasse op het land werd regelmatig gespuid, als kolonisten, naar verbeurd verklaarde grondstukken in veroverd gebied.

Waren dus de stadsfamiliën van karreboersche afkomst nooit zeer vele, des te sterker was de vloedgolf der armsten, der keuterboertjes uit het heuvel- en bergland, der visschers uit de kuststreek, die eerlang Athenae overstroomde. Toen, na Plataeae, Kimon jaarlijks zee koos met een honderdtal „driedekkers", waren daarvoor duizenden roeiers noodig. De strandkantons alleen konden zooveel niet leveren. Nog lezen wij op de steenen, die in den Peiraieus elken aangemonsterden matroos zijne plaats aanwezen op de roeibanken, ettelijke namen uit buurtschappen van het binnenland. De meesten nu dier zeelieden bleven tusschen twee krijgstochten in telkens te Athenae hangen. Eerst in de bovenstad, zoolang daar de winnende hand der opkomelingen mild genoeg bleef om den slenteraars den mond open te houden. Kimon vooral was, tot aan zijne uitwijzing door het scherven-

gericht in 461, de voorzienigheid voor velen zijner min fortuinlijke kameraden. Dan, als de schare te talrijk werd, streken allengs meer op den Peiraieus neder, om er schuitevoerderswerk te verrichten, of een bestaan te vinden in dokken en op scheepswerven. Dat werden ten slotte de roerigste bestanddeelen in het Atheensche volk, zich voelend door het besef, dat de stad voor haar nieuwen bloei hen noodig had, altijd bijeen en dus voor volksmenners gemakkelijk te vinden, met de dommekracht van hun getal in staat om elke vergadering der burgerij te zetten naar hunne hand. De ommekeer, waardoor in 461 Ephialtes de Atheensche volksregeering vestigde, was bovenal hun werk. Voor hen werden in Perikles' dagen en later de groote praalgebouwen opgericht: het „Parthenon", de „Propylaeën". het nieuwe „Erechtheion". Voor de armsten onder hen waren de presentiegelden ter rechtzitting en het kostelooze toegangsbewijs tot den schouwburg bestemd; de twee nieuwigheden, door welke Perikles en Kleophon op kosten der bondgenooten de allemansrechtspraak en de allemansverzorging pas recht tot eene waarheid maakten. Later ook het paar „oboloi", waarmeê aanwezigheid ter volksvergadering werd beloond; het middel tot volledige verwezenlijking van allemansbewind. Het kan u niet verbazen, dat, zorgeloos en genotziek, het grauw die aalmoezen opstak, om te lanterfanten. De heeren gingen als heeren leven en bedankten ervoor, ter zee hun oude bedrijf voort te zetten. Toen dan ook, onder Perikles' bewind, opnieuw vloten werden uitgezonden van 100 driedekkers, lieten zij nog hoogstens zich aanmonsteren voor loods- en zeesoldatendienst en voor het hooger bezoldigde werk der roeiers op de eerste bank, die de zwaarste riemen hanteerden. De rest, zoover niet slaven voor dat werk werden geprest, moest tegen ruim handgeld onder vreemdelingen worden geworven.

Nu, vreemdelingen waren er eerlang genoeg. Sinds het neêrwerpen van Aegina, stond niets den opbloei van Athenae's zeehandel meer in den weg. De Peiraieus, reeds lang door Themistokles tot hoofdhaven verkozen, was, terstond na de mislukking van den Perzen-aanslag, met een' muur versterkt: daar ook verrees welhaast het arsenaal. De dokken kwamen in 450 gereed. Hippodamos van Milete ontwierp het regelmatige plan der breede, rechthoekig elkaar snijdende straten, dat zulk eene tegenstelling vormde met de bochtige stegen der bovenstad. Reeds in 453

was er het verkeer zoo druk, dat eene afzonderlijke rechtbank voor scheepvaartgedingen moest worden ingesteld. En nu begon voor de Aegeïsche zee het tijdperk der „pax Atheniensis”. De Archipel kreeg een nieuw aanzien door de zeepolitie, die Athenae zoo krachtig handhaafde, dat zeerooverij verdween. Nog wanneer hij spreekt over den toestand tot dicht vóor den krijgstocht van Xerxes, schildert ons Herodotos het Helleensche eilandenrijk, als wemelend van „piraten”. Doch sinds Athenae er meesteresse werd, kwam aan dien gruwel een einde. Roofnesten als Skyros en Karystos werden getuchtigd en gezuiverd van hun gespuis. Tijdens Perikles handhaafden, in de wateren van den Delischen bond, 60 politievaartuigen eene voorbeeldige orde. Zoo kon de zeeschuimerij, waarvan Herodotos nog heugenis bewaarde als van een onvermijdelijk kwaad, reeds door Thoukydides worden gebrandmerkt als barbaarsche misdadigheid. Drie en zestig jaren, van 475 tot 412, heeft die „pax Atheniensis” geduurd. Eerst de noodlottige vloottocht naar Sikelië verlamde den arm der stad, die zoo lang de zee had beveiligd.

Reusachtig voor die dagen moet in den bloeitijd, dien ik daar afbakende, Athenae's scheepvaartbeweging zijn geweest. Bedenkt toch, dat zelfs in den aanvang der 4e eeuw vóor onze jaartelling, toen de Delische bond in puin lag en Athenae bloedde uit duizend wonden, die het de lange oorlog en daarna de herhaalde omwentelingen hadden toegebracht, de waarde van in- en uitvoer naar en van den Peiraieus nog ongeveer $^1/_{15}$ beliep van het verkeer in alle Archipel-havens samen, $^1/_3$ van wat de handelsbeweging in de gezamenlijke overige havens van den Delischen bond nog ten jare 421, tijdens den vrede van Nikias, was geweest. Waarlijk, het laat zich verstaan, dat de Athener uit Perikles' dagen, als hij in zijne ruim aangelegde havens de schepen zag binnenvallen uit Pontos, uit Phoinikië, uit Aegypte, uit Kyrene, uit Sikelia, uit Zuid-Italië, — om van de handelsvloot der bondgenooten niet eens te spreken! — zich de borst voelde zwellen van rechtmatigen trots.

Veel minder dan door den handel werd de kapitaalkracht der Atheners gevoed door eene eigene nijverheid. Nu ja: aan voorbeelden, zelfs van door burgers gedreven groote inrichtingen ontbreekt het niet geheel. Wel is waar, noemt het eerste voorbeeld eener machtige nijverheidsonderneming, dat wij in de Helleensche

letteren ontmoeten, als ondernemer, niet een' burger, maar een' bijwoner. Het is de, met niet minder dan 120 slaven aan den gang gehouden, schildensmederij van Kephalos, Lysinas' vader, welbekend uit Plato's „dialoog" over den staat. Daarnaast echter herinner ik aan de leerlooierij van den Athener Kleon, de zaak in koper- en bronswerk, vooral lampen en lantaarns, van den Athener Hyperbolos, de messenmakerij van den Athener Alkisthenes, Demosthenes' vader, de reukwerken-distilleerderij van den gewiksten Athener Aeschines, Sokrates' onwaardigen leerling, over wiens allesbehalve wijsgeerige streken Lysias, in een vermakelijk pleidooi, een boekje heeft opengedaan. Ook is het bewijsbaar, dat in het vermaarde Atheensche platteelbakkersbedrijf, hetwelk, als kunstnijverheid, het karakter van huisvlijt behield, wel menig meester uit Attika geboortig is geweest. Nogtans: de bloei van Athenae's nijverheid hield niet met het opleven van den handel gelijken tred. En wat er dan nog was van ambachten en groote werkplaatsen, bevond zich meerendeels in vreemde handen. Voor den handwerksmeester, zelfs voor den ondernemer met een heirleger van slaven tot zijn dienst, koesterde de ouderwetsche zoon van Attika eene onverholen minachting. Kleon, Hyperbolos ondervonden die gezindheid aan den lijve. Er was dan ook geen sprake van, dat ooit een der aan lager wal geraakte jonkers zou hebben getracht weêr op de been te komen door eenig nijverheidsbedrijf. Er waren er ten slotte, wien het gelukte, het verlorene fortuin terug te winnen. Maar nooit langs dien gesmaden weg. Voor legeraanvoerders en vlootvoogden, waartoe het volk nog bij voorkeur edelen koos, was de aanvalsoorlog tegen Perzië, die volgde op den geslaagden afweer, met zijn kostbaren buit een middel tot snelle verrijking. Kimon, bijvoorbeeld, zag op die wijs kans om niet alleen de, door zijn' vader onbetaald gelaten, boete te voldoen, maar ook om zich een fortuin te verwerven, dat hem in staat stelde tot menige milde gave aan stad en medeburgers. Eene andere bron van rijke inkomsten was voor den jonker, die het kon machtig worden, het ambt van *προξενος*, welks bekleeder de belangen had waar te nemen van te Athenae verblijvende vreemdelingen, aanhoorigen der stad, die hem den post had toevertrouwd. Doch de voornaamste oorzaak van den wederopbloei sommiger adelsvermogens was wel geldbelegging in de zilverwerken van het

Laurion-gebergte. Sedert de stichting van den Delischen bond, had te Athenae de munt veel meer zilver noodig dan voorheen. Dientengevolge werd, sinds 483, het graven naar het Laurion'sche zilver, lang te voren reeds door de Phoinikiërs verricht, maar later gestaakt, met ijver hervat. Bij den lagen prijs van slavenarbeid, leverden profijtelijke zilveraderen wel een interest van 30 %. De schatten, bijvoorbeeld, van Nikias, die echter zelf geen jonker was, stamden van daar. In dien trant kwam menig ontredderd jonkerfortuin weêr terecht. Slechts in ondernemingen van nijverheid, neen, zoo niet.

Wij hebben nu de lieden in Attika van eene, in hoofdzaak akkerbouwende, wereld zien opklimmen tot den rang van een kapitaalrijk volk. Thans eenige trekken, trekjes veeleer, waaraan gij de nieuwerwetsche grootestadslucht, gelijk ook onze tijd haar in zoo'n omgeving kent, als het ware, kunt proeven.

Ik noem een drietal, maar ze zijn sprekend. Vooreerst de eigenaardige, veelszins lastige vermaardheid, die destijds te Athenae, juist gelijk thans bij ons, de bezitters van groote fortuinen als met den vinger bekend maakte aan de schare. Daarvan levert wel het sterkste staaltje het lot van Nikias, Perikles' achtbaren en nauwgezetten opvolger in het bezit der volksgunst. Zoo wij de blijspeldichters uit zijne dagen mogen gelooven, verliet dien armen rijkaard nooit een oogenblik de vrees van door dezen of genen gauwdief te worden bedot. Zijn fortuin, schreef geestig Ploutarchos, was aanvankelijk eene vaste bron van inkomsten geweest voor allerlei slampampers. Ten slotte door schade geleerd, verviel hij tot het andere uiterste: hij werd ongenaakbaar. Uit vrees voor onbescheiden aanspraak, vertoonde hij zich op straat niet meer. Uitnoodigingen van vrienden tot den avondmaaltijd werden door hem afgeslagen. Hij vermeed stelselmatig, met iemand onder vier oogen te zijn. Toen hij „archont" was, bleef hij, avond aan avond, totdat het donker werd, in het regeeringsgebouw. Om zelfs „apartjes" met een' zijner ambtgenooten te ontloopen, richtte hij zijn komen en zijn gaan zoo in, dat hij de geringste kans liep, met een ander alleen te wezen. Ambteloos, sloot hij zich in zijne woning op. Zekere Hiëro, dien hij diensten had bewezen, was er op afgericht, om dan een iegelijk, die tot hem wilde doordringen, te weren onder het

voorwendsel: „Nikias heeft 't te druk met de zaken der stad". Inderdaad: hier is een „type", welks nieuwerwetschen tegenhanger wel ieder zou kunnen noemen, die in onze dagen soms gegluurd heeft achter de schermen van een rijkaardsbestaan. Nogtans: Nikias, schoon de bekendste, was niet de eenige in zijne soort. Een Timotheos, de zoon van Konon, een Nikeratos, de zoon van Nikias, een Kallias en enkele anderen dankten aan den roep van hun rijkdom een soortgelijken, uit jaloerschheid, bewondering en verlangen naar meegenieten geweven, roem, als waaronder thans te Londen een Lord Rothschild, te New-York een John Rockefeller gaat gebukt. Men vertelde elkaar, als een publiek geheim, het bedrag van hun vermogen. Natuurlijk, evenals bij ons, in geld. Want sinds, met de opkomst van het handelsverkeer, alle rijkdom steeds standvastiger was herleid tot koopkracht van meer of minder gewicht aan muntmetaal, dacht geen schepsel nog er aan, gelijk slechts eene eeuw vóor de Medische oorlogen, iemands vermogen te waardeeren door het noemen van het aantal-schepels-gerst, dat hij kon oogsten van zijn land: men zeide, bij voorbeeld van Timotheos, dat hij 17 „talenten" bezat. En dan (nog een trekje precies als bij ons!) Jan Alleman greep bij die schattingen geregeld te hoog. Toen Nikeratos werd ter dood gebracht onder het schrikbewind der bekende „dertig", en zijn fortuin verbeurd verklaard, bleek dit, op 100 „talenten" door het openbaar gerucht begroot, er 14 te bedragen. En van Kallias, dien, bij zijn leven, het alwetende Atheensche volk niet of amper voor 200 „talenten" had laten opstaan, wordt door een voorzichtig geschiedvorscher (Beloch) het bezit op omstreeks $^1/_4$ van die som geschat.

Een tweede sprekend trekje: de woningnood in Attika's groote stad. In haar bloeitijd omvatte zij binnen de ruimte, in hare vestingwerken en de versterkingen van den Peiraieus omsloten, eene uitgestrektheid van 585 „hectaren", ongeveer 100.000 zielen. De dichtheid der bevolking was dus vrijwel zoo groot als in het hedendaagsche Berlijn. In zoo'n toestand werd het bewonen van een eigen huis, dat men niet met andere gezinnen had te deelen, (van ouds de regel voor elke burgerfamilie en in landelijke vlekken de regel tot aan het einde) natuurlijk eene weelde, die slechts de meest bemiddelden zich in de vroegere stadswoningen der oude jonker-geslachten konden vergunnen. Die deftige wonin-

gen, niet ongelijk aan de „hôtels princiers" van den „faubourg „St. Germain" te Parijs, aan de straat slechts met een blinden muur belendend, waarin eene min of meer „monumentale" poort uitzicht en toegang opende op het, aan drie kanten ombouwde, voorplein, zij waren het, die, afgezien van de openbare praalgebouwen, aan de kern der stad haar naargeestig aanzien gaven. Steeds talrijker werden dan ook, in het geheel, dat Athenae met de havens vormde, de huurkazernen. De bankier Pasion, bijvoorbeeld, uit de pleidooien van Demosthenes en zijne tijdgenooten met roem bekend om zijne rechtschapenheid en zijn milden zin, bezat en verhuurde een zeer groot perceel van dien aard. Een bemiddeld man, als Demosthenes' vader, bewoonde met de zijnen kamers in het gebouw zijner messenmakerij. Bij zulke woningtoestanden moest, natuurlijk, reeds de middelstand met zeer beknopte ruimte zich behelpen. En van de verblijven der armoede geeft ons Aristophanes in zijn „Ploutos" te verstaan, dat zij de somberste verbeelding tartten.

Mijne derde bijzonderheid, kenschetsend voor den geur van nieuwerwetschheid, die uit Athenae's groote stadslucht tot ons komt, is de toeneming der eischen, bovenal der eischen van verfijnden smaak, die men er stelde aan het leven binnen's huis. Ik spreek dus hier niet over de groote bouwwerken van Perikles, noch over het tooneel. Dat alles was rijkszaak. Wat ik thans zeggen wil, is dit: Nergens zoozeer als te Athenae (of het moest zijn geweest in dat Sikelie, dat Godefroid Cavaignac als „het „Helleensche America" betitelde), vonden kunst en wetenschap de duidelijkst zichtbare waardeering in de stoffaadje van het woonhuis. Terwijl nog om en bij 480 de woningen van Miltiades, Aristeides, Themistokles verstoken waren geweest van sierlijkheid en gemak, prees men in 415 het huis van Alkibiades als een „museum", vol van kostbare kunstwerken. En de smaakvolle weelde der huisinrichting nam later nog wel hoogere vlucht. De middelstand volgde, gelijk meestal, de verruiming, geestelijk en stoffelijk, van den levensvoet der grooten uit de verte na. Vooreerst geestelijk. Let, wat dat aangaat, hierop: Te Athenae ontlook voortaan, wat vroeger, in de 6e eeuw, slechts Milete had gekend, een eigenlijke boekhandel. Nog in den vorigen menschenleeftijd had Pindaros door een vriend (Aineias) zijne gedichten moeten doen overschrijven voor de enkele grooten der

aarde, die verlangden ze te bezitten. Nu kocht men te Athenae, en dat niettegenstaande het papier er telkens opsloeg in prijs, in de winkeltjes op het marktplein, bijvoorbeeld, de werken van Anaxagoras voor een „drachme" (± 64 cents). Een ondernemend man kon er dus afschriften laten maken naar boeken van zuivere bespiegeling uit Oost of West en er op rekenen, dat een burger uit Acharne of Alopeke, die op de markt zijn stalletje voorbijdrentelde, zoo'n boek wel koopen zou. In waarheid kon slechts dit Athenae den Ionischen „sophisten", gelijk den westerschen „rhetoren", een zoo talrijk en zoo deugdelijk onderlegd gehoor beloven, bekwaam om Protagoras te volgen en te waardeeren de „charme" van Herodotos.

Maar ook van verruiming der levensgewoonten sprak ik in stóffelijken zin. Daarbij werd door mij, onder andere, gedacht aan de hooge waardeering van verfijnd tafelgenot en de omvangrijke boekerij van kookboeken voor lekkerbekken, die eerlang de kunst, waarvan zij handelden, opvoerden tot een, later wel niet overtroffen, peil. Zoo roemde men „De(n) Sikelische(n) Kok", eene zorgvuldig bewerkte „recepten"-verzameling van Mithaikos, en de nauwelijks minder vermaarde pennevruchten in gelijken trant van Noumenios uit Herakleia, Hegemon uit Thasos en Tyndarikos uit Sikyon. Boven die alle werd echter geprezen een gedicht: „Gastronomia", vervaardigd door zekeren Archestratos, die nog wel bevriend was met een' van Perikles' zonen. Die dichter had de wereld rondgereisd, niet, om landen en volkeren te leeren kennen, maar enkel om in alle voorname keukens te speuren naar de smakelijkste, de geurigste snufjes, met wier beschrijving hij zijne zangen kon verrijken. Dat werk werd het wetboek, waaruit de kundigste mannen der practijk, pasteikunstenaars en banketvirtuosen, op Sikelie, in Elis, te Athenae (van de laatsten noem ik slechts den, een kwart eeuw later hooggeroemden, keukenmeester Thibro) hunne wijsheid putten.

Wanneer ik nu nog, als toegift, heb vermeld, hoe kleine burgers met smalle beurzen de weelde der grooteren getrouwelijk nabootsten, door voor hunne feestmalen tafelbedienden te huren en de eetkamer tijdelijk op te sieren met ten gebruike ontvangen wand- en vloertapijten, dan hebt gij, dunkt mij, teekenachtige bijdragen genoeg tot richtig verstand van mijne bedoeling, toen ik de oude Atheners sinds de helft der 5e eeuw liet ademen

in grootestadslucht, veelszins naar hedendaagschen trant.

Tot nog toe noemde ik enkel kleinigheden, kenmerkend, wel is waar, maar die alleen de oppervlakte van het leven rimpelden; nopens hetgeen er in de diepte omging, gaven zij weinig of niets te vermoeden. Laat ons nu ook eens naar de diepte afsteken en een paar teekenende nieuwigheden op het stuk van recht en zeden aanroeren. Om te beginnen met een tweetal grepen uit het familieleven. Gij herinnert u wat ik zooeven opmerkte over de ontwikkeling, die de daar aanwezige verhoudingen doorleefden in het voorafgaande tijdperk. Het veldwinnend woekerbedrijf, zoo sprak ik, kweekte in de harten der jonkers een ongemoedelijken geest van zaken doen, eene stemming, eene gezindheid, die ook op de verhoudingen binnenshuis tot vrouw en kroost en knechten een stempel drukte van hard, inhalig meesterschap. Die dingen alweêr werden in de jaren, waarover wij thans handelen, geheel anders. Wel nauwelijks iemand onder ons, die somtijds vergelijkingen kon maken van het huislijk leven — nu en een 75, 50 jaar geleden, of hij is daarbij, hetzij dan pijnlijk of aangenaam, getroffen door de tegenstelling tusschen — destijds — de straffe saamhoorigheid van het gezin onder gestreng huisvaderlijk gezag, en — thans — de veelvuldige ontrafeling van den éenheidsband, het voormalige gezag veelal de teugels vierend aan eene vrijgevochten bende, waar ieder doet wat goed is in zijne oogen. Nu dan, een dergelijk contrast vertoont ons ook weêr de Atheensche wereld van vóor en van na (laat ons zeggen) 450.

Niet, alsof er de ontbinding van het huisgezin geheel ongehinderd haar loop nam. Bijzondere gebruiken, overgebleven uit Attika's verleden, niet in de laatste plaats de sterke behoudzucht der schare, zij handhaafden hardnekkig een ouden regel, die de overheid inscherpte, voor de instandhouding althans der adellijke „dynastieën" naar vermogen zorg te dragen. In de lijn dier staatswijsheid lag het dan tevens, dat de rechtstoestand van vrouwen en dochters gedurende de anderhalve eeuw, waarin te Athenae de verlichting veld won, van toenemende achting voor de vrijheid der „sekse" ons teekenen, sporen zoo goed als niet geeft te zien. De echtgenoote, het meisje in den „galanten" riddertijd, dien ons de oude Homeros schetst, was er beter aan toe, werd meer in waarde gehouden, dan in de dagen van wijs-

geerige bespiegeling, ons, bijvoorbeeld, door de blijspelen van Aristophanes geschilderd. Van daar, dat de sterke „emancipatie"-beweging, die onder Perikles' bewind in gang kwam en voor onzen blijspeldichter eene mijn ontsloot van te dikwijls alles behalve fijne kwinkslagen, het toenemend getal van geestelijk hoogstaande vrouwen, die, als Aspasia, uit verontwaardiging over het Attische huwelijk de voorkeur gaven aan samenleven met den man harer keuze buiten echt, tot het einde toe het karakter behield van een protest tegen de bestaande orde, zonder te slagen in haar streven naar hervorming. Toch: spoorloos gingen, dat spreekt! de machten ter ondermijning der familie-éenheid ook de vrouwenvertrekken in het Atheensche huis niet voorbij. Ten spijt der starre rechtsordening wist, in de zeden, de practijk, wel menige Attische vrouw haar hennetje koning te doen kakelen. Dat lijkt vooral te zijn geschied in de niet zeldzame echtverbintenissen, waar de dochter uit een verarmd jonkergeslacht zich had laten koppelen aan een, door spaarzaamheid of oorlogswinst verrijkten, kinkel. Hoort, hoe de Atheensche Molière (Aristophanes) in zijne ten jare 423 opgevoerde „Wolken" zoo'n George Dandin uit zijn tijd, met name Strepsiades, zich laat beklagen: „Waarom is zij niet terstond met smaad aan haar „einde gekomen, de huwelijksmakelaarster, die mij de ijdelheid „aanpraatte om jou moeder (m'n jongen!) te trouwen! Ik leidde „een heerlijk boerenleventje, liet alles maar waaien, zat dik onder „het stof, merkte niets van een bezem, maar genoot van mijn „bijen, mijn schapen, mijn olijven. En daar trouw ik, — ik, „lummel, die ik ben! — de nicht van Megakles, Megakles' zoon, „eene indrukwekkende juffer, stijf van plichtplegingen, het volmaakte evenbeeld van de groote Kesyra, jonker Alkmaion's „gemalin! Op onzen trouwdag naast haar aan tafel gezeten, rook „ik naar mijne wijnbakken, mijne kaasplanken en mijne schapen-„wol, kortom: naar welvaart; maar zij, ze rook alleen naar reuk-„zalven, saffraangele japonnen, verkwisting en lekkerbekkerij... „Later, toen ons die jongen geboren werd, kregen wij ruzie over „zijn naam. Zij wou zoo iets van paardensport: Xanthippos, „Kallippides. Ik wou hem, naar mijn zuinigen grootvader, „Pheidonides noemen. Het duurde lang. Eindelijk werden we „het roerend eens over Pheidippides. O, die kwajongen! Als „zijne moeder hem liefkoosde, zei ze: „Wanneer zal ik je, als

„„Megakles, in purper, zegepralend, de stad zien binnenrijden „„op een' mooien wagen?" En dan zei ik: „Veel liever zie ik „„je, als je grootvader, met een vacht over den schouder de „„geiten naar den stal brengen, neêrklauterend van steenblok op „„steenblok." Maar hij gaf wat om mijn preêken! In zijne han„den zijn mijne goede goudstukken er van door gegaloppeerd!"

Werd dus de plaats, de rol der gehuwde vrouw slechts voor de zeden eene andere, ook rechtens kreeg in het, handelsstad geworden. Athenae de vaderlijke macht over de zonen een nieuwerwetsch karakter. Verschillende omstandigheden werkten daartoe meê. Wat vooral bijdroeg tot versterking van den staat der jongens, was de voet van gelijkheid, waarop het stadsleven vaders en zonen deed verkeeren in het leger, in de kameraadschappelijke „clubs" der krijgsmakkers („phratriai") en, niet te vergeten! in de volksvergaderingen. Eindelijk, ziet niet voorbij den invloed, dien de wijsbegeerte eerlang te Athenae oefende. Bleef er al de schare diep steken in oude geloofsvoorstellingen, onder de welgestelden vond de vrijere zin voor verstandelijke ontleding en zelfs de twijfelarij der „sophisten" veel aanhang. En die denkwijze wekte onder de jeugd een zelfgevoel, dat den, geen reden gevenden, geest van onderworpenheid aan den vader niet langer met geduld verdroeg.

Nog eens is het Aristophanes, die, zij het met zijn gewonen schaterlach der overdrijving, ons dien ommekeer te tasten geeft in een gesprek tusschen den reeds genoemden Strepsiades en zijn verwenden zoon. „O," zegt de knaap, „wat is het een genot, „nieuwigheden te leeren en de geldende wetten te kunnen ver„achten! Toen ik mij alleen toelegde op rijden en harddraverijen „met paard en wagen, zag ik geen kans om drie woorden achter „elkaar te zeggen zonder fout. Maar nu ben ik met het fijnste „en het teerste in de redeneerkunde vertrouwd en leg ik me „enkel toe op nadenken over de hoogste aangelegenheden. Zoo „houd ik mij, bijvoorbeeld, verzekerd, gemakkelijk te kunnen „bewijzen, dat het in den haak kan zijn, als een zoon zijn vader „afrost."

„Bij Zeus," zegt dan de oude heer, „stijg jij maar weêr te „paard. Liever onderhoud ik je wagenspan, dan dagelijks slaag „te krijgen."

„Zeg mij eens," vraagt Pheidippides, „toen ik een kind

„was, gaaft Ge mij toen niet soms eene gevoelige kastijding?"

En als dan de vader de onvoorzichtigheid begaat, te antwoorden, dat het om 's jongskens bestwil was, „zeg mij nog eens," redekavelt de kwâjongen dan, „is het niet rechtvaardig, dat ik „U gelijk met gelijk betaal, en dat ik ook, vermits genegenheid „in slagen zich kan toonen, U, vader, nu en dan in Uw belang „kastijd? Krachtens welk recht zoudt Gij meer dan ik gevrij-„waard zijn tegen klappen? Mij dunkt: ik ben vrijgeboren even-„goed als Gij. Gelooft Ge nu waarlijk, dat kinderen mogen worden „geslagen, maar de ouders niet, op hunne beurt, evengoed?"

Mijne laatste voorbeeldengroep om te staven de evenwijdigheid tusschen ettelijke ontwikkelingslijnen van toen en van nu betreft het onderwerp, dat thans, helaas! meer dan eenig ander onze hoofden en harten vervult. Het is weder ontleend aan Aristophanes. Tot driemaal toe ondernam de uitbundige potsenmaker eene verdienstelijke poging om zijn volk te winnen voor het beëindigen van dien noodlottigen Peloponesischen oorlog, die wel eeuwig scheen te moeten duren. Voor ons is de leerzaamste dier pogingen de middelste, het blijspel „De Vrede", opgevoerd tijdens de Dionysos-feesten van 421. Opmerkelijk is het, inderdaad, hoeveel punten van gelijkenis de klachten, daar door den dichter geuit, vertoonen met hetgeen ook wij thans dag aan dag kunnen vernemen. Is het niet, bijvoorbeeld, of wij een stukje geschiedenis lezen van onzen tijd, wanneer wij er den god Hermes, bij zijne opsomming van de oorzaken der ramp, hooren zinspelen op een besluit van Perikles, typisch, trouwens, tot kenschetsing van heel de oorlogstactiek der beide partijen, dat beoogde, een onwillig buurvolk, de lieden van Megara, door uithongering tot rede te brengen? En dan de ergernis van den, naar vrede snakkenden, dichter over den verderfelijken invloed dergenen, wien de krijg profijten in den schoot werpt: vooreerst de gewetenlooze spitsbroederschap tusschen de vuur en vlam spuwende blaaskaken onder de volksmenners binnensmuurs en den vreemdeling, die van voortzetting der ellende zich winst belooft: voorts het geknoei van sommige scheepsgezagvoerders op de oorlogsvloot, volgens wier last een deel der openingen, die de riemen doorlieten, werd dicht gespijkerd, opdat zij de soldij konden opsteken der alzoo vrijvallende roeiers: de angst voor vrede, eindelijk, gekoesterd door de zwaardvegers, de lansen-

vervaardigers, de helmsmeden en de handelaars in helmpluimen, zoo scherp afstekend tegen het vredesverlangen der ploeg- en zeismakers, wier verdiensten karig blijven, zoolang het vechten duurt. Hoe hedendaagsch ook klinken ons uit Aristophanes' gedicht de twistredenen tegen, waarvan zich, éenerzijds, de oorlogspartij, ten andere de groep der pleiters voor den vrede bedient; daar: de bekende neuswijze dooddoeners over de natuurlijke onuitroeibaarheid van den geest der vijandschap. „De goden," laat de dichter zekeren Hiërokles leeraren, „de goden willen „niet dat wij met strijden eindigen, zoolang de wolf niet met „het lam verkeert, terwijl nog de bladluis op zijne vlucht een „vuilen stank verspreidt, totdat de jankende teef zal ophouden, „blinde jongen te werpen. Ge zult nimmer eene kreeft leeren „loopen in eene rechte lijn, noch ooit eene egelhuid zacht maken." (Nu, zoo is het ook met den oorlog.) Maar dan weêr aan den anderen kant de vertwijfelende verzuchting over den onwil tot vredesluiten, telkens aan de zijde, waar voor het oogenblik de kansen gunstig staan. „Toen," heet het weêr uit den mond van Hermes, „de Lakedaimoniërs aan de winnende hand waren, „klonk het daar: „Bij Kastor en Polydeukes! nu zullen de Atheners „„het gelag betalen." Doch, als dan op hunne beurt de Atheners „een voordeel hadden behaald, konden zij geen vredes-afgezant „van Lakedaimonië zien aankomen, of zij riepen: „Neen, bij De-„„meter! wij laten ons niet bedotten."" Merkt aan dezelfde zijde ook op: den toorn over al, wat in de opvoeding de kinderen eraan gewent, den oorlog te verheerlijken. „Muze," zoo vangt een kleuter zijn van buiten geleerd versje aan; „laten wij in „onze liederen de heldendaden der jonge krijgslieden bezingen." Dan echter barst de vreedzame boer Trygaios in heftige verwijten los. En als daarna het kind nog eenigen tijd is voortgegaan, buldert het uit Trygaios' mond: „Je moest duizend „dooden sterven, kleine zot met je gevechten! Je zingt alleen „maar van bakkelijen. Loop heen en dreun je liedjes op voor „een of anderen zwaardveger!"

Voor zoover Aristophanes durft hopen op het einde der bloedige verdwazing, steunt zijne verwachting haast alleen op het vredesverlangen der kleine landlieden. „Ons," dus zingt een koor dier schamele akkerbouwers, „ons de taak om de vredesgodin „te bevrijden uit haar gevangenis." En Trygaios beaamt dat met

de woorden: „Ja, inderdaad, ons bevrijdingswerk gelukt pas van „het oogenblik, dat de boertjes bovenal zich ervoor spannen.“ De dichter meende dat. De mooiste verzen, buiten kijf, uit zijn gelegenheidstuk, waar de strekking zoo dik opligt, zijn de koorliederen, die, onder den gezichtshoek van zoo'n kleinen man, de rampen schilderen van den krijg, de zegeningen bezingen van den vrede. „Terwijl aan alle kanten het liedje van de „krekel klinkt, mag ik gaarne eens nakijken, of mijne Lemni„sche druif, die zoo vroeg kan zijn, al rijp wil worden. Ook is „het mij een genot, mijne jonge vijgen te zien zwellen, haar „lekkeren smaak te genieten en te denken; gelukkige tijd!... „Ik word dan ook steeds wat dikker in dat jaargetij. Ja, al die „dingen zijn mij liever dan het gezicht van een werfofficier, „gehaat bij de goden, met drie pluimen op zijne helm en eene „schitterend-purperen „tuniek“ aan... Die lafaards sparen altijd „de stedelingen en leggen den oorlogslast vooral op onze schou„ders... Wat heb ik niet al ondervonden van zulke leeuwen „bij den haard, vossen in het gevecht!” En dan tot slot die boeren-jubelzang, als de vrede gesloten is: „Laat nu allen elkaar „gelukwenschen, hunne vreugde uitdaveren en opnieuw hunne „gereedschappen naar de akkers dragen. Maar eerst wat reidansen „uitgevoerd, wijn geplengd, en de goden gesmeekt, dat zij de „Hellenen zullen zegenen met velerlei welvaart, hun allen over„vloedige oogsten schenkend van gerst, van wijn en van vijgen. „Ook zullen wij hen vragen om vruchtbaarheid voor onze vrou„wen, om herstel van hetgeen ons de oorlog deed verliezen, en „om de genade, niet langer het moordend staal te doen blin„ken in onze handen.”

In zulke liederen gaf Aristophanes wel het dichterlijkste, wat hij geven kon. Is het dan niet te treffender, dat wij juist bij hunne lezing ons op eenmaal den afgrond bewust worden, die, trots alle gelijkenis in menigen trek, zich opent tusschen de oude Atheners en ons? Die afgrond wordt niet in de eerste plaats gegraven (gelijk men wel gezegd heeft) door de slavernij, daar ginds voorhanden, bij ons afwezig. Noch zelfs door het ontzaglijke verschil tusschen destijds en thans in heerschappij over de onbezielde natuur. Neen, er is iets anders. Zoodra wij heen zijn over de eerste bekoring der Helleensche zangkunst, treft het ons, hoe gelijkvloersch dat alles is. Viel dan over de

ontzaglijke tegenstelling tusschen oorlog en vrede niets diepers te zeggen? Voor de Hellenen niet. Wel voor ons, omdat wij Christenen zijn, althans, of wij het weten en willen, of niet, gedoopt met Christelijke gedachten en gevoelens. Omdat ons, hoezeer wij ervan huiveren, het strijden zelfs op leven en dood kan worden opgelegd, als een gebod, door de Christelijke gedachte van het offer, verschuldigd aan den plicht. En andererzijds ook weêr, omdat voor ons de vrede zijne hoogste waardij ontleent, niet aan de overvloedige oogsten, die hij schenkt van druiven en van vijgen, maar hieraan, dat slechts zijne heerschappij ten volle strookt met het echt-Christelijk gevoel der achting, door al wat menschenaangezicht vertoont, den naaste toe te dragen.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. V.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1922.

ARCHIVES DU MUSÉE TEYLER.
SÉRIE III, VOL. V.

LORENTZ, H. A. — De electronentheorie.
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 1—76.

Electronentheorie. De—
H. A. LORENTZ.
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 1—76.

LORENTZ, H. A. — Het magnetisme.
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 77—134.

Magnetisme. Het—
H. A. LORENTZ.
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 77—134.

SLEEN, G. VAN DER — Quelques recherches à propos du nettoyage des tableaux de Frans Hals à Harlem. [Avec une „Introduction" de G. D. GRATAMA].
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 135—174.

Quelques recherches à propos du nettoyage des tableaux de Frans Hals à Harlem. [Avec une „Introduction" de G. D. GRATAMA].
G. VAN DER SLEEN.
Arch. Mus. Teyler. Sér. III, VOL. V, 1922, pp. 135—174.

ARCHIVES

DU

MUSÉE TEYLER

SÉRIE III, VOL. V.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1922.

FONDATION

DE

P. TEYLER VAN DER HULST

à HAARLEM.

1922.

Directeurs: J. A. Fontein, président; J. J. van Oorde; Vincent Loosjes; Mr. W. Cnoop Koopmans; J. C. Tadema.

Secrétaire: Mr. A. Maclaine Pont.

Trésorier: J. J. Doeglas.

Curateur du Laboratoire: Prof. Dr. H. A. Lorentz.

Conservateur du Cabinet de Physique: Dr. Balth. van der Pol Jr.

Conservateur du Musée de Paléontologie et de Minéralogie: Prof. Dr. Eug. Dubois.

Bibliothécaire: J. J. Verwijnen.

Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures: H. Buisman.

Conservateur du Cabinet numismatique: A. O. van Kerkwijk.

MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLÉRIENNES.

Première Société ou Société de théologie: Dr. J. G. Boekenoogen; Prof. Dr. D. E. J. Völter; Prof. Dr. H. J. Elhorst; P. Feenstra Jr.; Prof. Dr. T. Cannegieter; Prof. Dr. H. U. Meyboom.

Seconde Société: Prof. Dr. Hugo de Vries; Prof. Dr. P. J. Blok; Prof. Dr. H. A. Lorentz; A. O. van Kerkwijk; Dr. C. Hofstede de Groot; Prof. Dr. G. Kalff.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1920.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap hebben in hunne vergadering van 23 Oct. 1919 uitspraak gedaan over twee ingekomen Nederlandsche antwoorden op de prijsvraag:

„Het genootschap verlangt eene verhandeling over het vraagstuk van de absoluutheid van het Christendom in het licht van de hedendaagsche godsdienstwetenschap".

De verhandeling ingezonden onder het motto „Sine me" is, voor zoover ze eenige waarde heeft in verband met de gestelde vraag, niet meer dan een vluchtig schetsje over den aard en de strekking van Jezus' prediking.

Omtrent de beteekenis van het aangegeven probleem heeft de schrijver zich geen rekenschap gegeven.

Aangaande het licht, dat de hedendaagsche godsdienstwetenschap daarop werpt, vernemen we zoo goed als niets.

Derhalve kan deze verhandeling, ondanks enkele goede gedachten, die ze bevat, niet voor bekroning in aanmerking komen.

De verhandeling, die is ingezonden onder het motto: „latet dolus in generalibus" bezit in *formeel* opzicht vrij groote verdiensten. Doch haar inhoud is, in zijn geheel genomen, volstrekt onbevredigend.

Ook deze schrijver heeft omtrent den aard en de beteekenis van het aangegeven probleem zich niet voldoende rekenschap gegeven.

Dientengevolge heeft hij voor meer dan de helft een historisch overzicht geleverd, dat doelmatiger in een beknopt bestek had kunnen saamgevat worden, en bovendien in oordeelkundig opzicht te kort schiet.

De beteekenis van het begrip „absoluutheid" komt in zijne vluchtige opmerkingen daaromtrent niet tot haar recht.

Over den geestelijken inhoud van het Christendom heeft de schrijver niet diep nagedacht.

Hij beweert, dat het Christendom geen *„verschijnsel"* mag heeten, geen innerlijken, onvergankelijken geestelijken inhoud bezit; doch rechtvaardigt die bewering niet.

Dat geestelijke stroomingen realiteit hebben als achtergrond, uit geestelijke werkelijkheid ontspringen, en deze door de eeuwen heen voortdragen, dáárvan schijnt hij geen besef te hebben. Ten minste aan het Christendom ontzegt hij alle blijvende realiteit: evenwel zonder eenige toelichting, die als eene ernstige poging tot rechtvaardiging van zijne meening ten deze zou kunnen beschouwd worden.

Van een voortplanten van geestelijk leven kan, volgens hem, dan ook in eigenlijken zin geen sprake zijn. Men neemt — verklaart hij — enkel uitdrukkingsvormen over, waarin ieder zijn eigen inhoud legt.

Beweringen, waarin wel *betrekkelijke* waarheid is te erkennen, doch die door den schrijver kortweg als *volstrekte* waarheid worden gegeven.

Of hij deze opvattingen op de resultaten der hedendaagsche godsdienstwetenschap heeft kunnen bouwen, mag zeker wel betwijfeld worden.

Trouwens, van een ernstig onderzoek naar het licht door die wetenschap op het *verschijnsel* „godsdienst" geworpen, vinden we in deze verhouding geen spoor.

De schrijver heeft zijne negatieve conclusie dan ook zeer onvoldoende toegelicht en niet wetenschappelijk gerechtvaardigd.

Het kort samengevat oordeel over deze verhandeling moet derhalve aldus luiden:

Zij bevat eensdeels overtollig, en anderdeels onvolledig, niet wijsgeerig doordacht, en daardoor betrekkelijk waardeloos werk. Van eene bekroning kan ook bij dit antwoord geen sprake zijn.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

1. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1920:

Het genootschap verlangt eene ontwikkelingsgeschiedenis van de „bewustzijns- of ervaringstheologie" sedert SCHLEIERMACHER.

2. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1921:

Eene verhandeling over de plaats van „zonde" in 's menschen godsdienstig leven naar de beginselen der moderne richting.

Als nieuwe prijsvraag ter beantwoording vóór 1 Jan. 1922 is uitgeschreven:

Eene oordeelkundige beschrijving van de onderscheidene geestelijke stroomingen in den kring van het Protestantisme in Nederland sedert het begin der 19de eeuw.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld

briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem*. Het programma van het genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1921,

vastgesteld in de vergadering van 28 Oct. 1920.

Directeuren van TEYLER'S STICHTING en de Leden van TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP deelen mede, dat geen antwoord is ingekomen op de prijsvraag:

Het genootschap verlangt eene ontwikkelingsgeschiedenis van de „bewustzijns- of ervaringstheologie" sedert SCHLEIERMACHER.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

1. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1921:

Eene verhandeling over de plaats van „zonde" in 's menschen godsdienstig leven naar de beginselen der moderne richting.

2. Om beantwoord te worden vóór 1 Jan. 1922:

Eene oordeelkundige beschrijving van de onderscheidene geestelijke stroomingen in den kring van het Protestantisme in Nederland sedert het begin der 19de eeuw.

Als nieuwe prijsvraag ter beantwoording vóór 1 Jan. 1923 is uitgeschreven:

De verhouding tusschen de Oostersche en de Westersche beschaving in wijsgeerig, godsdienstig en zedelijk opzicht.

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem*. Het programma van het genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S GODGELEERD GENOOTSCHAP TE HAARLEM

voor het jaar 1922.

Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Godgeleerd Genootschap hebben in hunne vergadering van 27 October 1921 uitspraak gedaan over vier ingekomen antwoorden op de prijsvraag:

> Eene verhandeling over de plaats van „zonde" in 's menschen godsdienstig leven naar de beginselen der moderne richting.

Twee van deze antwoorden waren in de Nederlandsche taal geschreven, de andere twee in de Duitsche taal.

I. De verhandeling, ingezonden onder het motto „Uit Hem en door Hem en tot Hem zijn alle dingen", geschreven in de Nederlandsche taal, is een opstelletje van 9 bladzijden; het geeft eene gemoedelijke ontboezeming, waarin wel enkele juiste opmerkingen worden aangetroffen, doch waaraan alle wetenschappelijkheid ontbreekt.

II. De verhandeling, ingezonden onder het motto: *γνῶθι σεαυτόν*, geschreven in de Nederlandsche taal, is een zeer uitvoerig geschrift, waarvan verreweg het grootste gedeelte buiten de gestelde vraag omgaat.

Eerst op bl. 183 begint eene bespreking van 't wezen van „zonde".

In het dan volgend betoog ontmoet men zonderlinge tegenstrijdigheden en talrijke herhalingen.

Voorzoover deze verhandeling verband houdt met de gestelde vraag, draagt zij allerminst het karakter van een degelijk onderzoek. Zij is op menig punt niets meer dan eene gemoedelijke ontboezeming, vertoont geen zuiver geteekende en nauwkeurig gevolgde lijnen.

Het is een verward en verwarrend geschrift.

III. De verhandeling, ingezonden onder het motto: „Ueber das Prinzip woraus Sittlichkeit abzuleiten sei, hat man sich nie volkommen vereinigen können u.s.w." *(Goethe* an *Carlyle)*, is in de Duitsche taal geschreven.

Zij bevat een onbelangrijk betoog, grootendeels gewijd aan eene weinig steekhoudende kritiek van stelsels, inzonderheid van de nuttigheidsleer, welke de schrijver, blijkens zijne geheel onjuiste voorstelling er van, niet begrijpt.

IV. De vierde verhandeling, ingezonden onder het motto: „Der Begriff „„des Menschen Sohn"", ist eine „„ewige"" Tatsächlichkeit" — *Nietzsche* im *Antichrist* — is in de Duitsche taal geschreven.

Deze verhandeling bezit naar vorm en inhoud uitmuntende eigenschappen.

Ze kenmerkt zich:

door eene juiste opvatting van de gestelde vraag;

door eene zorgvuldige beoordeeling van begrippen;

door een rustig voortgaand onderzoek;

door eene duidelijke uiteenzetting van de voorgedragen inzichten;

door een goed gemotiveerd oordeel over de éénheid van 's menschen *geestelijk* leven en zijn *natuurlijk* wezen;

door eene goed toegelichte erkenning van het louter geestelijk karakter van „zonde";

door tal van fijne psychologische opmerkingen omtrent het innerlijk verband tusschen 's menschen *idealen* en de *werkelijkheid* van zijn bestaan.

Op grond van een en ander wordt deze verhandeling met goud bekroond.

Bij opening van het naambriefje bleek de schrijver te zijn:

Prof. Dr. Fritz Ziller te *Osnabrück*.

Uitgeschreven blijven de volgende prijsvragen:

1. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1922:

Eene oordeelkundige beschrijving van de onderscheidene geestelijke stroomingen in den kring van het Protestantisme in Nederland sedert het begin der 19de eeuw.

2. Om beantwoord te worden vóór 1 Januari 1923:

De verhouding tusschen de Oostersche en de Westersche beschaving in wijsgeerig, godsdienstig en zedelijk opzicht.

Als nieuwe prijsvraag, ter beantwoording vóór 1 Januari 1924, is uitgeschreven:

Eene verhandeling over het thema:

„De verlossings- en heilsgedachte uit Vrijzinnig Protestantsch oogpunt."

De prijs voor het best en voldoend gekeurd antwoord op deze vragen bestaat uit een gouden eerepenning op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van vierhonderd gulden, of, zoo men daaraan de voorkeur mocht geven, in vierhonderd gulden. De prijs wordt uitgekeerd, zoodra de bekroonde verhandeling voor de pers gereed is.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Latijn, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene andere hand dan die van den auteur of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Niet duidelijk geschreven verhandelingen worden ter zijde gelegd. Ook moeten zij op den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden en geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten. Alle ingezonden stukken blijven het eigendom van het genootschap, dat de bekroonde, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers, in het laatste geval echter niet zonder diens toestemming. Voorts worden geene afschriften van de niet-bekroonde stukken aan de schrijvers verstrekt dan op hunne kosten. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen opgaaf

van des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden aan het *Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.* Het programma van het genootschap is op aanvrage bij Heeren Directeuren van Teyler's Stichting jaarlijks omstreeks 15 November kosteloos verkrijgbaar.

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM,

voor het jaar 1920.

H.H. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1920 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

De Nederlandsche roman van 1870 tot c. 1920 in zijn ontwikkeling naar inhoud en vorm geschetst.

Het jaar 1870 is gekozen als uitgangspunt, omdat tusschen 1870 en 1880 een nieuw geslacht van schrijvers in onze letterkunde optreedt, dat een overgang vormt tusschen twee oudere geslachten van auteurs eenerzijds, de mannen van *De Nieuwe Gids* anderzijds.

Het eindjaar 1920 is gekozen slechts om den onderzoeker niet te binden: de gevraagde schets kan eindigen ook met een jaar tusschen 1900 en 1920, indien daarvoor goede gronden vallen aan te wijzen.

Zooals reeds uit het bovenstaande kan gebleken zijn, wordt hier met *roman* het verhalend letterkundig proza in het algemeen bedoeld, dat ook de novelle, de novellistische schets, het reisverhaal e. d. omvat.

Een volledig onderzoek der stof zal noodig zijn: niet noodig daarentegen, en zelfs ongewenscht, alle uitkomsten van dat onderzoek mede te deelen: beperking tot de voornaamste werken zij aanbevolen.

Aan den invloed der buitenlandsche letterkunde in dezen worde niet meer plaats gegeven dan strikt noodzakelijk is; aan de biografie der auteurs niet meer aandacht gewijd dan de

verklaring van hun werk eischt. Aanhalingen behooren, met het oog op den omvang van het werk, zooveel mogelijk te worden vermeden: hoofdzaak dienen te blijven de groepeering en de onderlinge samenhang, de karakteristiek en de waardeering der werken zelve of die van de letterkundige persoonlijkheid en de kunst der auteurs.

Het geheel zij, met vermijding van artistiek jargon, in zuiver Nederlandsch en aangenaam leesbaar geschreven.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1923, opdat zij voor den 1sten Mei 1924 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller*, of met de schrijfmachine. Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden: geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM,

voor het jaar 1921.

H.H. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben in hunne vergadering van 23 December 1920 uitspraak gedaan over het antwoord, onder het moto: „Eenvoud is het kenmerk van het ware", ingezonden op de door hen voor het jaar 1918 uitgeschreven prijsvraag, luidende:

> Zij verlangen eene geschiedenis der Noord-nederlandsche kleederdrachten in de zeventiende eeuw, op te maken aan de hand der schilderijen, prenten en teekeningen uit dien tijd.
>
> Er behoort onderzocht te worden vanwaar onze kleederdrachten hun oorsprong hebben genomen, wat er vreemds en wat er eigen in is.
>
> De verhandeling ga zoo mogelijk vergezeld van voor reproductie geschikte afbeeldingen of althans van nauwkeurige aanwijzing, waar deze te vinden zijn. Er worde tevens opgave gedaan van nog in Nederlandsche musea voorkomende kleedingstukken uit dien tijd.

Dit stuk voldoet zelfs niet aan de matigste eischen, die men aan eene beantwoording van een dergelijke vraag mag stellen, waarvan de bedoeling zoo weinig is begrepen, dat men er aan mag twijfelen, of de schrijver wel den officieelen tekst ervan onder de oogen heeft gehad. Immers aan geen der wenken, in de toelichting gegeven omtrent de wijze, waarop het Genootschap zich de beantwoording had voorgesteld, is ook maar de geringste aandacht gewijd.

De schrijver heeft niet begrepen, dat het Genootschap eene nauwkeurige studie wenschte van het voorhanden materiaal op het gebied der zeventiende-eeuwsche-drachtenkunde, zoowel met behulp der nog in Nederlandsche musea voorkomende kleeding-

stukken uit dien tijd als der afbeeldingen: schilderijen, prenten, teekeningen, enz. Aan de hand hiervan ware een verhandeling te leveren geweest in den geest van de studie van Jvr. Dr. O. H. de Jonge over het XVIe eeuwsch costuum (Utrechtsch proefschrift en opstellen in Oud Holland).

In het werk van den schrijver is zelfs geen poging te ontdekken, om iets dergelijks te leveren. Er worden van XVIIe eeuwsche kunst slechts een schilderij, een enkele teekening en verder „de etsen" van Van de Venne genoemd; geen enkel XVIIe eeuwsch kleedingstuk wordt opgegeven.

Ook de gevraagde „voor reproductie geschikte afbeeldingen, of althans nauwkeurige aanwijzing, waar deze te vinden zijn" ontbreekt geheel en al.

Daar het opstel als wetenschappelijk betoog alle waarde mist, kan het niet voor bekroning in aanmerking komen.

Als nieuwe prijsvraag voor het jaar 1921 is uitgeschreven:

Naar aanleiding van de studiën van Victor Grégoire over de samenstelling der celkernen uit karyomeren verlangt het Genootschap een onderzoek naar den bouw dezer kerndeelen, vooral in den zoogenoemde toestand van rust, en naar de beteekenis van dezen bouw voor de leer der erfelijkheid.

Zie V. Grégoire, La Cellule T 21, 1904.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1923, opdat zij voor den 1sten Mei 1924 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller*, of met de schrijfmachine. Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden: geene ant-

woorden, waaraan eenig gedselte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers: in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

PROGRAMMA VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP TE HAARLEM,

voor het jaar 1922.

H.H. DIRECTEUREN VAN TEYLER'S STICHTING en DE LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP hebben besloten voor het jaar 1922 de volgende prijsvraag uit te schrijven.

> Men vraagt eene verhandeling over de beteekenis van Utrecht, als middelpunt van het gelijknamige bisdom, voor de geestesontwikkeling der tot het bisdom behoorende gewesten in de Middeleeuwen.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1923, opdat zij vóór den 1sten Mei 1924 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar (door eene *andere hand, dan die van den opsteller* of met de schrijfmachine) geschreven zijn. Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden: geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan te hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met een spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

Conférences faites dans la Fondation Teyler.
1921.

H. A. Lorentz, Het magnetisme (3 conf.).

TABLE DES MATIÈRES.

H. A. LORENTZ.

DE ELECTRONENTHEORIE.

Voordrachten gehouden in October 1918,

bewerkt door W. H. KEESOM.

I.

§. 1. Het overzicht, dat wij ons voorstellen in deze drie voordrachten over de electronentheorie te geven, zal noodzakelijkerwijze kort moeten zijn. Daarbij zal blijken dat in die theorie, zelfs in de grondslagen ervan, groote moeilijkheden niet ontbreken. Intusschen zullen wij deze moeilijkheden in deze eerste voordracht niet op den voorgrond stellen en ons dezen keer liever alleen wenden tot de mooie zijde der theorie.

Daarbij rijst dan allereerst de vraag: hoe zijn wij tot de electronentheorie gekomen? Het antwoord daarop luidt: op eene zeer natuurlijke wijze. De diepere studie der lichtverschijnselen moest wel noodzakelijk daartoe leiden.

Reeds lang had men zich voorgesteld, dat de lichtgolven worden uitgezonden door kleine deeltjes in de lichtbron, die tengevolge van hunne beweging trillingen aan den aether mededeelen. Toen nu de electromagnetische lichttheorie van Maxwell, volgens welke de lichttrillingen electriciteitsbewegingen zijn, boven allen twijfel verheven was, lag het voor de hand aan te nemen, dat in een lichtbron of in een lichaam waarvan warmtestralen uitgaan, heen- en weergaande bewegingen der electriciteit plaats hebben, m. a. w. dat de zooeven genoemde kleine deeltjes electrische ladingen bezitten.

Dit denkbeeld was in overeenstemming met hetgeen men uit

de verschijnselen der electrolyse had afgeleid. Wordt een electrische stroom van links naar rechts door een oplossing van H Cl geleid, dan bewegen zich de waterstofatomen naar de rechterzijde en de chlooratomen naar links. De oorzaak daarvan is te zoeken in een positieve lading der waterstof- en een negatieve der chlooratomen. Evenzoo in andere electrolyten; de atomen van de waterstof of het metaal hebben een positieve, de daarmede verbonden atomen of atoomgroepen een negatieve lading.

De electrische stroom in een electrolyt is dus een convectiestroom van geladen deeltjes. Deze geladen deeltjes in een electrolyt worden *ionen* genoemd.

Later is deze naam ook op andere geladen deeltjes toegepast. Zoo b.v. op de geladen deeltjes, die soms in gassen optreden: *gas-ionen*. Daarnaast is de naam *electronen*, door JOHNSTONE STONEY ingevoerd, in gebruik gekomen. In het bijzonder wordt deze laatste naam nu gegeven aan straks te bespreken uiterst kleine *negatief* geladen deeltjes.

§ 2. Het licht plant zich ook in ponderabele stoffen, b.v. in glas, voort, en wel met eene snelheid, die anders is dan de voortplantingssnelheid in het vacuum. Ten einde dezen invloed van de ponderabele stof op de voortplantingssnelheid te verklaren, lag het voor de hand in de moleculen van de ponderabele stof, van het glas dus, de aanwezigheid van positieve en negatieve electrische ladingen aan te nemen. Deze electrische ladingen zijn door zoogenaamde quasi-elastische krachten meer of minder sterk aan bepaalde evenwichtsstanden gebonden.

Dit laatste wordt vooral duidelijk, wanneer wij b.v. beschouwen wat er in het diëlectricum gebeurt wanneer wij een condensator laden. Denken wij een vlakken condensator, en stellen wij ons eerst voor, dat zich tusschen de platen slechts de aether bevindt. Laden wij den condensator, doordat wij op de eene plaat positieve electriciteit brengen en de andere plaat met de aarde verbinden, dan heeft in den aether tusschen de platen eene opschuiving van electriciteit plaats. Denken wij nu, dat zich tusschen de platen glas bevindt, dan zullen bovendien in de moleculen van het glas positieve ladingen zich naar één kant, negatieve ladingen zich naar den anderen kant begeven. De deeltjes van het glas worden gepolariseerd. Het resultaat is, dat de diëlectrische verschuiving in het glas, die het gevolg is van het

aanbrengen van eene bepaalde electrische kracht, als zijnde samengesteld uit de diëlectrische verschuiving in den aether en de polarisatie van de moleculen, grooter is dan in den aether alleen.

De diëlectrische verschuiving blijkt in verschillende diëlectrica bij gelijke electrische kracht eene verschillende grootte te hebben, verschillende moleculen worden dus in ongelijke mate gepolariseerd, m. a. w. in verschillende stoffen zijn de electrische ladingen niet even sterk aan haar evenwichtsstanden gebonden.

Denken we nu dat op glas een lichtstraal invalt. Dan worden de electrische deeltjes in het glas aan het trillen gebracht. Dit heeft tengevolge, dat de voortplantingsnelheid van het licht in het glas eene andere is dan in den aether. Dit veroorzaakt weder, dat het licht bij overgang in het glas, in het algemeen bij elken overgang in een ander medium, gebroken wordt.

De mate, waarin de electrische deeltjes in het glas onder den invloed van den invallenden lichtbundel zullen gaan medetrillen, hangt af van de frequentie van de eigen trillingen, welke de electronen onder den invloed van de quasi-elastische krachten kunnen uitvoeren, in vergelijking met de frequentie van het invallende licht. Dientengevolge zullen de voortplantingssnelheid van het licht en de brekingsindex afhangen van de golflengte, waardoor het verschijnsel der kleurschifting verklaard wordt.

Wij willen nu de aandacht vestigen op een paar vraagstukken, die meer bepaaldelijk door de eigenlijke electronentheorie tot oplossing gebracht zijn en tot de ontwikkeling daarvan hebben bijgedragen.

In de eerste plaats de vraag hoe de brekingsindex n van de dichtheid d afhangt.

Laplace had hiervoor de formule

$$\frac{n^2-1}{d} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

opgesteld. Deze formule geeft echter de veranderingen, die n tengevolge van veranderingen in d ondergaat, aanmerkelijk te klein weer.

Daarentegen was men empirisch gekomen tot de formule:

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke formule de wijze, waarop n van d afhangt, veel beter weergeeft.

§ 3. Het tweede der bedoelde vraagstukken is het volgende: hoe plant zich licht voort in materie, die zelf zich beweegt?

De aanleiding tot het stellen van deze vraag leverde de studie van de astronomische aberratie. Het onderzoek daarvan en van ermede samenhangende verschijnselen had FRESNEL [1]) tot de onderstelling geleid, dat de aether niet aan de beweging der ponderabele materie deelneemt.

Dit sluit in zich, dat de materie, b.v. onze aarde, voor den aether volkomen doordringbaar moet zijn.

Dit laatste zou voor onze voorstelling eene moeilijkheid kunnen opleveren. Ontzegt men intusschen met EINSTEIN aan den aether alle substantialiteit, dan vormt dit geen moeilijkheid meer.

Men moet inderdaad volkomen doordringbaarheid van de materie voor den aether aannemen. Met eene andere opvatting stuit men ten slotte altijd op onoverkomelijke bezwaren.

Stel nu dat een lichtstraal zich voortplant in glas, dat zelf zich beweegt in de richting van de voortplantingssnelheid van het licht. Indien er bij de voortplanting van dezen lichtstraal niets anders in het spel was dan het glas, dan zou de voortplantingssnelheid van het licht in het zich bewegende glas eenvoudig de som zijn van de voortplantingssnelheid van het licht in stilstaand glas en de bewegingssnelheid van het glas.

Echter is de stand van zaken niet zoo eenvoudig. De lichtstraal plant zich voort in den aether, die ook in het glas aanwezig is, met eene snelheid die door de aanwezigheid van het glas veranderd is. Daarbij doet de aether aan de beweging van het glas niet mee.

Zij u de snelheid waarmede de materie, in casu het glas, zich ten opzichte van den aether verplaatst en v de snelheid, waarmede het licht zich in de materie zou voortplanten als deze stilstond. Dan zal, nu zij zich beweegt, de voortplantingssnelheid van het licht ten opzichte van den stilstaanden aether zijn

$$v + f u,$$

waarin f een zekere coëfficiënt, kleiner dan 1, is.

[1]) Lettre d'AUGUSTIN FRESNEL à FRANÇOIS ARAGO, Sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique. Ann. de chim. et de phys. 9 (1818), p. 57. Oeuvres complètes de FRESNEL, t. 2, p. 627.

Fresnel toonde aan dat men, om de aberratieverschijnselen te verklaren, aan dezen *meesleepingscoëfficiënt* de waarde

$$f = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

moet toekennen.

Hierin is n de brekingsindex. Is c de voortplantingssnelheid van het licht in het vacuum, dan is

$$n = \frac{c}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De formule (3) is door proeven van Fizeau [1]) over de voortplanting van het licht in stroomend water bevestigd. Met grootere nauwkeurigheid hebben Michelson en Morley [2]), en in den laatsten tijd Zeeman [3]) dit gedaan.

Wij zullen bij de proeven van Zeeman een oogenblik stilstaan.

Wij merken in de eerste plaats even op hoe klein het te meten effect zal moeten zijn. De voortplantingssnelheid van het licht in water bedraagt $\frac{3}{4} \times 3 \times 10^{10} = 2{,}25 \times 10^{10}$ cm/sec. De stroomingssnelheid van het water, waardoor de lichtbundel gezonden wordt, is hoogstens te brengen op ongeveer 5 M. per sec., of 5×10^2 cm sec. De meesleepingscoëfficiënt in water bedraagt ongeveer $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$. Het licht wordt dus met eene snelheid $\frac{7}{16} \times 5 \times 10^2 = 2{,}2 \times 10^2$ cm/sec. meegesleept. De verandering in de voortplantingssnelheid bedraagt dus het 10^8-ste deel ervan. Dit doet dus wel de groote experimenteele kunde van de genoemde natuurkundigen bewonderen, die niet alleen dit effect wisten aan te toonen, maar het ook konden meten.

---

[1]) H. Fizeau. Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur. Ann. de chim. et de phys. (3) 57 (1859), p. 385. Pogg Ann. Erg. bd. 3 (1853), p. 457.

[2]) A. A. Michelson and E. W. Morley. Influence of motion of the medium on the velocity of light. Amer. Journ. of Sc. (3) 31 (1886). p. 377.

[3]) P. Zeeman. De meesleepingscoëfficiënt van Fresnel voor verschillende kleuren. Versl. K. Ak. van Wet. Amsterdam 23 (1914), p. 245; 24 (1915), p. 18. Men zie verder dezelfde Versl. 24 (1916), p. 1366; 25 (1916), p. 134.

De inrichting der proeven van Zeeman wordt schematisch aangegeven door Fig. 1. Het licht valt, komende van L, op een aan de eene zijde half verzilverd plaatje a. Daar wordt de licht-

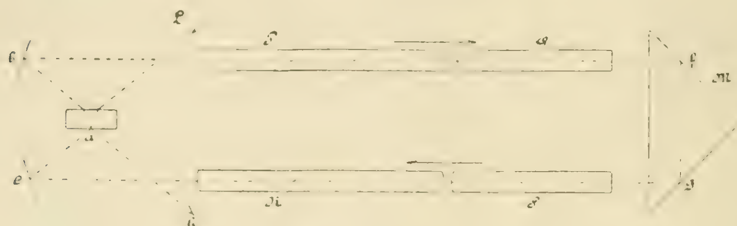


Fig. 1.

bundel gesplitst in een teruggekaatsten en een doorgelaten bundel. De eerste wordt door den spiegel b geworpen in de richting van de as van de buis PQ (waarvan in de teekening in het midden een deel als weggebroken is voorgesteld), wordt dan door het glasprisma M in f en g totaal gereflecteerd, doorloopt de buis RS, wordt in c en a gereflecteerd in de richting h. De door a doorgelaten bundel doorloopt den omgekeerden weg $a\,c\,g\,f\,b\,a\,h$, en komt langs $a\,h$ met den eersten bundel tot interferentie. In den in de richting h opgestelden kijker ziet men een stel interferentiestrepen. Wordt het water in de buizen PQ en RS in de richting der pijlen in beweging gebracht, dan doorloopt de eene bundel in beide buizen het water in de richting van de snelheid ervan, de andere in tegengestelde richting. Ten gevolge van de omstandigheid, dat daardoor de voortplantingssnelheid van den eenen lichtbundel wordt vergroot, die van den anderen verkleind, ontstaat een phaseverschil, m. a. w. de interferentiestrepen verplaatsen zich. Door de snelheid van het water in beide buizen om te keeren verkrijgt men eene verplaatsing der interferentiestrepen in tegengestelde richting.

Het mooie in deze methode is, dat de beide bundels geheel dezelfde deelen van den toestel doorloopen, zoodat b.v. plaatselijke temperatuurveranderingen beide bundels gelijkelijk beïnvloeden en derhalve de interferentiefiguur niet storen.

In de volgende tabel zijn de door Zeeman verkregen uitkomsten samengevat.

λ	f	$1 - \frac{1}{n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}$
in Å	waargenomen		
4500	0,465	0,443	0,464
4580	0,463	0,442	0,463
5461	0,451	0,439	0,454
6870	0,445	0,435	0,447

Vergelijkt men de tweede en de derde kolom, dan blijkt, dat de overeenstemming met de formule (3) niet zoo heel mooi is. Hier is n.l. nog op eene finesse te letten. De verandering in de voortplantingssnelheid, die door (3) aangewezen wordt, geldt voor het geval dat men de voortplantingssnelheden vergelijkt van twee lichtstralen, de eene zich voortplantend in zich bewegend, de andere in stilstaand water, waarvan de eerste met betrekking tot een waarnemer, die zich met het water mee beweegt, dezelfde frequentie heeft als de laatste met betrekking tot een stilstaanden waarnemer. Ingevolge het principe van Doppler zal de eerste lichtstraal met betrekking tot een stilstaanden waarnemer eene iets andere frequentie hebben dan de laatste, en dus ook in frequentie verschillen met den lichtstraal die het stroomende water in tegengestelde richting doorloopt.

Daarentegen hebben wij bij de proef te doen met twee lichtstralen, die ten opzichte van een buiten het toestel geplaatsten, dus stilstaanden, waarnemer dezelfde frequentie hebben, wat men gemakkelijk inziet als men de lichtstralen vervangen denkt door reeksen van elkaar regelmatig volgende lichtsignalen.

Brengt men deze finesse in rekening [1]), dan is de derde kolom te vervangen door de vierde, en blijkt de overeenstemming heel mooi te zijn.

Daarmede is dus de meesleepingscoëfficiënt experimenteel geheel vastgesteld. Aangezien de overeenstemming eerst bij toepassing van het principe van Doppler verkregen wordt, kan men tevens zeggen, dat Zeeman door deze proeven er in geslaagd is, voor het licht het principe van Doppler met eene kunstmatig voortgebrachte snelheid aan te toonen.

---

[1]) Vergelijk H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895, pp. 100—102.

kingen zijn te beschouwen als eene andere uitdrukking van de wet van BIOT en SAVART. Zij drukken uit dat de arbeid dien de magnetische kracht verricht als een eenheidspool langs den rand van een begrensd oppervlak rondgaat, gelijk is aan de met $\frac{1}{c}$ vermenigvuldigde hoeveelheid electriciteit, die per tijdseenheid door het oppervlak heenstroomt, als de algebraïsche teekens geschikt gekozen worden. Men krijgt de eerste der formules als men voor het begrensde oppervlak dat van een oneindig kleinen rechthoek neemt, waarvan de zijden evenwijdig aan de y- en de z-as loopen.

De volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t} \quad . \ . \ (8)$$

geven antwoord op de vraag: wanneer het magnetisch veld verandert, welke electrische krachten werken dan? Zij vormen dus de vergelijkingen voor de inductiewerkingen, en kunnen uit de bekende fundamenteele wet voor deze werkingen worden afgeleid door een redeneering die veel gelijkt op die waardoor men tot de formules (7) komt.

Bijzonder treffend is, dat deze weinige vergelijkingen de geheele electriciteitstheorie bevatten, althans pretendeeren zulks te doen.

Wij kunnen b.v. vragen: welke wetten beheerschen de electromagnetische verschijnselen in den vrijen aether? Wij hebben in (5) en (7) slechts $\varrho = 0$ te stellen, en komen dan tot de vergelijkingen van MAXWELL.

Hieruit volgt verder dat de constante c voorstelt de voortplantingssnelheid van het licht in den aether. De vergelijkingen van MAXWELL laten namelijk voortplanting van trillingen toe met eene voortplantingssnelheid c. Meer algemeen volgt uit die vergelijkingen, dat alle electrische en magnetische verschijnselen zich met de snelheid c voortplanten.

Aan de boven gegeven vergelijkingen moet intusschen nog éénе vergelijking toegevoegd worden, n.l. de vergelijking die antwoord geeft op de vraag: wat is de kracht die in een electro-

magnetisch veld op een electron werkt? Deze kracht wordt per eenheid van lading gegeven door de formule:

$$\mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \,.\, \mathbf{h}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De componenten dier kracht zijn:

$$\mathbf{d}_x + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_y\,\mathbf{h}_z - \mathbf{v}_z\,\mathbf{h}_y),\ \mathbf{d}_y + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_z\,\mathbf{h}_x - \mathbf{v}_x\,\mathbf{h}_z),$$

$$\mathbf{d}_z + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_x\,\mathbf{h}_y - \mathbf{v}_y\,\mathbf{h}_x) \ldots \quad (10)$$

De kracht bestaat blijkbaar uit twee deelen. Het eerste deel, $\mathbf{d}$, is het gevolg van de aanwezigheid van het electrische veld. Daarbij komt een tweede deel, dat afkomstig is van het magnetische veld. De grootte van dit deel wordt aangegeven door $\frac{1}{c}[\mathbf{v} \,.\, \mathbf{h}]$.

Daarin stelt het teeken $[\mathbf{v} \,.\, \mathbf{h}]$ een vector voor, loodrecht op het vlak door $\mathbf{v}$ en $\mathbf{h}$ gebracht, en gericht naar die zijde, van waar gezien de wenteling van $\mathbf{v}$ naar $\mathbf{h}$ tegengesteld is aan de beweging der wijzers van een uurwerk. De grootte van den vector wordt gegeven door het oppervlak van het op $\mathbf{v}$ en $\mathbf{h}$ beschreven parallelogram. Wij merken hierbij op dat bij bovenstaande formules een geschikte keus van de richtingen der positieve coördinaatassen ondersteld is, zoo n.l. dat wanneer $\mathbf{v}$ met OX en $\mathbf{h}$ met OY samenvalt, de vector $[\mathbf{v} \,.\, \mathbf{h}]$ de richting van OZ krijgt.

De laatstgenoemde kracht openbaart zich b.v. wanneer we een magneet in de nabijheid van een kathodestraalbundel brengen. Plaatsen wij de eene pool van den magneet in een horizontaal vlak zijdelings bij den horizontaal gerichten kathodestraalbundel, dan zien wij dezen in verticale richting afwijken.

Met een tweede voorbeeld van de werking van deze kracht hebben wij te doen als wij een metaaldraad beschouwen, waarin een electrische stroom loopt, in een magnetisch veld. Op den stroomgeleider wordt dan een kracht K uitgeoefend in den zin als in Fig. 2 is aangegeven.

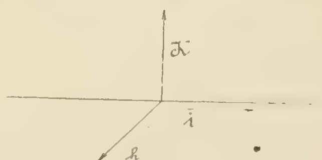


Fig. 2.

kingen zijn te beschouwen als eene andere uitdrukking van de wet van BIOT en SAVART. Zij drukken uit dat de arbeid dien de magnetische kracht verricht als een eenheidspool langs den rand van een begrensd oppervlak rondgaat, gelijk is aan de met $\frac{1}{c}$ vermenigvuldigde hoeveelheid electriciteit, die per tijdseenheid door het oppervlak heenstroomt, als de algebraïsche teekens geschikt gekozen worden. Men krijgt de eerste der formules als men voor het begrensde oppervlak dat van een oneindig kleinen rechthoek neemt, waarvan de zijden evenwijdig aan de y- en de z-as loopen.

De volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t} \quad . \; . \; (8)$$

geven antwoord op de vraag: wanneer het magnetisch veld verandert, welke electrische krachten werken dan? Zij vormen dus de vergelijkingen voor de inductiewerkingen, en kunnen uit de bekende fundamenteele wet voor deze werkingen worden afgeleid door een redeneering die veel gelijkt op die waardoor men tot de formules (7) komt.

Bijzonder treffend is, dat deze weinige vergelijkingen de geheele electriciteitstheorie bevatten, althans pretendeeren zulks te doen.

Wij kunnen b.v. vragen: welke wetten beheerschen de electromagnetische verschijnselen in den vrijen aether? Wij hebben in (5) en (7) slechts $\varrho = 0$ te stellen, en komen dan tot de vergelijkingen van MAXWELL.

Hieruit volgt verder dat de constante c voorstelt de voortplantingssnelheid van het licht in den aether. De vergelijkingen van MAXWELL laten namelijk voortplanting van trillingen toe met eene voortplantingssnelheid c. Meer algemeen volgt uit die vergelijkingen, dat alle electrische en magnetische verschijnselen zich met de snelheid c voortplanten.

Aan de boven gegeven vergelijkingen moet intusschen nog éénе vergelijking toegevoegd worden, n.l. de vergelijking die antwoord geeft op de vraag: wat is de kracht die in een electro-

magnetisch veld op een electron werkt? Deze kracht wordt per eenheid van lading gegeven door de formule:

$$\mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

De componenten dier kracht zijn:

$$\mathbf{d}_x + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_y \, \mathbf{h}_z - \mathbf{v}_z \, \mathbf{h}_y), \; \mathbf{d}_y + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_z \, \mathbf{h}_x - \mathbf{v}_x \, \mathbf{h}_z),$$
$$\mathbf{d}_z + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_x \, \mathbf{h}_y - \mathbf{v}_y \, \mathbf{h}_x) \ldots \quad (10)$$

De kracht bestaat blijkbaar uit twee deelen. Het eerste deel, **d**, is het gevolg van de aanwezigheid van het electrische veld. Daarbij komt een tweede deel, dat afkomstig is van het magnetische veld. De grootte van dit deel wordt aangegeven door $\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$.

Daarin stelt het teeken $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$ een vector voor, loodrecht op het vlak door **v** en **h** gebracht, en gericht naar die zijde, van waar gezien de wenteling van **v** naar **h** tegengesteld is aan de beweging der wijzers van een uurwerk. De grootte van den vector wordt gegeven door het oppervlak van het op **v** en **h** beschreven parallelogram. Wij merken hierbij op dat bij bovenstaande formules een geschikte keus van de richtingen der positieve coördinaatassen ondersteld is, zoo n.l. dat wanneer **v** met OX en **h** met OY samenvalt, de vector $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$ de richting van OZ krijgt.

De laatstgenoemde kracht openbaart zich b.v. wanneer we een magneet in de nabijheid van een kathodestraalbundel brengen. Plaatsen wij de eene pool van den magneet in een horizontaal vlak zijdelings bij den horizontaal gerichten kathodestraalbundel, dan zien wij dezen in verticale richting afwijken.

Met een tweede voorbeeld van de werking van deze kracht hebben wij te doen als wij een metaaldraad beschouwen, waarin een electrische stroom loopt, in een magnetisch veld. Op den stroomgeleider wordt dan een kracht K uitgeoefend in den zin als in Fig. 2 is aangegeven.

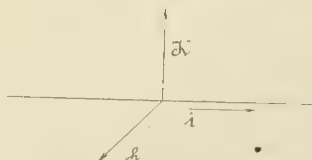


Fig. 2.

Ten slotte kunnen wij denken dat een koperdraad geplaatst is in een magnetisch veld, en daarin verplaatst wordt, op de wijze als in Fig. 3 is aangegeven. Dan werkt een kracht op de electronen in de richting van den draad. Daardoor ontstaat in den draad een inductiestroom.

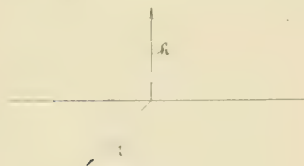


Fig. 3.

Wij gaan er nu toe over te doen zien, welke resultaten met de boven gegeven vergelijkingen zijn verkregen.

§ 5. In de eerste plaats stellen die vergelijkingen in staat voor de betrekking tusschen brekingsindex en dichtheid af te leiden [1]) de formule:

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\, d} = \text{const.} \qquad \text{(11)}$$

Het scherpst wordt deze betrekking op de proef gesteld door den brekingsindex van eenzelfde stof in damp- en vloeistoftoestand met elkander te vergelijken. Eene zoodanige vergelijking is weergegeven in de volgende tabel; de laatste kolom bevat den brekingsindex van den damp, zooals die met behulp van de formule uit den brekingsindex der vloeistof kan worden afgeleid. Natuurlijk hebben voor elken damp de twee waarden van n op denzelfden toestand betrekking, maar wij behoeven daarover niet uit te weiden.

	Vloeistof		Damp		
	d	n	d	n waargen.	n ber.
Water	0,9991	1,3337	0,000809	1,000250	1,000250
Zwavelkoolstof.	1,2709	1,6320	0,00341	1,00148	1,00144
Aethylaether. .	0,7200	1,3558	0,00332	1,00152	1,00151

Men vindt in het algemeen, dat verg. (11) niet volkomen nauwkeurig aan de waarnemingen aansluit. Zij geeft de veran-

[1]) H. A. Lorentz. Over het verband tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen. Verh. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam, deel 18, 1879. Wied. Ann. 9 (1880), p, 641. Dezelfde vergelijking was reeds vroeger uit de oude lichttheorie afgeleid door L. Lorenz. Ueber die Refractionsconstante. Wied. Ann. 11 (1880), p. 70.

deringen in het algemeen iets te groot. Men kan zeggen, dat zij ongeveer even goed voldoet als de empirische betrekking (2).

Ook de meesleepingscoëfficiënt is behoorlijk uit deze grondvergelijkingen afgeleid kunnen worden. Dit is daaraan te danken, dat de grondvergelijkingen in overeenstemming zijn met het relativiteitsprincipe. De meesleepingscoëfficiënt is dan ook uit het relativiteitsprincipe veel sneller af te leiden dan uit de grondvergelijkingen; hij zou in elke theorie worden gevonden, waarvan de grondslagen met dat principe in overeenstemming zijn.

§ 6. Wij zullen nu in het oog vatten de vrije ionen en electronen. Deze treden o. a. op: als positieve ionen in kanaalstralen en in α-stralen (heliumatomen, die met groote snelheden door verschillende radio-actieve stoffen worden uitgezonden), als negatieve electronen in de kathodestralen en in de β-stralen.

Daarvan zullen wij in deze § behandelen de wijze, waarop het gelukt is hunne snelheid **v** en de verhouding $\frac{e}{m}$ tusschen lading en massa te bepalen.

Wanneer een ion of electron zich in een electrisch veld beweegt, beschrijft het in het algemeen eene gekromde baan. Is het electrisch veld homogeen, d. w. z. $E =$ constant en overal gelijk gericht, dan is die baan een parabool (Fig. 4). In een punt, waar de bewegingsrichting loodrecht is op de electrische kracht, wordt de kromtsstraal r van de baan bepaald door

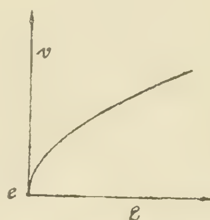


Fig. 4.

$$\frac{m v^2}{r} = e E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Beweegt een ion of electron zich in een magnetisch veld, dat op zeker oogenblik loodrecht op de bewegingsrichting gericht is, dan beschrijft het een gekromde baan in een vlak loodrecht op het magnetische veld. Is dit homogeen, dan is de baan een cirkel (Fig. 5).

De kracht, die op het zich bewegende deeltje werkt, wordt bepaald door het tweede deel van (9). Daaruit volgt, dat de kromtestraal

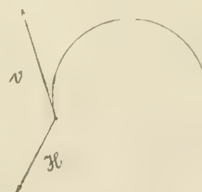


Fig. 5.

r' van de baan in een magnetisch veld H, loodrecht op de bewegingsrichting, gevonden wordt uit:

$$\frac{m v^2}{r'} = \frac{1}{c} e H v \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Wij kunnen een zelfden kathodestraal gelijktijdig twee afwijkingen, b.v. in onderling loodrechte richtingen, doen ondergaan, de eene ten gevolge van een electrisch veld, de andere ten gevolge van een magnetisch veld. Wij kunnen deze afwijkingen zich op eene photografische plaat doen afteekenen, ze daarop uitmeten, en de kromtestralen r en r' berekenen.

Uit (12) en (13) volgt:

$$v = \frac{E r}{H r'} c, \qquad \frac{e}{m} = \frac{v^2}{E r}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

zoodat uit de waarnemingen de twee gezochte grootheden, de snelheid v en de verhouding $\frac{e}{m}$ van lading en massa kunnen worden gevonden.

Voor gebonden electronen kan men een waarde voor $\frac{e}{m}$ afleiden uit het ZEEMAN-effect of uit de daarmede samenhangende magnetische draaiing van het polarisatievlak (SIERTSEMA)[1]).

Bezien wij het ZEEMAN-effect iets nader.

We denken een electron, dat zich onder de werking van eene, steeds naar een vast punt O gerichte, quasi-elastische kracht $k r$, in een cirkel om O kan bewegen (Fig. 6).

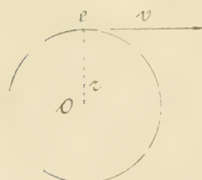


Fig. 6.

Zij nu een magnetisch veld H aangebracht loodrecht op het vlak van teekening. Het electron beweegt zich dan onder de werking van eene kracht

$$k r \pm \frac{e v H}{c}$$

[1]) L. H. SIERTSEMA. Berekening van $\frac{e}{m}$ uit de magnetische draaiing van het polarisatievlak, voor stoffen zonder absorptieband in het zichtbare spectrum. Versl. K. Ak. van Wet. Amsterdam 11 (1902), p. 499, Leiden Communications No. 82.

en kan ook nu een cirkel doorloopen. Daarbij geldt het teeken + of — naar gelang van de richting van het magnetisch veld in verband met de richting van omloopen in den cirkel. Er kunnen zoo bij bepaalde sterkte en richting van het veld twee verschillende cirkels doorloopen worden, in tegengestelde richting, en met een verschillend aantal omloopen in de tijdseenheid. Zij dit aantal omloopen n, zoodat $v = 2\pi r n$, dan zal n gevonden worden uit:

$$4\pi^2 r m n^2 = k r \pm \frac{2\pi r n e H}{c}$$

of

$$4\pi^2 m n^2 = k \pm \frac{2\pi n e H}{c}.$$

Noemen wij n_0 het aantal omloopen in de tijdseenheid voor het geval dat $H = 0$:

$$4\pi^2 m n_0^2 = k,$$

dan vinden wij na substitutie van deze waarde van k in de vorige vergelijking, en deeling door $4\pi^2 m$:

$$n^2 = n_0^2 \pm \frac{H}{2\pi c} \frac{e}{m} n_0.$$

Hierin is in den laatsten term in het tweede lid n vervangen door n_0, wat geoorloofd is daar deze term steeds klein is vergeleken met den anderen.

Uit de laatste vergelijking volgt, als men weder in aanmerking neemt dat de laatste term van het tweede lid klein is:

$$n = n_0 \pm \frac{H}{4\pi c} \frac{e}{m}.$$

Behalve in deze twee cirkels, kan het electron ook trillen volgens eene rechte lijn in de richting van het magnetische veld, en wel met de frequentie n_0, daar bij deze beweging het magnetische veld geen kracht op het electron uitoefent.

Een lichaam bevattende een aantal dergelijke gebonden electronen, geplaatst in een magnetisch veld, zal dus gelijktijdig licht met drie verschillende frequenties uitzenden. Op deze wijze wordt in de elementaire theorie van het ZEEMAN-effect het optreden van een triplet verklaard.

Daarbij zien wij tevens, dat uit de wijdte van het triplet, de waarde van $\frac{e}{m}$ van deze gebonden electronen kan worden afgeleid.

De hier genoemde methoden hebben nu geleid tot uitkomsten betreffende $\frac{e}{m}$ van de electronen, waarvan wij slechts de volgende noemen:

Kathodestralen,	KAUFMANN[1])	1,86.10[7]
„	CLASSEN [2])	1,773.10[7]
β-stralen,	WOLZ [3])	1,767.10[7]
„	NEUMANN [4])	1,765.10[7]
ZEEMAN-effect,	LOHMANN [5])	1,787.10[7].

De overeenstemming van de waarde van $\frac{e}{m}$ afgeleid uit het ZEEMAN-effect met de andere boven gegeven waarden van $\frac{e}{m}$ voert wel tot het besluit, dat de deeltjes die in een lichtbron de lichtuitstraling bewerkstelligen, dezelfde zijn als die, welke zich in de kathodestralen en de β-stralen voortbewegen. Intusschen moet de genoemde overeenstemming niet te hoog worden aangeslagen. Immers, de elementaire theorie, die wij van het ZEEMAN-effect gegeven hebben, blijkt slechts zelden van toepassing te zijn. Het komt dus daarop neer, dat er wel spectraallijnen zijn, die een zoodanig triplet geven, dat de daaruit bere-

---

[1]) W. KAUFMANN, Die magnetische Ablenkbarkeit electrostatisch beeinflusster Kathodenstrahlen. Ann. Phys. u. Chem. 65 (1898), p. 431.

[2]) J. CLASSEN. Eine Neubestimmung von $\frac{e}{m}$ für Kathodenstrahlen. Physik. ZS. 9 (1908), p. 762. KAUFMANN en CLASSEN leiden $\frac{e}{m}$ af uit de magnetische afwijking eenerzijds, en eene betrekking tusschen v^2, $\frac{e}{m}$ en het potentiaalverschil, dat door de kathodestralen longitudinaal doorloopen is, anderzijds.

[3]) K. WOLZ. Die Bestimmung von e/m_0. Ann. d. Phys. (4) 30 (1909), p. 273.

[4]) G. NEUMANN. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. Ann. d. Phys. (4) 45 (1914), p. 529. CH. SCHAEFER. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. (Ergänzungen zu der gleichnamigen Arbeit des Herrn G. NEUMANN.) Ann. d. Phys. (4) 49 (1916), p. 934.

[5]) Zie bv. P. ZEEMAN. Magneto-optische Untersuchungen. Leipzig 1914, p. 71.

kende $\frac{e}{m}$ met de andere daarvoor gevonden waarden overeenstemt.

In tegenstelling met de negatieve deeltjes werd voor de positieve, die zich in de α-stralen voortbewegen, een veel kleiner getal voor $\frac{e}{m}$ gevonden. De proeven van RUTHERFORD en ROBINSON [1]) gaven $4{,}82 \times 10^3$. Hieruit volgt dat bij de α-stralen een zelfde lading door eene veel grootere massa gedragen wordt dan dat bij de β-stralen het geval is.

Opgemerkt zij nog dat bij de opgaven in deze § de lading e in electromagnetische eenheden is uitgedrukt gedacht.

Voor de snelheden, waarmede de betreffende deeltjes zich voortbewegen, werd gevonden:

voor α-stralen: ongeveer $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{15}$ van de lichtsnelheid.

voor β-stralen: tot 0,9 lichtsnelheid.

§ 7. Terwijl in de vorige § de verhouding van lading tot massa werd beschouwd, stellen wij nu de vraag: hoe is het met de grootte der lading zelf gesteld?

Herinneren we ons daartoe eerst hoe de stand van zaken is bij de electrolytische ionen. Uit de wetten van FARADAY over de electrolyse besluiten wij dat alle éénwaardige ionen eene even groote electrische lading dragen, die positief kan zijn zooals b.v. bij K en H, of negatief zooals b.v. bij Cl.

Tweewaardige ionen dragen eene dubbele lading, enz.

Dit alles doet er aan denken, dat er in de natuur een fundamenteele eenheidslading is, de lading van een eenwaardig electrolytisch ion. De grootte van deze eenheidslading berekenen wij als volgt:

Een stroom van 1 amp. scheidt per seconde 0,01045 mg. waterstof af, d. i.:

$$1{,}045 \times 10^{-5} \times 62 \times 10^{22} = 65 \times 10^{17} \text{ atomen,}$$

als men voor het aantal molekulen in een grammolekuul het door PLANCK uit de verschijnselen der warmtestraling afgeleide getal 62×10^{22} neemt [2]).

---

[1]) E. RUTHERFORD and H. ROBINSON. The Mass and Velocities of the α Particles from Radio-active Substances. Phil. Mag. (6) 28 (1914), p. 552.

[2]) Volgens MILLIKAN (Zie volgende §) bedraagt dit aantal $6{,}06 \times 10^{23}$.

De gezamenlijke lading van deze atomen is één coulomb $= 3 \times 10^9$ electrostatische eenheden. Dus:

$$e = \frac{3 \times 10^9}{65 \times 10^{17}} = 4,6 \times 10^{-10} \text{ electrostatische eenheden.}$$

§ 8. Het is gebleken, dat de negatieve electronen steeds deze zelfde eenheid van lading (met het negatieve teeken genomen) bezitten. J. J. THOMSON [1]) is wellicht de eerste geweest, die dit geconstateerd heeft.

De lading van een gas-ion, positief of negatief, en van een α-deeltje, is gelijk aan deze elementaire lading of een veelvoud ervan.

In den laatsten tijd is het aan MILLIKAN [2]) gelukt heel scherp te bewijzen, dat alle ladingen gelijk zijn aan of een veelvoud zijn van die van een eenwaardig electrolytisch ion. MILLIKAN voerde door middel van een verstuiver bij O (Fig. 7) heel kleine

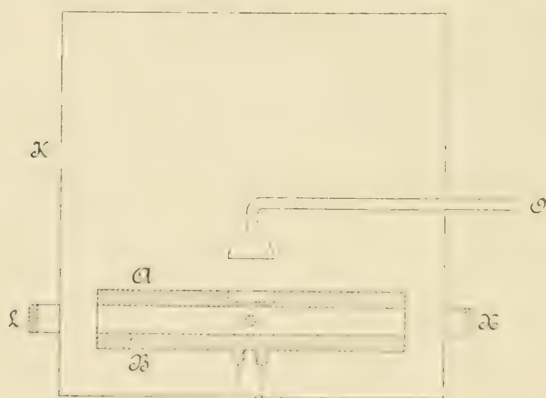


Fig. 7.

oliedruppeltjes in, in een zorgvuldig stofvrij gemaakte, op constante temperatuur gehouden kamer K. In deze kamer bevindt zich een luchtcondensator, bestaande uit twee aan de binnenzijde

[1]) J. J. THOMSON. On the Masses of the Ions in Gases at Low Pressures. Phil. Mag. (5) 48 (1899), p. 547.

[2]) R. A. MILLIKAN. Über die elektrische Elementarladung und die Avogadrosche Konstante. Physik. ZS. 14 (1913), p. 796. Uitvoeriger: Phys. Rev. (2) 2 (1913), p. 109. A new Determination of e, N, and related Constants. Phil. Mag. (6) 34 (1917), p. 1.

zoo volkomen mogelijk vlak gepolijste en evenwijdig aan elkaar opgestelde metaalplaten A en B. In de plaat A bevinden zich eenige zeer kleine openingen, waardoor soms een enkel oliedruppeltje naar binnen, tusschen de condensatorplaten, geraakt.

Dit oliedruppeltje kan eene electrische lading hebben. Is de lucht tusschen de platen geïoniseerd, b.v. door er door X Röntgenstralen in te laten vallen, dan zal het oliedruppeltje van tijd tot tijd een positief of negatief ion opvangen en dan dus zijne lading veranderen.

Is er geen electrisch veld, dan valt de druppel met een snelheid, die na onmerkbaar korten tijd standvastig wordt.

Door tusschen A en B een spanningsverschil aan te brengen, kan men de snelheid grooter of kleiner maken, of ook den druppel doen stijgen of zwevend houden [1]).

De beweging van den druppel, die door eene voor L geplaatste lamp verlicht wordt, wordt met een microscoop met kruisdraden waargenomen, en de tijd gemeten, dien de druppel noodig heeft om den weg tusschen twee draden af te leggen.

Wat kan nu uit die beweging worden afgeleid?

Noemen wij:

Massa van den druppel	m
Dichtheid van den druppel	s
Straal „ „ „	a
Wrijvingscoëfficiënt der lucht	η
De weerstand, dien de druppel bij de snelheid v ondervindt zij.	αv
Het electrische veld (naar boven positief gerekend)	E

Bij het vallen van den druppel onder de werking van de zwaartekracht alleen ($E = 0$) geldt:

$$m g = \alpha v$$

of

$$v = \frac{m g}{\alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

bij het stijgen onder den invloed van het electrische veld E:

[1]) Terwijl tusschen A en B het electrische veld is aangebracht, vangt de druppel bijna nooit een ion; wel is dit laatste het geval als er geen electrisch veld is.

$$e\,E - m\,g = \alpha\,v'$$

of
$$v' = \frac{e\,E - m\,g}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Dus:

$$e = \frac{\alpha}{E}\,(v + v') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Met behulp van deze vergelijking is de electrische lading e van den druppel af te leiden. Daartoe maken wij voor den weerstandscoëfficiënt α gebruik van de wet van STOKES:

$$\alpha = 6\,\pi\,\eta\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Uit deze formule en (15), waarin voor het geval dat van den opwaartschen druk van de lucht, die nog in den toestel aanwezig is, wordt afgezien, $m = \frac{4}{3}\pi\,a^3 s$ te stellen is, kan men a en α berekenen.

Daartoe is de wrijvingscoëfficiënt η van de lucht door MILLIKAN nog eens opzettelijk bepaald.

Wij kiezen als voorbeeld uit de door hem medegedeelde waarnemingen de volgende:

Een druppel doorliep steeds een afstand van 1,021 cm.; bij het vallen in 11,88 sec., bij het stijgen in 140,565 sec.

$$v = \frac{1{,}021}{11{,}88} = 0{,}0859 \;;\; v' = \frac{1{,}021}{140{,}565} = 0{,}0073$$

$$\eta = 0{,}000\ 1824 \;;\; s' = 0{,}9199 - 0{,}0013 = 0{,}9186$$ [1])

Uit (15) en (18) berekent men dan:

$$a = 0{,}000\ 280 \quad \text{en} \quad \log \alpha = 3{,}9830 - 10.$$

De afstand der platen was 1,6 cm., het potentiaalverschil 5085 Volts. Hieruit volgt:

$$E = \frac{5085.10^8}{1{,}6} \cdot \frac{1}{3.10^{10}} = 10{,}6.$$

Dan volgt uit (17):

$$e = 84{,}5 \times 10^{-10} \text{ electrostat. eenheden.}$$

[1]) Hier is van de dichtheid s de dichtheid der lucht afgetrokken ten einde met den opwaartschen druk rekening te houden.

Nadat de lading van den druppel veranderd was, werd waargenomen dat de voor het stijgen benoodigde tijd bedroeg 79,60 sec. Toen was dus $v' = 0{,}0128$, waaruit verder volgt: $e = 89{,}5 \times 10^{-10}$.

De verandering der lading heeft dus bedragen $5{,}0 \times 10^{-10}$.

Vergelijken wij deze uitkomst met de lading van een eenwaardig elektrolytisch ion, die wij in § 7 berekend hebben. Wij vonden daar $4{,}6 \times 10^{-10}$, waarbij op te merken is, dat wij, teneinde zeker te zijn dat de aldaar berekende grootheid uit waarnemingen van geheel anderen aard is afgeleid, voor het getal van AVOGADRO de waarde hebben gekozen, die PLANCK uit de theorie der straling heeft afgeleid. Aangezien laatstgenoemde waarde eenigszins onzeker is, kunnen wij de twee waarden als samenvallend beschouwen, en besluiten wij dus dat in het beschouwde geval de verandering van de lading van den oliedruppel gelijk was aan de lading van een eenwaardig electrolytisch ion.

Een ander maal was de snelheid bij het stijgen eerst 0,0131 en na verandering van e 0,0241. De verandering der lading is toen twee maal zoo groot geweest als zoo even, want de verandering in de stijgsnelheid was nu 0,0110, en in het vorige geval 0,0055.

De geheele reeks waarnemingen, die met dezen zelfden druppel gedaan zijn, levert de volgende veranderingen in stijgsnelheid: $10^{-4} \times 330$, 383, 55, 165, 274, 220, 166, 440, 498, 396, 110. Deze veranderingen zijn alle te beschouwen als veelvouden van 0,0055. De druppel heeft dus telkens een zelfde lading of een veelvoud van deze lading gekregen. MILLIKAN berekent uit deze geheele waarnemingsreeks $e = 4{,}991 \times 10^{-10}$.

De waarnemingsreeksen gedaan met andere druppels, die dus een anderen straal hadden, gaven wel is waar voor e getallen van dezelfde orde van grootte, maar deze getallen vertoonden toch duidelijke verschillen, die met de grootte van den straal van den druppel in verband bleken te staan.

II.

§ 9. Wij eindigden de vorige maal met de bespreking van de proeven van MILLIKAN, welke aantoonen dat de electriciteit eene atomistische structuur bezit, dat er dus eene elementaire lading is, waarvan alle ladingen veelvouden zijn. Dit werd afgeleid uit

het feit, dat de stijgsnelheid der oliedruppeltjes telkens met eenzelfde bepaald bedrag of een veelvoud hiervan veranderde.

Intusschen was er vooreerst nog eene moeilijkheid.

Bij de proeven van MILLIKAN werd n.l. eerst voor de elementaire electrische lading een des te grooter waarde gevonden, naarmate (bij eenzelfden druk van de lucht in den condensator) de straal a van het oliedruppeltje kleiner was. Dit is hieraan te wijten, dat de formule van STOKES voor den weerstandscoëfficiënt

$$\alpha = 6\,\pi\,\eta\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

in het onderhavige geval niet geheel juist is. Bij de afleiding van de wet van STOKES is aangenomen, dat het gas, waarin de druppel zich beweegt, langs het oppervlak ervan niet glijdt. Dit is echter, wanneer de straal van den druppel de grootte van de gemiddelde vrije weglengte in het gas gaat naderen, wel het geval. Men moet dan aan (18) eene correctie aanbrengen, en wel moet in (18) de wrijvingscoëfficiënt η der lucht vervangen worden door

$$\eta' = \frac{\eta}{1 + \frac{q}{a}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

waarin q eene constante is. Doet men dit, dan krijgt men goed overeenstemmende waarden.

Wanneer men uit (18) en (15), in acht nemende dat $m = \frac{4}{3}\pi a^3 s$, a elimineert en aldus eene waarde van α afleidt, en daarna deze waarde in (17) substitueert, dan vindt men e evenredig met $\eta^{3/2}$.

Hierin moet nu η door η' volgens (19) vervangen worden. Noemen wij e_1 de waarde, die voor e verkregen wordt wanneer op deze correctie niet gelet wordt, dan volgt:

$$e = \frac{e_1}{\left(1 + \frac{q}{a}\right)^{3/2}}$$

of

$$e_1^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{q}{a}\right).$$

MILLIKAN zette in eene grafische voorstelling $e_1^{\frac{2}{3}}$ als functie

van $\frac{1}{a}$ uit, en daarbij bleek, dat de verschillende punten inderdaad zeer mooi op eene rechte lijn kwamen te liggen [1]).

Uit deze rechte lijn is nu de waarde van e te verkrijgen doordat het snijpunt met de as der ordinaten direct de waarde van $e^{\frac{2}{3}}$ doet kennen.

Hierbij kan nog opgemerkt worden, dat de aldus voor e verkregen uitkomst niet meer afhankelijk is van de theoretische juistheid van den vorm, die voor de correctie is aangenomen. De uitkomst kan beschouwd worden als te zijn verkregen door eene empirische extrapolatie tot het geval van groote druppels, en voor deze is de wet van STOKES nog eens afzonderlijk bewezen.

MILLIKAN's aldus verkregen einduitkomst is:

$$e = 4{,}774\,(\pm\,0{,}005) \times 10^{-10} \text{ electrost. eenh.}$$

§ 10. FLETCHER [2]) heeft nog een tweeden weg gevolgd om aan te toonen dat bij de veranderingen in lading, die MILLIKAN's oliedruppels ondergaan, eene elementaire lading in het spel is, die overeenkomt met de lading van een eenwaardig electrolytisch ion. Deze tweede weg heeft het voordeel, dat hij geheel onafhankelijk is van elke onzekerheid in den weerstandscoëfficiënt α.

Als men met een electrisch veld van geschikte sterkte den druppel zwevende houdt, staat hij niet stil, maar vertoont hij de Brownsche beweging. Dit is zelfs eene ideale manier om de Brownsche beweging waar te nemen en te bestudeeren, daar de zwaartekracht bij deze proef door de werking van het veld geheel opgeheven wordt.

---

[1]) In de latere proeven varieerde MILLIKAN ook den druk der lucht in den condensator. Daar de in (19) uitgedrukte correctie afhangt van de verhouding $\frac{l}{a}$, als l de gemiddelde vrije weglengte is, en deze laatste omgekeerd evenredig is aan den druk p, zoo is dan $\frac{q}{a}$ te vervangen door $\frac{b}{pa}$ waarin nu b eene constante is. Voor deze proeven zette MILLIKAN dan ook $e_1^{\frac{2}{3}}$ uit als functie van $\frac{1}{pa}$, en vond hiervoor eene rechte lijn.

[2]) H. FLETCHER. A verification of the theory of Brownian movements and a direct determination of the value of Ne for gaseous ionisation. Phys. Rev. 33 (1911), p. 81.

Stel dat in een bepaalden tijd t de druppel in deze of gene richting, b.v. naar rechts (of naar links) op een afstand Δ van zijn oorspronkelijke plaats is gekomen.

Men kan Δ een groot aantal malen meten en het gemiddelde der waarden van Δ^2 opmaken.

Hiervoor heeft EINSTEIN [1]) de volgende formule gegeven, waarvan de afleiding niet geheel zonder bezwaar is, doch die goed uitkomt, en zeer vernuftig gevonden is:

$$\bar{\Delta^2} = \frac{2\,R\,T}{N\,\alpha}\,t, \quad \text{. . . . . (20)}$$

waarin $T =$ absolute temperatuur, $N =$ aantal molekulen in een grammolekuul (constante van AVOGADRO), $R =$ gasconstante voor een grammolekuul (optredende in de formule $p\,v = R\,T$).

Wij leiden uit (17) af:

$$e = \frac{\alpha}{E}\,\delta\,v', \quad \text{. . . . . (21)}$$

waarin e de elementaire electrische lading is, en $\delta\,v'$ de verandering in stijgsnelheid, die het gevolg is van eene verandering der lading van den druppel met één elementaire lading.

Uit (20) en (21) volgt:

$$N\,e = \frac{2\,R\,T\,t}{E\,.\,\Delta^2}\,.\,\delta\,v'.$$

Hierin is α weggevallen. Wij leeren dus, onafhankelijk van elke onzekerheid in den weerstandscoëfficiënt α, het *product* Ne kennen, wat juist zeer geschikt is om de quaestie uit te maken of de elementaire lading al of niet dezelfde is als die van een eenwaardig electrolytisch ion.

Is n.l. e_i de lading van een eenwaardig electrolytisch ion, dan kan men uit het electrochemisch aequivalent onmiddellijk het product Ne_i afleiden.

FLETCHER vond $Ne = 2{,}88 \times 10^{14}$ (1735 metingen van Δ bij 9 druppels). Uit de nauwkeurigste bepalingen over de electrolytische afscheiding van zilver volgt $Ne_i = 2{,}896 \times 10^{14}$.

---

[1]) A. EINSTEIN. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. d. Phys. (4) 17 (1905), p. 549. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Ann. d. Phys. (4) 19 (1906), p. 371.

Hiermede is, onafhankelijk van de kennis van N, bewezen, dat men altijd met dezelfde elementaire lading te doen heeft.

Ofschoon dit alles zeer overtuigend is, heeft het toch zeer ernstige bestrijding gevonden, vooral van de zijde van EHRENHAFT [1]). Deze natuurkundige bestrijdt de atomistische structuur der electriciteit, beweert in ieder geval dat hij ladingen of ladingsveranderingen heeft geconstateerd, die kleiner zijn dan de boven genoemde elementaire lading, en die hij daarom subelectronen noemt.

Spreker gelooft intusschen dat er wel niet aan te twijfelen valt of MILLIKAN en FLETCHER hebben gelijk. Den volgenden keer zal nog op een geheel andere wijze blijken, dat wij met het aannemen eener elementaire lading op den goeden weg zijn.

§ 11. Wij zullen nu met elkander vergelijken de waarde van $\frac{e}{m}$ voor een electron (zie § 6) en die voor een waterstofion.

De lading van $1{,}045 \times 10^{-5}$ gram waterstof in een electrolyt is (§ 7) 0,1 electromagnetische eenheid. Dus voor een waterstofion:

$$\frac{e}{m} = \frac{0{,}1}{1{,}045 \times 10^{-5}} = 9570.$$

De waarde van $\frac{e}{m}$ voor negatieve electronen $1{,}77 \times 10^7$ (zie § 6) is 1850 maal zoo groot. Daar nu volgens de voorgaande §§ e in beide gevallen hetzelfde is, moet het verschil in de waarden van $\frac{e}{m}$ aan m toegeschreven worden, d. w. z. de massa van een negatief electron moet 1850 maal zoo klein zijn als die van een waterstofatoom.

Aan de negatieve electronen zit eigenlijk geen materie meer vast. Wel bezitten zij nog eene massa, die namelijk aan het electromagnetische veld, dat zij met zich dragen, te danken is.

Positieve ladingen worden steeds gevonden gedragen door atomen of atoomgroepen.

Dit laatste kan ook met negatieve ladingen het geval zijn. Wanneer zich nl. β-stralen of kathodestralen in lucht voort-

---

[1]) Zie b.v. diens jongste samenvatting: F. EHRENHAFT. Über die Teilbarkeit der Elektrizität. Ann. d. Phys. 56 (1918), p. 1.

bewegen, dan worden de negatieve electronen ten slotte door de atomen gevangen en vormen zij aldus negatief geladen gas-ionen.

In dit verband kan de vraag rijzen: hebben de druppels in de proeven van MILLIKAN wel ooit vrije electronen gevangen? Of namen zij soms gas-ionen op?

Hieromtrent is op te merken, dat MILLIKAN behalve met oliedruppels ook proeven heeft gedaan met glycerine en met kwik. Bij kwik veranderde hij de lading van den druppel door er ultraviolet licht op te laten vallen. Bij andere gelegenheid is bewezen dat bij het beschijnen van kwik met ultraviolet licht electronen van het kwik weggaan, zoodat dus bij deze proeven zeker vrije electronen in het spel zijn. Hierbij verkreeg MILLIKAN intusschen dezelfde uitkomsten als bij zijne proeven met oliedruppels.

Nog zij hierbij opgemerkt, dat MILLIKAN niet kon werken met waterdruppels, maar moest werken met stoffen die niet snel verdampen, ten einde een zelfden druppel gedurende langen tijd te kunnen waarnemen. Zoo was hij b.v. in staat een druppel 3 uren achtereen in het gezichtsveld te houden. Hij kon dan een groot aantal keeren het dalen en weer opstijgen van den druppel waarnemen, en de daarvoor verkregen afzonderlijke uitkomsten middelen, hetgeen noodig is om den invloed der Brown'sche beweging te elimineeren.

§ 12. Vrije electronen komen ook voor in metalen. Zij zijn het wier beweging den electrischen stroom in een metaal vormt. Daarentegen zijn de positieve ladingen vast aan de metaalatomen gebonden. De vraag doet zich voor: als in een metaal een electrische stroom loopt, is er dan zoo iets als stof in beweging? Is er dan massa in beweging?

Als voorbereiding voor de nadere beantwoording dezer vraag herinneren wij ons een eenvoudige lesproef, waarbij een verticale cilinder waarin water is gegoten, om zijne figuuras in draaiende beweging wordt gebracht. Men ziet dan, dat bij het in beweging zetten van den cilinder het water niet dadelijk meegaat. Omgekeerd draait na het ophouden der beweging van den cilinder het water nog eenigen tijd door, totdat de beweging ervan ten gevolge van de wrijving is uitgeput.

Ten einde dit verder mathematisch te behandelen, in zoodanigen vorm, dat de uitkomst voor toepassing op het overeen-

komstige electrische vraagstuk geschikt is, denken wij het volgende geval (zie Fig. 8).

Een buis B, die den vorm van een cirkelvormigen ring heeft, is met water gevuld en kan om de lijn, loodrecht op het vlak van den ring door het middelpunt gaande, wentelen.

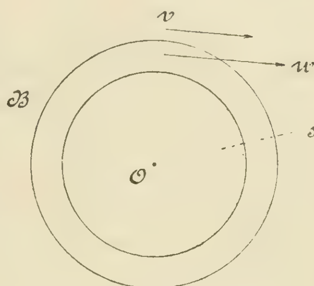


Fig. 8.

De snelheid van den wand der buis zij v, de snelheid van de vloeistof in de buis ten opzichte van den wand w. Zij de massa van de vloeistof m, de weerstand dien de vloeistof bij hare beweging ten opzichte van den buiswand ondervindt αw (α eene constante), waarbij wij beide (massa en weerstand) per lengte-eenheid rekenen.

De beweging van de vloeistof wordt dan bepaald door de vergelijking

$$m \frac{d(v+w)}{dt} = -\alpha w. \qquad (22)$$

In den tijd dt stroomt door een bepaalde, zich met de buis meebewegende doorsnede s van de buis een vloeistofkolom van de lengte

$$w\, dt = -\frac{m}{\alpha} d(v+w) \qquad (23)$$

Zijn dus de snelheden eerst v_1, w_1, en later v_2, w_2, dan is in den tusschentijd een kolom van de lengte

$$-\frac{m}{\alpha}[(v_2+w_2)-(v_1+w_1)] \qquad (24)$$

doorgestroomd.

Stel nu dat de buis zich eerst eenigen tijd met de standvastige snelheid u beweegt en dan plotseling in rust wordt gebracht. Dan is eerst $v_1 = u$, $w_1 = 0$; later (als ook de vloeistof in rust is gekomen) is $v_2 = 0$, $w_2 = 0$. Dan volgt uit (24) voor de lengte van de doorgestroomde kolom

$$\frac{m}{\alpha} u \qquad (25)$$

§ 13. Wij beschouwen nu een cirkelvormige draadwinding, die plotseling in draaiende beweging wordt gezet om een as loodrecht op haar vlak en gaande door het middelpunt. De vrije negatieve electronen zullen dan tijdelijk wat bij den draad achterblijven. Wordt de draadwinding daarna weer stilgezet, dan zullen de electronen even doorschieten.

Dit constitueert een kortstondigen electrischen stroom. Immers, elke relatieve beweging van de electronen ten opzichte van het metaal hebben wij als een electrischen stroom op te vatten.

Wij kunnen de uitkomst verkregen in (25) op dit geval toepassen. Zij het aantal bewegelijke electronen in de lengte-eenheid van den draad n. In (25) moet dan m door $n\,m$ vervangen worden ($m =$ massa van één electron). De gezamenlijke lading dier electronen in een deel van de lengte $\frac{n\,m}{\alpha}\,u$ is dan de hoeveelheid electriciteit, die bij het plotseling tot rust brengen van den draad door een doorsnede vloeit, d. w. z. de sterkte i van den kortstondigen electrischen stroom. Deze wordt dus:

$$i = n\,e\,.\,\frac{n\,m}{\alpha}\,u = \frac{n^2\,e\,m}{\alpha}\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

De weerstand van den kring, in den gewonen zin van het woord, is [1])

$$r = \frac{2\,\pi\,a\,\alpha}{n^2\,e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

als a de straal van den kring is. Uit (27) en (26) volgt: [2])

[1]) Men vindt deze betrekking als volgt: Voor de vrije electronen in de lengte-eenheid van den draad geldt:

$$E\,n\,e = \alpha\,w.$$

als E de electrische kracht (= het potentiaalverval) voorstelt. Deze electrische kracht zou aanleiding geven tot een constanten electrischen stroom i, waarvan de grootte bepaald wordt door:

$$i = w\,n\,e = E\,.\,\frac{n^2\,e^2}{\alpha}\,.$$

Hieruit volgt voor den weerstand per lengte-eenheid $\frac{\alpha}{n^2\,e^2}$, en dus voor den geheelen draad de uitdrukking (27).

[2]) Ter vereenvoudiging is in den tekst niet gesproken van de zelfinductie. Zooals men weet is de kracht die tengevolge daarvan op de electriciteitseenheid

$$i = \frac{2\pi a u}{r} \cdot \frac{m}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Deze formule geldt ook als men de enkele draadwinding vervangt door een draadklos, mits dan ook $2\pi a$ vervangen wordt door de gezamenlijke lengte der windingen. Dit zou echter als de klos kort gesloten was geen voordeel opleveren, daar de weerstand r in dezelfde reden vergroot wordt als de lengte.

Wel wordt door een grooter aantal windingen het effect vergroot als in de keten een galvanometer is opgenomen. Dan moet nl. in den weerstand r de weerstand van den galvanometer mede begrepen worden. Het is duidelijk dat dan bij vergrooting van het aantal windingen de totale weerstand r niet in dezelfde mate toeneemt als de gezamenlijke lengte der windingen.

Het hier besproken verschijnsel is waargenomen door Tolman en Stewart [1]). Zij lieten (Fig. 9) een klos K, bestaande uit 600 windingen door middel van een motor om een verticale as ronddraaien. De klos werd vervolgens plotseling geremd. De daarbij optredende stroom werd door twee draden d naar een galvanometer geleid. Deze draden waren, ten einde een sleepcontact te vermijden, naar boven zeer lang, zoodat zij zich bij de draaiing om elkander heen konden wikkelen.

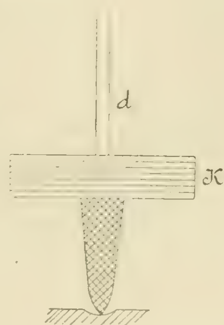


Fig. 9.

Verder moest op de volgende foutenbron gelet worden. Bij het wentelen wordt het door de windingen omsloten oppervlak ten gevolge van de centrifugaalkracht iets vergroot. Bij het remmen van den klos trekken zij zich weer samen en daarbij doet het magnetisch veld der aarde een inductiestroom ontstaan,

werkt, evenredig met de afname per tijdseenheid van de stroomsterkte. Deze laatste wordt door de relatieve snelheid w van de electronen ten opzichte van den draad bepaald en men moet dus in het tweede lid van (22) als wij die vergelijking op de electronen toepassen, een term $-\lambda \frac{dw}{dt}$ toevoegen, waarin λ een constante is. Bij de bewerking die tot de uitkomst (26) heeft geleid, verdwijnt echter die term.

[1]) R. C. Tolman and T. D. Stewart. The electromotive force produced by the acceleration of metals. Phys. Rev. (2) 8 (1916), p. 97. Proc. Am. Nat. Ac. 3 (1917), p. 58.

die van dezelfde orde van grootte bleek als het gezochte effect. Het ontstaan van dezen inductiestroom werd verhinderd door de verticale component van het aardmagneetveld te compenseeren.

De door Tolman en Stewart verkregen resultaten zijn zeer bevredigend. De richting van den stroom was zoo als zij bij bewegelijke *negatieve* electronen moet zijn. Voor m werd bij koper, aluminium en zilver $\frac{1}{1660}$, $\frac{1}{1590}$ en $\frac{1}{1540}$ van de massa van een waterstofatoom gevonden, waarden die alle iets grooter zijn dan de vroeger (§ 11) gevonden waarde.

§ 14. Wij brengen nu aan de in § 12 genoemde buis deze verandering aan (zie Fig. 10), dat zij slechts langs een deel van den cirkel (bijna den geheelen cirkel) loopt, van de uiteinden A en B daarvan naar punten C en D op de as, nabij het middelpunt, en van C en D in tegengestelde richting langs de as, C P en D Q. De buis P C A B D Q zij geheel met water gevuld. Wij denken nu dat dit water in beweging wordt gebracht door krachten die werken in een der rechte deelen C P en D Q. Dan krijgt de vloeistof in het cirkelvormig deel een moment van hoeveelheid van beweging ten opzichte van de as.

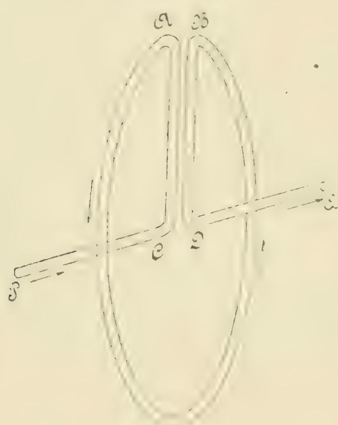


Fig. 10.

Wij herinneren ons nu de stelling uit de mechanica, dat indien op een stelsel geen krachten werken die een moment hebben ten opzichte van een as, het totale moment van de hoeveelheid van beweging van het stelsel met betrekking tot die as onveranderd blijft.

Hieruit volgt dat de buiswand een even groot moment van hoeveelheid van beweging moet krijgen als de vloeistof, doch in tegengestelde richting.

Is l de lengte van het cirkelvormige deel, a de straal, v de snelheid der vloeistof, en is m weer de massa van de vloeistof per lengte-eenheid van de buis, dan is dat moment van hoeveelheid van beweging:

$$M = l\,m\,a\,v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Als de kring bijna gesloten is:

$$M = 2\,\pi\,a^2\,m\,v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

De buis zal dus even, in eene richting tegengesteld aan die van de beweging van het water, gaan draaien. Slechts even, omdat die beweging door de wrijving wordt uitgeput.

Men kan dit verschijnsel gemakkelijk demonstreeren als men een glazen buis, die tot een spiraal is gewonden, en waarvan de uiteinden als in Fig. 10 in de as van de spiraal zijn gebracht, met de as verticaal bifilair ophangt, met water vult en dit dan door het openen van een klemkraan plotseling laat uitstroomen. Daarbij is het gewenscht, dat het bovenste uiteinde van de buis tot een reservoir is verwijd, of onder een trechter is geplaatst, opdat gezorgd kan worden, dat het vloeistofniveau niet onmiddellijk het gewonden gedeelte van de buis bereikt.

§ 15. Op soortgelijke wijze als de buis van de vorige § zal een cirkelvormige winding, als er een electrische stroom in ontstaat, een moment van hoeveelheid van beweging krijgen, dus plotseling in wenteling gebracht worden. Tusschen de stroomsterkte i en de snelheid v der electronen bestaat het verband

$$i = n\,e\,v, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

als n weder het aantal vrije elektronen per lengte-eenheid is.

Uit (30) vinden wij nu, m door $n\,m$ vervangende, zoodat m hier de massa van een electron is:

$$M = 2\,\pi\,a^2\,n\,m\,.\,\frac{i}{n\,e} = 2\,\pi\,a^2\,i\,.\,\frac{m}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

De cirkelvormige stroom i werkt naar buiten als een vlakke magneet, waarvan het magnetisch moment gegeven wordt door

$$\mu = \pi\,a^2\,i, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

als i in electromagnetische eenheden is uitgedrukt, hetgeen wij dan ook van e zullen onderstellen.

Uit (32) en (33) volgt dus de mooie betrekking:

$$M = 2\,\mu\,\frac{m}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

In deze betrekking tusschen het moment van hoeveelheid van

beweging, hetwelk de winding verkrijgt, en het ontstane magnetisch moment, treedt het aantal der rondloopende electronen niet meer op. De formule geldt ook voor een draadklos.

Deze proef, waarbij dus een draadklos bij het ontstaan of ophouden van een electrischen stroom in beweging moet geraken, is nog niet gelukt. Wel hebben echter EINSTEIN en DE HAAS [1]) aangetoond, dat een staafje ijzer, dat om zijn as kan wentelen, in beweging wordt gebracht als het in de richting van de lengte gemagnetiseerd wordt. Men heeft hier met de molekulaire stroomen van AMPÈRE te doen, en mocht men aannemen dat deze bij het magnetiseeren ontstaan, dan zou men, als ook de molekulaire stroomen in een rondloopen van negatieve elektronen bestaan, in het wezen der zaak hetzelfde als het zooeven besproken geval hebben. In werkelijkheid is er dit onderscheid, dat in het ijzer bij het magnetiseeren geen electrische stroomen *ontstaan*; de molekulaire stroomen van AMPÈRE zijn reeds van te voren aanwezig, zij worden alleen bij het magnetiseeren min of meer gelijk gericht. Intusschen beantwoordt aan het magnetisch moment dat hierdoor ontstaat een daaraan evenredig moment van hoeveelheid van beweging, terwijl er eerst, toen al de magnetische momenten der molekulen elkaar ophieven, geen resulteerend moment van hoeveelheid van beweging was. Men gevoelt dus dat de betrekking (34) van toepassing blijft [2]).

Bij deze proef waren vele moeilijkheden te overwinnen. Niettegenstaande dat gelukte het niet alleen EINSTEIN en DE HAAS het verwachte effect te constateeren, maar zij slaagden er zelfs in met behulp van (34) voor $\frac{e}{m}$ de waarde $1{,}8 \times 10^7$ te verkrijgen, welke waarde met de in § 7 gevondene zeer bevredigend overeenstemt. Hieruit kan wel besloten worden dat het dezelfde electronen als de aldaar beschouwde zijn, die in de molekulaire stroomen van AMPÈRE rondloopen en aldus het magnetisme veroorzaken.

§ 16. Een tegenhanger van het door EINSTEIN en DE HAAS

[1]) A. EINSTEIN en W. J. DE HAAS. Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stroomen van AMPÈRE. Versl. K. Ak. van Wet. Amsterdam 23 (1915), p. 1449. W. J. DE HAAS. Verdere proeven over het in een magneet aanwezige moment van hoeveelheid van beweging. Versl. K. Ak. van Wet. Amsterdam 24 (1915), p. 638.

[2]) Zie het aanhangsel onder 1.

waargenomen verschijnsel is een proef gedaan door BARNETT[1]). Deze vond namelijk dat een eerst onmagnetische ijzeren cilinder gemagnetiseerd wordt als hij om de as in wenteling gebracht wordt, en dit blijft, zoolang de beweging duurt.

Denken wij deze proef uitgevoerd met een diamagnetisch lichaam, dan hebben wij een geval dat analoog is aan het in §§ 12 en 13 besprokene. Van de eigenschappen van diamagnetische lichamen geeft men zich nl. rekenschap door aan te nemen dat rondom de deeltjes ervan electronen in bepaalde voorgeschreven banen kunnen rondloopen. Bestaat eerst zoodanige beweging nog niet, dan zal zij bij het aanzetten van een uitwendig magnetisch veld door een inductiewerking worden opgewekt, zoodat het lichaam een magnetisch moment krijgt. Ondervinden nu de electronen geen weerstand, dan zullen de kringstroomen en het magnetisch moment blijven bestaan, tot dat het uitwendige magnetische veld wordt opgeheven. Dan heeft een nieuwe inductiewerking plaats, die de rondloopende beweging der electronen tot staan brengt.

Het is nu duidelijk wat de invloed van een wentelende beweging van het geheele lichaam zal zijn. Bij het ontstaan der draaiing blijven de electronen in hun kringvormige banen achter; m. a. w. zij krijgen, ten opzichte van het lichaam, een omloopssnelheid in die banen. Deze relatieve omloopssnelheid — en de daardoor teweeggebrachte magnetisatie —, blijft bestaan tot het lichaam in rust wordt gebracht. Wij merken hierbij op dat, als in het geval van § 12 $\alpha = 0$ was, de door het in beweging brengen of stilzetten van de buis opgewekte vloeistofstroom steeds zou voortduren; evenzoo zou de electrische stroom bij de proeven van TOLMAN en STEWART blijven rondloopen, als $r = 0$ was.

Voor een ferro-magnetisch lichaam als ijzer, of een paramagnetisch lichaam is de voorstelling, die wij ons van het verschijnsel moeten maken, ingewikkelder. Toch kan men eene theorie ontwikkelen, die zoowel voor deze als voor de diamagnetische lichamen geldig is.

Men kan n.l. de volgende algemeene reciprociteitsstelling bewijzen[2]).

„Wanneer het ontstaan van een magnetisch moment μ in een

[1]) S. J. BARNETT. Magnetization by rotation. Phys. Rev. (2) 6 (1915), p. 239.
[2]) Zie het aanhangsel onder 2.

lichaam, in de richting van een lijn h, aan het lichaam een koppelstoot $\alpha \mu$ om de lijn h geeft, dan veroorzaakt een hoeksnelheid s om h dezelfde magnetisatie in het lichaam als een volgens h gericht magnetisch veld $-\alpha s$ er in zou opwekken.

Barnett heeft werkelijk bij zijn proeven een magnetisch effect van de rotatie van de goede orde van grootte verkregen.

Volgens de theorie had bij zijn proeven door de rotatie dezelfde magnetisatie moeten zijn opgewekt als door een magnetisch veld van $2{,}8 \times 10^{-5}$ gauss, d. i. ongeveer $\frac{1}{6500}$ van de horizontale intensiteit van het aardmagneetveld hier te lande, kan worden teweeggebracht. In werkelijkheid verkreeg Barnett slechts ongeveer de helft van deze magnetisatie.

Barnett stelde zich nog de vraag of misschien het aardmagnetisme een gevolg is van de aswenteling der aarde. Het antwoordt hierop luidt ontkennend. Het aardmagnetisme zou, als het dezen oorsprong had, slechts 2 tienduizendmillioensten van de werkelijke grootte hebben.

§ 17. *Proeven van Richardson* [1]. Een verhit metaal zendt voortdurend geladen deeltjes uit, veelal zoowel positieve als negatieve, maar bij voortgezette verhitting in het vacuum ten slotte alleen negatieve electronen. Men kan zich voorstellen, dat dit de vrije electronen in het metaal zijn, die aan de warmtebeweging deelnemen en dientengevolge uit het metaal ontwijken.

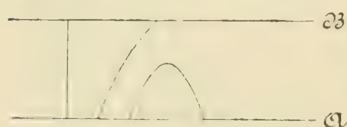


Fig. 11.

Richardson heeft de snelheden dier uitgezonden electronen gemeten. Tegenover het verhitte metaalplaatje A (Fig. 11) staat een tweede daaraan evenwijdige metaalplaat B, die met een electrometer verbonden is. Uit de snelheid waarmede de stand van dezen laatsten verandert, kan men afleiden hoeveel electronen in zekeren tijd B bereiken. Men kan dit doen, terwijl tusschen A en B een potentiaalverschil is aangebracht.

[1]) O. W. Richardson and F. C. Brown. The kinetic energy of the negative electrons emitted by hot bodies. Phil. Mag. (6) 16 (1908), p. 353. O. W. Richardson. The kinetic energy of the ions emitted by hot bodies. Phil. Mag. (6) 16 (1908), p. 890; (6) 18 (1909), p. 681.

In dit geval zullen, wanneer A een hoogeren potentiaal heeft dan B, en de electronen dus een naar A gerichte kracht ondervinden, niet alle van A vertrekkende electronen B bereiken. Zij zullen in het algemeen parabolen beschrijven; voor electronen met kleine snelheden zal de top dier parabool tusschen A en B liggen, d. w. z. deze electronen zullen weer naar A terugkeeren.

Noemen wij de potentialen van A en B φ_a en φ_b en zij $\varphi_a > \varphi_b$. De electronen kunnen B alleen dan bereiken als de component v volgens de loodlijn op A van de snelheid waarmee zij die plaat verlaten, een voldoende grootte heeft. Het aan die component beantwoordende arbeidsvermogen van beweging $\frac{1}{2} m v^2$ moet grooter zijn dan de arbeid die noodig is om de genoemde kracht over den afstand der platen te overwinnen, n.l. $e(\varphi_a - \varphi_b)$. Men kan dus bepalen voor hoeveel van de uitgezonden electronen

$$v > \sqrt{\frac{2\,e\,(\varphi_a - \varphi_b)}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

is. Door dit bij verschillende potentiaalverschillen te doen, kan men nagaan hoe de verschillende snelheden over de electronen verdeeld zijn. RICHARDSON vond dat hier dezelfde regel geldt als voor gasmolekulen (wet van MAXWELL) en dat de gemiddelde kinetische energie ε even groot is als die van een gasmolekuul bij dezelfde temperatuur. Zijn uitkomst is (met vrij groote afwijkingen)

$$N\varepsilon = 12{,}3 \times 10^7\, T \quad (N \text{ constante van AVOGADRO})$$

terwijl voor een gas

$$N\varepsilon = \frac{3}{2} R\, T = 12{,}4 \times 10^7\, T$$

is.

De stroom van negatieve electronen uitgezonden door een verhit metaal, of de *thermionische stroom*, zooals hij door RICHARDSON genoemd is, kan gemakkelijk aangetoond worden met behulp van een toestelletje, audion genaamd, dat in den laatsten tijd als detector of als geluidsversterker bij de radio-telegrafie gebruikt wordt. Het bestaat (Fig. 12) uit een gloeilamp waarin behalve de electroden voor den gloeidraad nog twee hulpelec-

troden zijn aangebracht: *c* en *d*, beide plaatjes, waarvan *c* met openingen voorzien is [1]). Bij de volgende proef doet slechts een dezer hulpelectroden dienst, bv. *c*.



Fig. 12.

Terwijl wij door *a b* een stroom zenden die den draad tot gloeien brengt, schakelen wij bij de eerste proef tusschen *a* en *c* een galvanometer, bij een tweede proef tusschen *b* en *c* (Fig. 13 *a* en *b*).

Onderstellen wij dat in den gloeidraad de stroom loopt van *a* naar *b*. Daar het gas tusschen *a b* en *c* geïoniseerd is, zal door den galvanometer een aftakstroom loopen in de richting van de pijl met enkele spits. Verder bewegen zich electronen vanaf *a b* naar *c*, aangegeven door de gebroken pijltjes. Deze vormen een thermionischen stroom in tegengestelde richting, aangegeven door de pijlen met dubbele spits. Bij de schakeling van Fig. 13*a* ondersteunen aftakstroom en

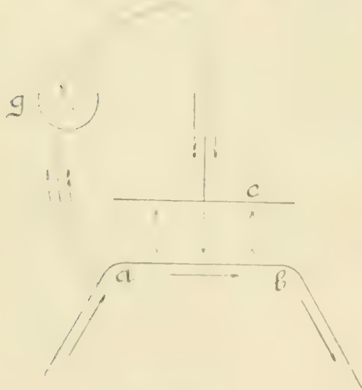


Fig. 13*a*.

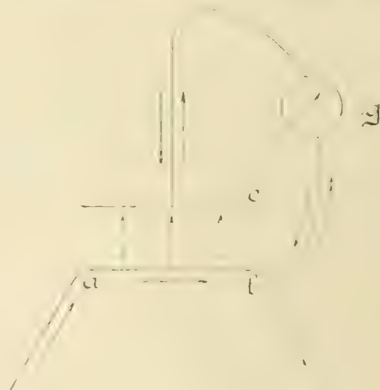


Fig. 13*b*.

thermionische stroom elkaar in den galvanometer, in Fig. 13*b* verzwakken zij elkander. Het halve verschil, of de halve som, der uitslagen van den galvanometer in de twee gevallen is een maat voor den thermionischen stroom.

§ 18. Wij zullen in deze § nog eens in herinnering brengen de theorie van DRUDE [2]) over de geleiding van warmte en electriciteit in metalen.

[1]) De hulpelectroden kunnen ook andere vormen hebben.

[2]) P. DRUDE, Zur Elektronentheorie der Metalle. Ann. d. Phys. (4) 1 (1900), p. 566; (4) 3 (1900), p. 369.

Volgens deze theorie bewegen zich in een metaal vrije electronen met zoodanige snelheden, dat de gemiddelde kinetische energie van een electron gelijk is aan de gemiddelde kinetische energie van voortgaande beweging van een gasmolekuul, te weten

$$\frac{3\,R\,T}{2\,N}\,.$$

Wij noemen u de hieraan beantwoordende snelheid, zoodat

$$\frac{1}{2}\,m\,u^2 = \frac{3\,R\,T}{2\,N} \quad \text{. . . . . (36)}$$

is, en nemen ter vereenvoudiging met DRUDE aan dat alle electronen zich met deze snelheid u bewegen.

Zij het aantal vrije electronen per volume-eenheid: n.

De electronen botsen telkens tegen een metaalatoom. Zij de gemiddelde vrije weglengte tusschen twee opeenvolgende botsingen l.

Evenals in de kinetische gastheorie reeds door CLAUSIUS werd afgeleid, is dan het geleidingsvermogen voor warmte [1]):

$$\sigma_w = \frac{R\,n\,l\,u}{2\,N} \quad \text{. . . . . (37)}$$

Beschouwen wij nu het geleidingsvermogen voor electriciteit.

Tusschen twee achtereenvolgende botsingen van een electron verloopt gemiddeld een tijd $\frac{l}{u}$. In dien tijd brengt een electrische kracht E een snelheid

$$\frac{e\,E\,l}{m\,u}$$

voort. Op een bepaald oogenblik is de gemiddelde stroomsnelheid der electronen in de richting van de electrische kracht

$$\frac{e\,E\,l}{2\,m\,u}$$

Dit is n.l. de helft van het zoo even genoemde bedrag. Immers, van de electronen hebben sommige pas even te voren

---

[1]) Zie b.v. L. BOLTZMANN, Vorlesungen über Gastheorie I, Leipzig 1896, § 11, in het bijzonder verg. (86). Voor eene afleiding, waarbij met de snelheidsverdeeling volgens MAXWELL is rekening gehouden zie men H. A. LORENTZ. The theory of electrons. Leipzig 1909, § 50.

gebotst, andere zijn bijna aan het eind van hun vrijen weg: de eerste hebben nog slechts een geringe snelheid door de werking van E verkregen, de laatste bijna het geheele eindbedrag; gemiddeld hebben de electronen de helft hiervan gekregen.

De electrische stroom is dan

$$\frac{c\,E\,l}{2\,m\,u} \cdot n\,e = \frac{e^2\,E\,n\,l}{2\,m\,u} \qquad (38)$$

of, volgens (36)

$$\frac{N\,e^2\,E\,n\,l\,u}{6\,R\,T} \qquad (39)$$

Daaruit volgt voor het geleidingsvermogen voor electriciteit

$$\sigma_e = \frac{N\,e^2\,n\,l\,u}{6\,R\,T} \qquad (40)$$

Het mooie van deze theorie van DRUDE is vooral hierin gelegen, dat zij de wet van WIEDEMANN en FRANZ levert. Beschouwen wij n.l. de verhouding tusschen de beide geleidingsvermogens.

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_e} = 3\left(\frac{R}{N\,e}\right)^2 T = 3\left(\frac{83.15 \times 10^6}{2.90 \times 10^{14}}\right)^2 T = 2{,}47 \times 10^{-13}\,T \qquad (41)$$

Deze verhouding zou dus bij dezelfde temperatuur voor alle metalen dezelfde zijn (wet van WIEDEMANN en FRANZ). In het bijzonder volgt hieruit dat goede geleiders voor warmte ook goede geleiders voor electriciteit zijn en omgekeerd.

Verder blijkt dat $\frac{\sigma_w}{\sigma_e}$ evenwijdig zou moeten zijn met T. Ook dit is vrijwel het geval, zooals blijkt uit de volgende tabel, die ontleend is aan metingen van JAEGER en DIESSELHORST [1]).

[1]) W. JAEGER und H. DIESSELHORST. Wärmeleitung, Elektricitätsleitung, Wärmtecapacität und Thermokraft einiger Metalle. Wiss. Abh. d. Physik.-Techn. Reichsanstalt, 3 (1900), p. 269.

	$\frac{\sigma_w}{\sigma_e}$ 18° C.	100° C.	verhouding.
Al (99°/$_\circ$)	6,36.10^{10}	8,48.10^{10}	1,33
Cu	6,71	8,74	1,30
Ag	6,86	8,85	1,29
Au	7,09	9,14	1,29
Ni (97°/$_\circ$)	6,99	9,10	1,30
Zn	6,72	8,71	1,30
Cd	7,06	9,09	1,29
Pb	7,15	9,38	1,31
Sn	7,35	9,29	1,26
Fe (0.1 °/$_\circ$ C)	8,02	10,65	1,33
Bi	9,64	10,80	1,12

Inderdaad blijkt de verhouding van de waarde van $\frac{\sigma_w}{\sigma_e}$ bij 100° C. tot die bij 18° C., behalve bij *Bi*, vrijwel gelijk te zijn aan de verhouding der absolute temperaturen: 373,1 : 291,1 = 1,28^5.

Ook de absolute waarde komt redelijk uit. Voor zilver bij 18° C. is b.v. gevonden de waarde $6,86 \times 10^{10}$ (zie boven), waarbij intusschen σ_e is uitgedrukt in electromagnetische eenheden. Drukken wij, zooals in (41) ondersteld is, σ_e in electrostatische eenheden uit, dan wordt $\frac{\sigma_w}{\sigma_e} = 6,86 \times 10^{10} : 9 \times 10^{20} = 7,6 \times 10^{-11}$. Verg. (41) geeft $7,2 \times 10^{-11}$.

Bij bismuth intusschen, en nog meer bij sommige legeeringen komt de theorie niet uit. Dit, en vooral ook het gedrag bij lage en uiterst lage temperaturen maakt dat in de theorie der vrije electronen in metalen nog groote moeilijkheden te overwinnen zijn.

III.

§ 19. Wij zullen dezen keer nog beschouwen enkele zaken van recenten datum, die meer of minder met de theorie der electronen in verband staan, met name de theorie der quanta en de relativiteitsmechanica.

In de eerste plaats de theorie der energie-elementen of quanta. Reeds lang vormde een groote moeilijkheid in de theorie der straling van licht en warmte het antwoord op de vraag: waarom

straalt een metaal b.v. bij 100° C. of bij kamertemperatuur geen licht uit? Bij 100° C. is toch de absolute temperatuur niet zoo buitengewoon veel lager dan bij 500° C., waarbij eene aanmerkelijke hoeveelheid licht wordt uitgestraald. Bewezen kan dan ook worden dat, wanneer bij het verschijnsel der straling de gewone wetten der mechanica en electrodynamica zouden gelden, een metaal bij kamertemperatuur een weliswaar zwak, maar toch zichtbaar licht zou moeten uitstralen. Intusschen is daarvan geen spoor aanwezig.

Om hiervan, in 't algemeen om van de verschijnselen der warmtestraling rekenschap te geven, heeft PLANCK [1]) ondersteld dat in de stralende lichamen vibratoren aanwezig zijn, die de energie slechts in bepaalde eindige hoeveelheden met de overige in het lichaam aanwezige deeltjes kunnen uitwisselen en ook slechts in diezelfde hoeveelheden, „quanta", kunnen uitstralen. Het energiequantum moet evenredig met de frequentie ν van den vibrator (aantal trillingen per seconde) gesteld worden, en kan dus worden voorgesteld door

$$h\,\nu.$$

Voor de constante vindt PLANCK [2])

$$h = 6{,}415\ .\ 10^{-27}$$ [3])

(steeds C. G. S.-eenheden).

Men kan zich voorstellen dat licht van de frequentie ν nooit anders dan met een energie, gelijk aan het quantum $h\,\nu$ of een veelvoud daarvan ontstaat.

Dit is direct bevestigd door proeven van FRANCK en HERTZ [4]). Zij brachten in kwikdamp ionen voort, die zij met behulp van een electrisch veld voortdreven. Deze ionen verkrijgen dan een arbeidsvermogen van beweging gelijk aan den arbeid dien

---

[1]) M. PLANCK. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. Ann. d. Phys. (4) 4 (1901), p. 553.

[2]) M. PLANCK. Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 2te Aufl. Leipzig 1913, § 162.

[3]) R. A. MILLIKAN, Physik. Z. S. 17 (1916), p. 217 vindt uit photo-electrische verschijnselen: $h = 6{,}57\ .\ 10^{-27}$; F. C. BLAKE en W. DUANE, Phys. Rev. (2) 10 (1917), p. 624, uit het voltage noodig om een bepaalde karakteristieke Röntgenlijn op te wekken: $h = 6{,}555\ .\ 10^{-27}$.

[4]) J. FRANCK und G. HERTZ. Über die Erregung der Quecksilberresonanzlinie 253,6 $\mu\mu$ durch Elektronenstösse. Verh. D. physik. Ges. 16 (1914), p. 512.

het electrische veld op hen verricht, en die berekend kan worden uit hunne lading en het potentiaalverschil dat zij doorloopen hebben. Is nu dit potentiaalverschil groot genoeg, dan gaat de kwikdamp stralen. Dan hebben de ionen zoodanige snelheden verkregen, dat zij door hun stooten tegen de kwikatomen deze aan het uitstralen brengen. Het daartoe vereischte doorloopen potentiaalverschil bedraagt 4,9 volt, de golflengte van het uitgestraalde ultraviolette licht $2{,}536 \times 10^{-5}$ c.m. Bij 4,9 volt is de kinetische energie van het ion, als het de elementaire lading heeft,

$$4{,}77 \times 10^{-10} \times \frac{4{,}9 \times 10^{8}}{3 \times 10^{10}} = 7{,}8 \times 10^{-12}.$$

Het energie-quantum $h\nu$ is voor de genoemde golflengte

$$6{,}415 \times 10^{-27} \times \frac{3 \times 10^{10}}{2{,}536 \times 10^{-5}} = 7{,}6 \times 10^{-12} \text{ }^{1)}.$$

Uit deze overeenstemming blijkt dus, dat het ion bij de botsing al zijn energie aan het atoom afstaat, en dat het atoom deze energie uitstraalt. Hoe het atoom daarbij in staat is de uitgestraalde energie juist op een vol quantum af te passen vormt voor onze voorstelling nog een groote moeilijkheid.

§ 20. Wij komen nu tot de onderzoekingen van Bohr, die hem in staat gesteld hebben rekenschap te geven van de structuur van verschillende lijnenspectra.

Dat de lijnen in het spectrum van een element op eene bepaalde wijze met elkander samenhangen is het eerst door Balmer [2]) gevonden. Deze vond n.l. dat de golflengten λ der lijnen van het waterstofspectrum voldoen aan de betrekking

$$\lambda = 3{,}64720 \times 10^{-5} \frac{p^2}{p^2 - 4} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

waarin voor p de reeks der opvolgende natuurlijke getallen, te beginnen met 3, te substitueeren is. De overeenstemming blijkt b.v. uit de volgende tabel:

---

[1]) Nemen wij $h = 6{,}56 \cdot 10^{-27}$ (p. 40 noot 3), dan vindt men hier $7{,}8 \times 10^{-12}$.

[2]) J. J. Balmer. Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs. Wied. Ann. 25 (1885), p. 80.

p	λ gemeten	λ berekend
3	6,5650	6,5650
4	4,8629	4,8629
5	4,3420	4,3419
6	4,1031	4,1031
9	3,8368	3,8367
12	3,7513	3,7514
16	3,7048	3,7051

Inderdaad is de overeenstemming zeer nauwkeurig. Men kan zeggen, dat bijna geen enkel ander physisch verschijnsel zoo exact door eene formule wordt weergegeven als dit.

Men kan de formule brengen in den vorm

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Daarin is

$$R = \frac{4\,c}{3{,}647 \times 10^{-5}} = 3{,}29 \times 10^{15}.$$

Voor andere elementen zijn daarna dergelijke formules opgesteld door RYDBERG [1]). Deze formules zijn iets ingewikkelder. De ook daarin optredende constante R (constante van RYDBERG) is voor alle elementen zoo goed als gelijk.

Hoewel dit alles reeds geruimen tijd bekend was, had men de oorzaak dezer regelmatigheden nooit begrepen. Het is BOHR [2]) geweest, die dit raadsel heeft opgelost. Wel heeft hij verschillende onderstellingen moeten maken, die wij nog niet begrijpen, maar de verkregen overeenstemming is zoo schitterend, dat de theorie van BOHR in hoofdzaken wel juist zal zijn.

§ 21. BOHR's *theorie van het waterstofatoom.* Om een positieve kern met de lading e (elementaire lading), en waarin bijna de geheele massa van het atoom vereenigd is, loopt een electron met de lading $-e$ rond onder den invloed der electrostatische aantrekking, die van de kern uitgaat. (Fig. 14). Het

[1]) J. R. RYDBERG. Ueber den Bau der Linienspektren der chemischen Grundstoffe. Z. S. physik. Chem. 5 (1890), p. 227.

[2]) N. BOHR. On the constitution of atoms and molecules. Phil. Mag. (6) 26 (1913), p. 1, 476.

electron kan een cirkel of een ellips beschrijven. Ook een parabool of hyperbool, maar daarmede hebben wij ons nu niet bezig te houden nu wij niet bezig zijn het proces der ionisatie te beschouwen [1]).

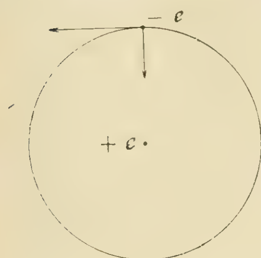


Fig. 14.

Van al de bewegingen, die naar de regels der mechanica mogelijk zijn, zijn nu volgens BOHR slechts enkele „toegelaten", namelijk die welke aan zekere „quanta-voorwaarden", die aanstonds genoemd zullen worden, voldoen. De bewegingen, waarvoor dit laatste het geval is, worden „stationaire bewegingen" genoemd.

Bij de stationaire bewegingen heeft de energie ϵ verschillende waarden. Het atoom kan nu door een inwendige omzetting van den toestand waarbij het electron een bepaalde stationaire beweging met de energie ϵ_1 heeft, overgaan in een toestand waarbij het electron eene stationaire beweging heeft met de energie ϵ_2. Volgens BOHR wordt het energieverschil $\epsilon_1 - \epsilon_2$ als licht uitgestraald, en wel moet dat verschil $\epsilon_1 - \epsilon_2$ juist één quantum voor het uitgestraalde licht zijn:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = h\nu.$$

De frequentie van het uitgestraalde licht is dus

$$\nu = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Wij merken hierbij op, dat deze theorie ons verder geen voorstelling geeft over de bijzonderheden van het proces der uitstraling, wij zien volstrekt niet wat het is dat trilt en zijn trillingen uitstraalt.

Wij zullen ons vooreerst beperken tot cirkelbewegingen. Hiervoor luidt de quanta-voorwaarde als volgt: het product van de kinetische energie T en den omloopstijd ϑ moet een veelvoud van $\frac{1}{2}\,h$ zijn, stel $\frac{1}{2}\,p\,h$, waarin p een geheel getal is.

Wij passen nu de gewone mechanica toe. Eerst bij het signa-

---

[1]) Zie daartoe P. S. EPSTEIN. Versuch einer Anwendung der Quantenlehre auf die Theorie des lichtelektrischen Effekts und der β-Strahlung radioaktiver Substanzen. Ann. d. Phys. (4) 50 (1916), p. 815.

leeren van de alleen mogelijke bewegingswijzen treden wij daar buiten.

Wij stellen, teneinde onze berekeningen iets meer algemeen te maken, de lading der kern $N e$. De straal van den cirkel zij r. De aantrekking van het electron door de kern bedraagt

$$\frac{N e^2}{r^2}.$$

De potentieele energie (op oneindigen afstand $= 0$ gesteld) is

$$U = - \frac{N e^2}{r}.$$

Is de snelheid van het electron v, dan luidt de bewegingsvergelijking:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{N e^2}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Hieruit volgt:

$$v = e \sqrt{\frac{N}{m r}}$$

$$\vartheta = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi r}{e} \sqrt{\frac{m r}{N}}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{N e^2}{r} = - \frac{1}{2} U \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

$$\varepsilon = T + U = \frac{1}{2} U = - \frac{N e^2}{2 r}$$

De quanta-voorwaarde luidt:

$$T \vartheta = \frac{1}{2} p h$$

of

$$\pi e \sqrt{N m r} = \frac{1}{2} p h \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Hieruit volgt voor den straal

$$r = p^2 \frac{h^2}{4 \pi^2 N m e^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

De straal r kan dus slechts bepaalde waarden hebben, die zich verhouden als $1 : 4 : 9$ enz.

Wordt deze uitdrukking voor r in die voor ε gesubstitueerd, dan vindt men voor de energie

$$\varepsilon = -\frac{1}{p^2}\,\frac{2\,\pi^2 N^2 m\, e^4}{h^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Wij denken nu dat er in het atoom als het ware eene catastrofe plaats grijpt, waarbij het electron van eene bewegingswijze, gekenmerkt door het getal p overgaat tot eene andere, gekenmerkt door p'. Dan is volgens (44) de frequentie van het uitgestraalde licht

$$\nu = \frac{2\,\pi^2 N^2 m\, e^4}{h^3}\left(\frac{1}{p'^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Voor $p' = 2$ stemt nu deze formule inderdaad met (43) overeen. Daartoe zal dan de factor vóór de haakjes in (50) gelijk aan de constante van RYDBERG moeten zijn.

Met $N = 1$, $e = 4{,}77 \times 10^{-10}$, $\frac{e}{m} = 1{,}765 \times 10^7 \;.\; 3 \times 10^{10} = 5{,}295 \times 10^{17}$ (§ 6) en $h = 6{,}56 \times 10^{-27}$ (p. 40 noot 3) wordt de coëfficient in (50)

$$3{,}26 \times 10^{15}.$$

De overeenstemming met de experimenteel gevonden waarde (§ 20) is schitterend. Met het oog hierop zien wij dan ook maar geen bezwaar in de moeilijkheden die de theorie van BOHR overigens biedt.

Wij stellen ons dus voor dat in gewone omstandigheden in het waterstofatoom het electron rondloopt in een cirkel gekenmerkt door $p = 2$, dat dit electron door stooten tot loopen in een grooteren cirkel kan gebracht worden, dan weer tot den eersten cirkel terugkeert en daarbij een spectraallijn uitzendt.

§ 22. Tot op zekere hoogte zijn de voorstellingen van de vorige § uitgebreid tot andere elementen. Bij deze is de toestand echter ingewikkelder.

Bij alle elementen bestaat het atoom uit een positieve kern, waaromheen een zeker aantal, stel N atomen loopen. De lading der kern is Ne. Het getal N is het „atoomnummer". Het is het rangnummer van het element in een natuurlijke rangschikking. Deze atoomnummers bepalen veel beter dan de atoomgewichten

de verschillende eigenschappen der elementen, gelijk vooral door VAN DEN BROEK [1]) is aangewezen.

Het volgende tabelletje geeft voor eenige elementen het atoomnummer.

H	*He*	*Li*	*Zn*	*Pt*	*Pb*	*Ra*	*Th*
1	2	3	30	78	82	88	90

§ 23. *Algemeene regel voor het quantiseeren.*

Reeds bij het waterstofatoom is de toestand ingewikkelder dan in § 21 werd aangenomen. Het electron kan zich ook in eene ellips bewegen. Dan doen zich de vragen voor: welke excentriciteit is toegelaten, welke halve groote as?

Het waterstofatoom kan zich bevinden in een electrisch veld. Het vraagstuk: de beweging van het atoom in een electrisch veld na te gaan, kan mechanisch geheel uitgewerkt worden. Reeds JACOBI had het vraagstuk van een lichaam zich bewegende onder den invloed van twee vaste zonnen behandeld. Denken we nu één dier zonnen zeer ver weg, dan komen we tot het hier beschouwde vraagstuk.

Hoe moet nu in dergelijke gevallen de quanta-voorwaarde, eventueel hoe moeten de quanta-voorwaarden opgesteld worden?

De regel dien men in de tot nu toe behandelde gevallen heeft gevolgd, kan als volgt geformuleerd worden.

De stand van het beschouwde stelsel zij bepaald door de grootheden $q_1, q_2, \ldots\ldots$ (coördinaten). De snelheden worden bepaald door $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots$, en de kinetische energie kan worden voorgesteld door

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2 + \ldots\ldots + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots\ldots$$

Men kan dit splitsen in deelen, die elk bij een der coördinaten behooren. Een term als $a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2$ wordt geacht voor de helft bij q_1 en voor de helft bij q_2 te behooren. Het deel van T behoorende bij q_1 is

$$\frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots\ldots$$

Het komt voor, dat bij de beweging van het stelsel een der

[1]) A. VAN DEN BROEK. Die Radio-elemente, das periodische System und die Konstitution der Atome. Physik. Z. S. 14 (1913), p. 32. Zie ook K. FAJANS. Das periodische System der Elemente, die radioaktiven Umwandlungen und die Struktur der Atome. Physik. Z. S. 16 (1915), p. 456.

geschikt gekozen coördinaten q voortdurend tusschen twee vaste waarden α en β heen en weer gaat. De overgang van α tot β met het terugkeeren tot α heete een „slingering". Gedurende een slingering is het bij q behoorende deel van de kinetische energie niet steeds even groot, maar men kan de gemiddelde waarde ervan met den tijdsduur van de slingering vermenigvuldigen. Heeft het zoo gevormde product voor de op elkaar volgende slingeringen dezelfde waarde, dan kan men als quantavoorwaarde stellen dat die waarde een veelvoud van $\frac{1}{2} h$ is.

In menig geval kan men op deze wijze verschillende quantavoorwaarden invoeren, op verschillende coördinaten betrekking hebbende. Er zijn dan een zeker aantal kenmerkende getallen $p_1, p_2 \ldots.$ Stel dat de energie ε van het stelsel geheel door deze getallen bepaald is,

$$\varepsilon = F(p_1, p_2, \ldots.) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

Gaan nu bij een plotselinge verandering van bewegingswijze de kenmerkende getallen van $p_1, p_2, \ldots.$ over in $p'_1, p'_2, \ldots.$, dan wordt (als de energie daarbij is afgenomen) de frequentie van het uitgestraalde licht bepaald door

$$\nu = \frac{1}{h}\left[F(p_1, p_2 \ldots) - F(p'_1, p'_2, \ldots.)\right] \quad \ldots \quad (52)$$

In deze gevallen, waarin de toegelaten stationaire bewegingen door meer dan één getal gekenmerkt worden, is een veel grooter verscheidenheid van sprongen dan vroeger mogelijk. Immers kunnen we voor $p_1, p_2, \ldots p'_1, p'_2, \ldots$ allerhande verschillende keuzen doen, in veel grooter aantal dan wanneer we hoogstens slechts over p_1 en p'_1 kunnen beschikken. Aan elken zoodanigen sprong beantwoordt een spectraallijn. Veelvuldigheid van kenmerkende getallen geeft aldus aanleiding tot splitsingen van spectraallijnen.

§ 24. *Toepassingen. a.* In § 21 werd aangenomen dat de kern stilstaat. In werkelijkheid loopen de kern en het electron om het gemeenschappelijk zwaartepunt rond (Fig. 15). Dientengevolge wordt de formule voor de frequentie iets gewijzigd en komt in plaats van (50) [1])

[1]) Zie vóór de afleiding b.v. H. A. Lorentz. Röntgen-stralen en structuur van kristallen. Drie voordrachten, gehouden in Teyler's Stichting in Mei 1916, p. 70—73, alwaar intusschen de quanta-voorwaarde in eene formuleering, die iets van de hier gegevene verschilt, gebruikt is.

$$r = \frac{2\,\pi^2\,N^2\,m\,e^4}{(1+s)\,h^3}\left(\frac{1}{p'^2}-\frac{1}{p^2}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

waarin s de breuk is, die aangeeft welk gedeelte van de kernmassa de massa van het electron is. Men kan de formule toepassen op de spectraallijnen van waterstof eenerzijds, en op die van helium, waarvan de atomen één electron verloren hebben, anderzijds. Bij deze eenwaardige positieve helium-ionen loopt nog één electron om de kern; dit systeem is dus volkomen vergelijkbaar met het waterstofatoom, alleen met dit verschil dat bij het helium-ion de massa van de kern anders is, en dat de lading van de kern tweemaal zoo groot is als bij het waterstofatoom. Het eerste veroorzaakt dat de factor $1+s$ in de twee gevallen verschillend is. Schrijven wij voor waterstof:

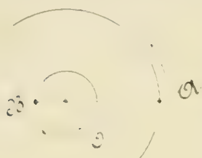


Fig. 15.

$$r = R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{p^2}\right),$$

en voor helium ($N=2$):

$$r = 4\,R_{He}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{p^2}\right),$$

dan volgt uit het gezegde dat R_H en R_{He} iets zullen verschillen. Inderdaad volgt uit (53):

$$R_H = \frac{2\,\pi^2\,m\,e^4}{(1+s_H)\,h^3}\,,\quad R_{He} = \frac{2\,\pi^2\,m\,e^4}{(1+s_{He})\,h^3}\,.$$

Stellen we $s_H = \frac{1}{1850}$, $s_{He} = \frac{1}{4}\,s_H$, dan volgt:

$$\frac{R_{He}}{R_H} = \frac{1+s_H}{1+s_{He}} = 1+\frac{3}{4}\,s_H = 1+\frac{1}{2470}\,.$$

Nu heeft PASCHEN [1]), met inachtneming van de correcties die de relativiteitsmechanica (§ 25) vereischt, gevonden:

$$c^{-1}\,R_H = 109677{,}691 \pm 0{,}06$$
$$c^{-1}\,R_{He} = 109722{,}144 \pm 0{,}04.$$

Het verschil 44,45 is het 2467ste deel van het eerste getal.

[1]) F. PASCHEN. Bohrs Heliumlinien. Ann. d. Phys. (4) 50 (1916), p. 901.

Deze overeenstemming met wat de theorie leert, is zoo mooi als men maar kan wenschen. Men kan dan omgekeerd van deze getallen van PASCHEN gebruik maken om de massa van het electron te berekenen. Men vindt dan [1]) dat zij $\frac{1}{1848}$ van die van het waterstofatoom bedraagt.

b. EPSTEIN [2]) heeft onderzocht welken invloed een uitwendig electrisch veld op de bewegingen in het waterstofatoom heeft. Het gelukte deze bewegingen naar den in § 23 gegeven regel te quantiseeren en zoo tot in bijzonderheden de door STARK [3]) ontdekte splitsing der spectraallijnen door een electrisch veld te verklaren [4]).

§ 25. *Relativiteitsmechanica.* In den toestand van rust is een electron door een electrisch veld omringd. Is het electron in beweging, dan komt daar een magnetisch veld bij, terwijl ook het electrisch veld gewijzigd wordt.

In het electromagnetische veld zijn een bepaalde electrische en een bepaalde magnetische energie aanwezig, die men te zamen als energie van het electron kan opvatten. Evenzoo is er, als dit zich beweegt, een zekere electromagnetische hoeveelheid van beweging, die eveneens kan beschouwd worden als bij het electron te behooren.

---

[1]) Noemen we M_H en M_{He} resp. de massa's van het waterstof- en het heliumatoom, dan is

$$\frac{R_{He}}{R_H} = \frac{1 + s_H}{1 + s_{He}} = \frac{1 + \dfrac{m}{M_H - m}}{1 + \dfrac{m}{M_{He} - 2m}}.$$

Hieruit volgt met $M_H : M_{He} = 1{,}0077 : 4{,}002$ de in den tekst genoemde waarde. Dezelfde uitkomst verkreeg L. FLAMM. Die charakteristischen Masszahlen für das Elektron in ihrer Verknüpfung mit den Strahlungskonstanten. Physik. Z. S. 18 (1917), p. 515.

[2]) P. S. EPSTEIN. Zur Theorie des Starkeffektes. Ann. d. Phys. (4) 50 (1916), p. 489.

[3]) J. STARK. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. I. Quereffekt. Berlin Sitz. Ber. 1913. Ann. d. Phys. (4) 43 (1914), p. 965.

[4]) Zie het aanhangsel onder 3.

Is de snelheid v klein, dan kan men voor de hoeveelheid van beweging schrijven

$$G = m v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

en voor de energie

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

(ε_0 de energie in den toestand van rust).

Daarbij is

$$m = \frac{e^2}{6 \pi R c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

waarin R de straal van het electron voorstelt; m is de „electromagnetische massa".

Bij grootere snelheden kan men stellen [1])

$$G = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

$$\varepsilon = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

Ontwikkelen wij de laatste formule, dan zien wij dat de eerste twee termen inderdaad (55) leveren, met $\varepsilon_0 = m c^2$. Met de formules (57) en (58) staat de afplatting in verband, die het electron in de bewegingsrichting ondergaat. De afmetingen in die richting worden verkleind in reden van 1 tot

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

Proeven over de afwijkingen in een electrisch en een magnetisch veld (§ 6) bij groote snelheden (β-stralen, snelle kathodestralen) hebben (57) bevestigd [2]); men trok daaruit het besluit,

[1]) Zie b.v. H. A. LORENTZ. Het relativiteitsbeginsel. Drie voordrachten gehouden in Teyler's Stichting. 1913, p. 18, 28.

[2]) A. H. BUCHERER. Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), p. 513. G. NEUMANN, CL. SCHAEFER, l. c. p. 16 noot 4. E. HUPKA. Beitrag zur Kenntnis der trägen Masse bewegter Elektronen. Ann. d. Phys. (4) 31 (1910), p. 169.

dat de massa van het electron geheel van electromagnetischen aard zou zijn. In de relativiteitstheorie, volgens welke (57) en (58) voor elk stelsel, van welken aard ook, gelden, behoeft men dit niet aan te nemen. In elk geval moeten er in het electron krachten van niet electromagnetischen aard zijn, die het deeltje ondanks de uit de lading voortvloeiende krachten in stand houden. Bij nadere beschouwing blijkt G geheel van electromagnetischen aard te zijn; de door (58) bepaalde energie echter niet. Een deel daarvan is van anderen aard en beantwoordt aan de zooeven genoemde krachten [1]).

Sommerfeld [2]) heeft de wijzigingen onderzocht, die de op (57) en (58) berustende relativiteits-mechanica in de theorie van Bohr brengt. De snelheden die de electronen in hun binnenste stationaire cirkels bezitten, worden namelijk vergelijkbaar met de voortplantingssnelheid van het licht. Sommerfeld vindt dat bij het rekening houden met de daardoor veroorzaakte wijziging de baan van het electron door een grooter aantal getallen gekenmerkt wordt. Zoo heeft hij eene verklaring gegeven van de doubletten in het waterstof- en de tripletten in het helium-spectrum („relativiteitssplitsingen").

§ 26. *Röntgenstralen. Structuur der atomen.* Dezelfde beschouwingen heeft Sommerfeld [3]) toegepast op de „karakteristieke" Röntgenstralen (hoog frequentie-spectra van het metaal der antikathode). De relativiteitssplitsingen treden daarbij zeer op den voorgrond. Overigens vertoonen de opgestelde formules nog steeds veel overeenkomst met (50); in vele gevallen, n.l. voor de lijnen der K-reeks, moet nu $p' = 1$ gesteld worden [4]).

Bij de elementen met hooge atoomnummers (en hooge atoomgewichten) is het aantal om de kern rondloopende atomen groot. Men neemt aan dat de electronen in ringen geplaatst zijn, zoo dat alle deeltjes van denzelfden ring op dezelfde wijze rondloo-

[1]) Zie b.v. H. A. Lorentz. Het relativiteitsbeginsel, p. 36.

[2]) A. Sommerfeld. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. Ann. d. Phys. (4) 51 (1916), p. 1.

[3]) A. Sommerfeld. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. Ann. d. Phys. (4) 51 (1916), p. 125.

[4]) Zie verder H. A. Lorentz. Röntgen-stralen en structuur van kristallen, het aanhangsel, onder **2** *f*, *g*.

pen. Men heeft getracht, het aantal electronen in elken ring aan te geven.

De volgende tabel is ontleend aan eene tabel van VEGARD [1]), waarin de verdeeling der electronen in ringen voor het geheele stelsel van elementen op grond van beschouwingen over hunne chemische eigenschappen en van hunne Röntgenspectra is aangegeven.

Atoomnummer.		Aantal electronen in de ringen.			
		1	2	3	4
H	1	1			
He	2	2			
Li	3	2	1		
Be	4	2	2		
B	5	2	3		
C	6	2	4		
N	7	2	5		
O	8	2	6		
F	9	2	7		
Ne	10	3	7		
Na	11	3	7	1	
Mg	12	3	7	2	
S	16	3	7	6	
Cl	17	3	7	7	
Ar	18	3	7	8	
K	19	3	7	8	1
Ca	20	3	7	8	2
Ni	28	3	7	8	10

Hierin zijn de ringen van binnen naar buiten met 1, 2, 3, enz., genummerd. De binnenste ring [2]) schijnt hoogstens 3 electronen te kunnen opnemen. Aangezien het optreden van de *K*-

[1]) L. VEGARD. Der Atombau auf Grund der Röntgenspektren. Verh. D. physik. Ges. 19 (1917), p. 344.

[2]) Verg. P. DEBYE. Der erste Elektronenring der Atome. Physik. Z.S. 18 (1917), p. 276.

reeks in het Röntgenspectrum aan de aanwezigheid van dezen ring met 3 electronen schijnt gebonden te zijn, zoo zou bij neon het eerst de *K*-reeks kunnen optreden. In werkelijkheid is natrium het element met het laagste atoomnummer, waarvoor de *K*-reeks tot nu toe gevonden is.

In de samenstelling van den buitensten ring is duidelijk eene periodiciteit op te merken. Aangezien deze buitenste electronen het chemisch gedrag van het element bepalen, zoo verklaart dit de periodiciteit die in het chemisch gedrag valt op te merken.

Om zich van de verschijnselen rekenschap te geven moet men zich nu voorstellen dat de meest stabiele toestanden die zijn waarbij de buitenste ring vol is, en dat het atoom tracht tot zulk een toestand te naderen; dit kan, als de buitenste ring weinig electronen bevat, het gemakkelijkst bereikt worden door afgeven van die deeltjes (waardoor de op één na grootste ring de buitenste wordt) en als de buitenste ring reeds veel electronen bevat, door verdere aanvulling van dien ring.

De buitenste ring is volgens de tabel vol bij *Ne*, *Ar*, enz. Dan vormt de kern met het electronensysteem een zeer stabiel systeem, m. a. w. het atoom is chemisch indifferent. Bestaat de buitenste ring uit 1 electron, zooals bij *Li*, *Na*, *K*, dan wordt dit electron gemakkelijk losgelaten, het atoom is dan éénwaardig electropositief.

Bestaat de buitenste ring uit 2 electronen (*Be*, *Mg*, *Ca*), dan worden deze ook nog vrij gemakkelijk losgelaten, het atoom is tweewaardig electropositief.

Is de buitenste ring op één na vol, zooals bij *Cl* (hetzelfde heeft plaats bij *Br*, *I*), dan neemt deze gemakkelijk een electron op, het element is dan éénwaardig electronegatief.

Is de buitenste ring op twee na vol, b.v. *S*, dan is het element tweewaardig electronegatief.

Zoo blijkt dat inderdaad deze onderstellingen over de indeeling der electronen in ringen ons eenigermate een inzicht kunnen geven in de chemische eigenschappen der elementen.

§ 27. *De atoomkernen.* De α- en β-deeltjes zijn afkomstig uit de kernen der radio-actieve elementen. De eerste zijn positief geladen heliumatomen (lading $2e$), of liever kernen van heliumatomen, de laatste electronen. Het ligt voor de hand aan te nemen dat in de kernen deze heliumkernen en electronen als zoodanig aanwezig zijn en zich met groote snelheden bewegen.

De positieve deeltjes kunnen, ondanks hun onderlinge afstooting, door de electronen bijeen worden gehouden.

Voor deeltjes die onder den invloed van wederkeerige electrische aantrekkingen en afstootingen een stelsel vormen, dat in een stationairen toestand verkeert, geldt de regel (verg. formule (46)), dat de gemiddelde kinetische energie gelijk is aan de halve gemiddelde potentieele energie met het tegengestelde teeken [1]). Dus moet

$$U = \Sigma \frac{e\,e'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

negatief zijn; de negatieve termen, die van de onderlinge werking van ongelijknamige ladingen afhangen, moeten de overhand hebben boven de positieve, die behooren bij paren van gelijknamig geladen deeltjes.

§ 28. Daar het atoomnummer bepaald wordt door het aantal elementaire ladingen (algebraïsche som van de positieve en negatieve) begrepen in de kernlading, en het α-deeltje eene lading $2\,e$ heeft, zoo neemt, als de kern een α-deeltje verliest, het atoomnummer af met 2. Het α-deeltje is een heliumatoom, waarvan het atoomgewicht 4 is. Door het verlies van een α-deeltje neemt dus het atoomgewicht met 4 af. Evenzoo vindt men dat bij het ontwijken van een β-deeltje (een electron) het atoomnummer met 1 moet toenemen, terwijl daarbij het atoomgewicht (zoo goed als) onveranderd blijft. Uit deze veranderingen van het atoomnummer volgt verder dat bij uitzending van een α-deeltje het radioactieve element overgaat naar eene groep in het periodieke systeem, die een rangnummer heeft dat 2 lager is, terwijl bij uitzending van een β-deeltje het element zich plaatst in de eerstvolgende hoogere groep. Deze regels, die bekend zijn onder den naam „verschuivingsregels", worden inderdaad algemeen bevestigd gevonden [2]).

Als voorbeeld geven wij hier eene tabel betrekking hebbende op de radioactieve reeks van radium tot *Ra G*. Daarbij is achter elk radioactief element aangegeven welke stralen het uitzendt.

[1]) Zie het aanhangsel onder **4**.

[2]) Zie K. FAJANS l. c. p. 46 noot 1.

	Atoomnummer.	Atoomgewicht.
Radium (α)	88	226
Ra Em (α)	86	222
Ra A (α)	84	218
Ra B (β)	82	214
Ra C_1 (α β)	83	214
Ra D (β)	82	210
Ra E (β)	83	210
Ra F (α)	84	210
Ra G	82	206

Uit deze tabel blijkt, dat de elementen *Ra B*, *Ra D* en *Ra G* alle hetzelfde atoomnummer hebben. Hetzelfde atoomnummer 82 heeft ook het lood (atoomgewicht 207). Van al deze elementen heeft de kern dus, niettegenstaande deze kernen op verschillende wijzen uit negatieve en positieve deeltjes zijn samengesteld, eenzelfde lading. Men wijst hun ook eenzelfde plaats in het periodiek systeem toe, zij zijn „isotoop". Daar de kernladingen gelijk zijn, bezitten zij ook een gelijk aantal om de kern rondloopende electronen. Deze zullen zich ook op dezelfde wijze in ringen rangschikken, waaruit volgt dat de chemische eigenschappen, die van de wijze van groepeering der electronen afhankelijk zijn, voor de verschillende isotope elementen hetzelfde zijn. Daarentegen hebben zij verschillend atoomgewicht.

§ 29. Uit (58) volgt voor een stelsel dat in zijn geheel geen translatiebeweging heeft (wel inwendige bewegingen),

$$\varepsilon = m c^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (61)$$

Verandert de energie met $\delta \varepsilon$, dan verandert de massa met $\frac{\delta \varepsilon}{c^2}$. Als uit de kern een α-deeltje wegvliegt, neemt het atoomgewicht met 4 af (atoomgewicht helium), maar bovendien met een bedrag dat aan de kinetische energie van het α-deeltje beantwoordt en dat 0,005—0,011 kan zijn. Zoo zou bij de reeks van transformaties van 1 gramatoom radium tot *Ra G* in het geheel een bedrag van 0,04 aan massa verloren worden [1]).

§ 30. *Model van het waterstofmolekuul van* Bohr *en* Debye. Met de atomen, welker structuur in het voorgaande besproken is,

---

[1]) R. Swinne. Über eine Anwendung des Relativitätsprinzips in der Radiochemie. Physik. Z.S. 14 (1913), p. 145.

moet de theorie nu nog molekulen construeeren, en met deze molekulen lichamen. Beschouwen wij eerst het molekuul. Een nauwkeurig uitgewerkt beeld van het waterstofmolekuul is gegeven door BOHR [1]) en DEBYE [2]). Volgens dit model (Fig. 16) bestaat het waterstofmolekuul uit twee waterstofkernen K_1 en K_2 op een afstand d van elkaar. In een vlak door het midden O van de verbindingslijn $K_1 K_2$ loodrecht op deze gebracht, loopen twee electronen, diametraal tegenover elkaar in een cirkel om O. Zij de straal van den cirkel a.

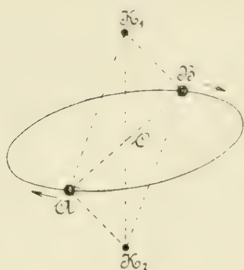


Fig. 16.

De kern K_1 moet in evenwicht zijn onder de werking van de afstooting van K_2: $\frac{e^2}{d^2}$, en van de resultante der aantrekkingen van A en B, waarvoor men vindt $-\frac{e^2 d}{\left(a^2+\frac{1}{4} d^2\right)^{3/2}}$. Gelijkstelling dezer beide krachten levert

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{3} \, . \, d \qquad (62)$$

De resultante der aantrekkingen en der afstooting, die op A worden uitgeoefend, moet de kracht leveren die A in den cirkel doet rondloopen. Dit geeft:

$$\frac{2 e^2 a}{\left(a^2+\frac{1}{4} d^2\right)^{3/2}} - \frac{e^2}{4 a^2} = m \omega^2 a,$$

als ω de hoeksnelheid van de electronen in hunne beweging om O voorstelt, of met inachtneming van (62):

$$\frac{3\sqrt{3}-1}{4} e^2 = m \omega^2 a^3 \qquad (63)$$

Het aantal omloopen per seconde wordt nu verder bepaald

[1]) N. BOHR. On the constitution of atoms and molecules. Phil. Mag. (6) 26 (1913), p. 857.

[2]) P. DEBYE. Die Konstitution des Wasserstoff-Moleküls. München Sitz.-Ber. 1915, p. 1.

door de voorwaarde dat voor elk electron het product van kinetische energie en omloopstijd $\frac{1}{2}h$ is. Dit geeft:

$$2\pi m \omega a^2 = h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Uit (63) en (64) volgt:

$$a = \frac{h^2}{\pi^2 (3\sqrt{3} - 1) e^2 m} = 0{,}507 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

Dan is $d = 0{,}587 \times 10^{-8}$ cm.; verder is $\omega = 4{,}51 \times 10^{16}$, zoodat voor het aantal omloopen per seconde gevonden wordt $7{,}2 \times 10^{15}$.

Uit deze gegevens over den bouw van het waterstofmolekuul zou men nu alle eigenschappen ervan moeten kunnen afleiden.

Debye [1]) heeft de voortplanting van het licht door een gas, samengesteld uit dergelijke molekulen, bestudeerd en komt tot de volgende formule voor den brekingsindex:

$$n = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m\omega^2} \left\{ 6{,}42266 + 25{,}0989 \frac{s^2}{\omega^2} \right\}.$$

Daarin is N het aantal moleculen in 1 cm.^{3} [2]), terwijl $s = 2\pi\nu$ als ν het trillingsgetal van het invallende licht is.

Met de hier aangenomen waarden voor $\frac{e}{m}$ en e (zie pp. 23 en 25) wordt dit voor waterstof bij 0° C. en 1 atm.:

$$n = 1 + 1{,}36 \times 10^{-4} + 2{,}62 \times 10^{-37} s^2.$$

Experimenteel is gevonden:

$$n = 1 + 1{,}36 \times 10^{-4} + 2{,}91 \times 10^{-37} s^2 \text{ (J. J. Koch)},$$

$$n = 1 + 1{,}36 \times 10^{-4} + 2{,}78 \times 10^{-37} s^2 \text{ (C. en M. Cuthberson)}.$$

Deze overeenstemming is wel zeer mooi. Intusschen zijn er in deze theorie zeer groote moeilijkheden. De beschreven beweging van het waterstofmolekuul van Bohr en Debye is niet stabiel. Bij bepaalde storingen zou het stelsel zich steeds meer

---

[1]) P. Debye, l. c. Zie ook A. Sommerfeld. Die allgemeine Dispersionsformel nach dem Bohrschen Modell. Arbeiten aus den Gebieten der Physik, Mathematik, Chemie, Julius Elster und Hans Geitel gewidmet, p. 549.

[2]) Als $\mathbf{N}$ het getal van Avogadro is, dan is $N = \frac{\varrho \mathbf{N}}{M}$, waarin ϱ de dichtheid en M het molekulairgewicht van het gas is.

van den oorspronkelijken bewegingstoestand verwijderen. Hoe deze moeilijkheid moet opgelost worden kunnen wij nog niet zien.

Over de wijze waarop de lichamen, met name kristallen uit de atomen zijn opgebouwd, hebben we in de laatste jaren gedetailleerde voorstellingen gekregen [1]). Hier treedt nu het vraagstuk naar voren alle eigenschappen van het kristal, b.v. de elasticiteit, het warmtegeleidingsvermogen, de optische eigenschappen, uit de electrische krachten tusschen de atomen te verklaren [2]). De oplossing van dit vraagstuk zal nog een reuzenarbeid vorderen.

§ 31. Een zeer groote moeilijkheid is gelegen in de aan al deze voorstellingen over den bouw der atomen ten grondslag liggende onderstelling, dat een electron, zonder dat daarop eene drijvende kracht werkt, in een cirkel kan blijven rondloopen.

Volgens de vergelijkingen van het electromagnetische veld werkt n.l. op een electron met willekeurige beweging een weerstand met de componenten [3])

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}_x\,,\quad \frac{e^2}{6\pi c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}_y\,,\quad \frac{e^2}{6\pi c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Dit hangt samen met de uitstraling die van het electron uitgaat als de snelheid in richting of grootte verandert.

Dit zou ten gevolge moeten hebben dat de electronen van het waterstofmolekuul (en hetzelfde geldt ook reeds voor het waterstofatoom) langzamer gaan rondloopen, waarbij het evenwicht niet bewaard kan blijven. Het waterstofmolekuul zou zich stukstralen [4]). Dezelfde moeilijkheid doet zich voor bij de rondloopende electronen die volgens de proef van Einstein en de

[1]) Zie b.v. H. A. Lorentz. Röntgenstralen en structuur van kristallen. Haarlem 1917.

[2]) Zie daarover b.v. M. Born und A. Landé. Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe Bohrscher Atommodelle. Berlin Sitz.-Ber. 1918, p. 1048. Kristallgitter und Bohrsches Atommodell. Über die Berechnung der Kompressibilität regulärer Kristalle aus der Gittertheorie. A. Landé. Das elektrostatische Potential des Flussspatgitters. M. Born. Über die Berechnung der absoluten Kristalldimensionen. Über kubische Atommodelle. Verh. D. physik. Ges. 20 (1918), p. 202, 210, 217, 224, 230.

[3]) Zie H. A. Lorentz. The theory of electrons. Leipzig 1909, p. 49.

[4]) Een andere moeilijkheid is nog gelegen in de omstandigheid dat b.v. het waterstofmolekuul wegens de daarin rondloopende electronen sterk paramagnetische eigenschappen zou moeten hebben.

Haas de magnetisatie veroorzaken. Zonder dat wij nog inzien hoe dat mogelijk is moeten wij wel aannemen, dat bij stationaire bewegingen geen uitstraling plaats grijpt. De toekomst zal moeten leeren hoe het hiermede gesteld is.

Ook in andere opzichten zullen de tot nu toe aangenomen theorieën moeten worden herzien. Zoo b.v. de theorie van de vrije electronen in metalen. Ook bij het beschouwen van wat er gebeurt als een lichtstraal over een atoom heenloopt zal men de vroegere theorie tot op zekere hoogte moeten verlaten.

Zoo blijft er nog veel te doen over, voordat alle verschijnselen in de lichamen (afgezien dan van de werkingen binnen het electron die dit in stand houden) zullen kunnen worden teruggebracht tot de werking van electrische krachten. Eerst als dit gelukt zal zijn zal men kunnen zeggen dat men eene electromagnetische theorie van de materie bezit.

AANHANGSEL.

1 (Bldz. 32). Als in een molekuul (of atoom) een aantal electronen, elk met de lading e (in electromagnetische maat) rondloopen, heeft het magnetisch moment van het deeltje de componenten

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\, e\,(y\,v_z - z\,v_y)\,,\ \frac{1}{2}\,\Sigma\, e\,(z\,v_x - x\,v_z)\,,\ \frac{1}{2}\,\Sigma\, e\,(x\,v_y - y\,v_x)\ \ .\ .\ (1)$$

waarin x, y, z de coördinaten van een electron en v_x, v_y, v_z zijne snelheidscomponenten voorstellen, terwijl over al de electronen gesommeerd wordt. De sommen zijn onafhankelijk van de keus van den oorsprong van coördinaten, indien, zooals wij zullen onderstellen, $\Sigma v_x = 0$, $\Sigma v_y = 0$, $\Sigma v_z = 0$ is.

Is m de massa van een electron, dan heeft men voor de componenten van het moment der hoeveelheid van beweging die aan de zich bewegende electronen eigen is,

$$\Sigma\, m\,(y\,v_z - z\,v_y)\,,\ \Sigma\, m\,(z\,v_x - x\,v_z)\,,\ \Sigma\, m\,(x\,v_y - y\,v_x).$$

Men ziet dat deze uitdrukkingen zich van de uitdrukkingen (*1*) door den factor $\frac{2\,m}{e}$ onderscheiden. Daar deze verhouding voor elk magnetisch deeltje geldt, moet zij ook bestaan tusschen het resulteerende moment van hoeveelheid van beweging voor een lichaam in zijn geheel genomen en het resulteerende magnetische moment van dat lichaam; eveneens moet zij bestaan tusschen de gelijktijdige veranderingen dier momenten. Derhalve: als het magnetisch moment van een lichaam, op welke wijze dan ook, een verandering ΔM ondergaat, dan gaat daarmede gepaard een verandering $\frac{2\,m}{e}\,\Delta M$ van het moment van hoeveelheid van beweging.

2 (Bldz. 33). Van deze stelling, waartoe men op verschillende wijze kan komen, zullen wij hier eene thermodynamische afleiding geven. Ter inleiding herinneren wij aan een paar bekende stellingen der electriciteitstheorie. Wij onderstellen daarbij dat voor een electrischen stroom de op bldz. 8 genoemde rationeele electrostatische electriciteitseenheid gebruikt wordt, en voor een magnetische pool, een magnetische kracht en een magnetisch moment de rationeele magnetische eenheden. Verder laten wij op de gebruikelijke wijze bij een positieve richting langs een lijn een positieve richting van wenteling om die lijn passen.

a. Als een draadklos, waarvan de lengte l zeer groot is in vergelijking met de middellijn der windingen, door een stroom j wordt doorloopen, zoodat, als n het aantal windingen per lengte-eenheid is, $i = nj$ de stroom per eenheid van lengte van de beschrijvende lijn is, dan bestaat binnen den klos een magnetisch veld met de sterkte

$$H = \frac{i}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Is verder O het oppervlak eener winding (doorsnede van den klos), dan werkt de spoel naar buiten als een magneet met de poolsterkte $\frac{i}{c}\,O$.

b. Stel dat de draadklos nauwsluitend om een magnetiseerbare staaf van dezelfde lengte is aangebracht, en dat de magnetisatie, d. w. z. het magnetisch moment per volume-eenheid, van die staaf M is. Dan is de poolsterkte $M\,O$.

Onder de magnetische kracht H verstaat men nu de veldsterkte die er zou zijn als de staaf werd weggenomen; onder de magnetische inductie B daarentegen de veldsterkte die men zou hebben als wel de staaf werd weggenomen, maar tevens (behalve de stroom die er reeds in is) in den klos een stroom werd aangebracht, die hem een poolsterkte $M\,O$, gelijk aan die van de staaf geeft. Volgens het onder *a* gezegde zou die stroom per lengte-eenheid $c\,M$ moeten bedragen; hij zou dan een magnetische kracht M teweeg brengen. Derhalve is

$$B = H + M.$$

Om nu tot het bewijs onzer stelling te geraken, stellen wij ons voor dat de staaf, terwijl hij aan een magnetische kracht

H onderworpen is, om zijne as wentelt; bepalen wij den stand door den hoek ϑ waarover een in de staaf vastliggend meridiaanvlak gedraaid is, dan is de hoeksnelheid $\dot{\vartheta}$. Het ligt voor de hand aan te nemen dat door deze grootheden H en $\dot{\vartheta}$, die wij ons als van oogenblik tot oogenblik veranderlijk voorstellen, alsmede door de temperatuur T, de toestand van de staaf geheel bepaald is. Den draadklos laten wij stilstaan. Verder onderstellen wij dat er tweeërlei uitwendige krachten werken, waarvan de eene rechtstreeks invloed heeft op de wenteling en de andere op de magnetisatie.

De eerste kracht is een koppel Θ, dat per tijdseenheid een arbeid $\Theta\,\dot{\vartheta}$ verricht. Voor de tweede kracht nemen wij een electromotorische kracht E, die wij in de windingen van den kort gesloten klos laten werken. Daarbij onderstellen wij dat die windingen geen weerstand hebben. Dit brengt mede dat E juist de electromotorische kracht die uit de verandering der inductie B voortvloeit moet opheffen. Voor deze laatste electromotorische kracht heeft men het met $-\frac{1}{c}$ vermenigvuldigde product van $\dot{B}$ met het gezamenlijk oppervlak der windingen; dus:

$$E = \frac{1}{c}\, n\, l\, O\, \dot{B}.$$

De arbeid dezer kracht per tijdseenheid is Ej, waarvoor men wegens (2) mag schrijven, als $V = l\,O$ het volume van de staaf is, $V H \dot{B}$. De gezamenlijke arbeid per tijdseenheid van de uitwendige krachten is dus

$$A = \Theta\,\dot{\vartheta} + V H \dot{B} = \Theta\,\dot{\vartheta} + V H \dot{H} + V H \dot{M} \quad . \;.\; .\; . \quad (3)$$

Wij stellen ons nu voor dat, terwijl de temperatuur constant wordt gehouden, de grootheden ϑ en H langzaam veranderen, zoo echter dat zij na eenigen tijd tot de oorspronkelijke waarden terugkeeren, dat er dus, wat deze grootheden betreft, een kringloop beschreven is. De tweede wet der thermodynamica verlangt dat voor dien geheelen kringloop de arbeid der uitwendige krachten nul is. Daarvoor is noodig dat de uitdrukking A een volledig differentiaalqotient naar den tijd is.

Stel nu dat uit waarnemingen is gebleken dat het ontstaan van een magnetisch moment μ een koppelstoot $\alpha\,\mu$ tengevolge heeft. Dan brengt geleidelijke verandering van μ een koppel

$\alpha \dot{\mu}$ te weeg en de bewegingsvergelijking voor onze staaf luidt, daar $\mu = V M$ is, als men voor het traagheidsmoment Q stelt,

$$Q \ddot{\vartheta} = \Theta + \alpha V \dot{M}.$$

Door substitutie van de hieruit voortvloeiende waarde van Θ in (3) vindt men

$$A = Q \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} - \alpha V \dot{M} \dot{\vartheta} + V H \dot{H} + V H \dot{M}.$$

Zij nu nog $\varkappa$ de magnetische susceptibiliteit van de staaf (die wij hier als een constante behandelen), en laten wij in plaats van H een nieuwe veranderlijke H' invoeren door de vergelijking

$$H = \frac{M}{\varkappa} - H' \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dan gaat (3) over in

$$A = Q \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + V H \dot{H} + V \frac{1}{\varkappa} M \dot{M} - \alpha V \dot{M} \dot{\vartheta} - V H' \dot{M}.$$

Aangezien hier de eerste drie termen volledige differentiaal-quotienten zijn, moeten de laatste twee te zamen

$$- \alpha V \dot{M} \dot{\vartheta} - V H' \dot{M} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

zulk een differentiaalquotient vormen. Aan deze voorwaarde is voldaan, als zij elkaar opheffen,

$$H' = - \alpha \dot{\vartheta} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Dit is in overeenstemming met de te bewijzen stelling, want uit (4) volgt dat bij afwezigheid van een uitwendig veld H, de magnetisatie bepaald wordt door

$$M = \varkappa H', \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

dus juist zoo is als door een magnetische kracht H' zou kunnen worden teweeggebracht.

Dat overigens H' noodzakelijk de waarde (6) moet hebben ziet men als volgt in. Elke andere waarde kan worden voorgesteld door $H' = - \alpha \dot{\vartheta} + H''$, en substitueert men dit in (5), dan komt er

$$- V H'' \dot{M}.$$

Aan de voorwaarde dat dit een volledig differentiaalquotient naar den tijd moet zijn, kan wel niet anders voldaan worden dan door waarden van H'' (b. v. $f(M)$ + const. $\ddot{M}$) die onafhankelijk van $\dot{\vartheta}$ zijn. Zulke waarden mogen echter niet aan (6) worden toegevoegd, omdat voor $\dot{\vartheta} = 0$ de betrekking $H = \frac{M}{\varkappa}$ moet gelden.

3 (Bldz. 49). *Theorie van het Starkeffect.*

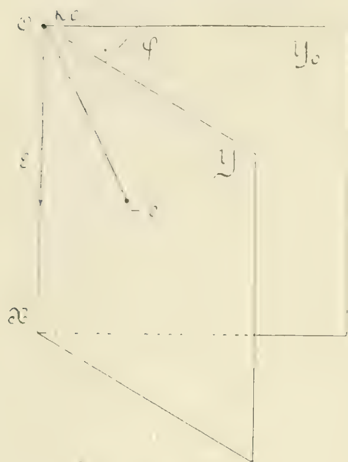


Fig. 17.

Een electron e loopt om een vastgehouden kern O (Fig. 17). Dit geheel bevindt zich in een homogeen electrisch veld, ter sterkte E.

De lading van het electron zij $-e$, die van de kern $\varkappa e$.

Wij kiezen de as OX in de richting van het electrische veld, OY loodrecht op OX in het vlak dat gebracht kan worden door e en OX. De hoek tusschen dit vlak en een vast vlak XOY_0, zij φ.

De potentieele energie van het systeem ($=0$ gesteld voor $r=\infty$ en $x=0$) bedraagt

$$U=-\frac{\varkappa e^2}{r}+eEx \quad . \; . \quad (8)$$

Ter berekening van de kinetische energie merken wij op dat als rechthoekige coördinaten kunnen ingevoerd worden x, $y \cos \varphi$ en $y \sin \varphi$. De snelheden zijn dan

$$\dot{x}, \dot{y} \cos\varphi - y \sin\varphi . \dot{\varphi} \; , \; \dot{y} \sin\varphi + y \cos\varphi . \dot{\varphi} .$$

Hieruit volgt:

$$T=\frac{1}{2} m (\dot{x}^2+\dot{y}^2+y^2 \dot{\varphi}^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Wij voeren nu nieuwe coördinaten ξ en η in, bepaald door de vergelijking

$$x+iy=\frac{1}{2}(\xi+i\eta)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Hieruit volgt

$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2) \; , \; y=\xi\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Wij kunnen hierin ξ altijd positief kiezen. Uit (*11*) volgt

$$r=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) \; , \; \xi=\sqrt{r+x} \; , \; \eta=\pm\sqrt{r-x} \quad . \; . \quad (12)$$

[1]) De hier gevolgde behandeling is grootendeels ontleend aan een college van Prof. LORENTZ, gegeven in den cursus 1916/17.

De lijnen $\xi^2 =$ const. zijn parabolen met hun brandpunt in C.

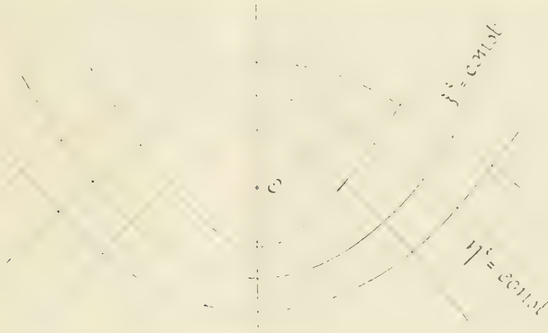


Fig. 18.

Evenzoo de lijnen $\eta^2 =$ const. De beide soorten van parabolen snijden elkaar loodrecht.

$$T = \frac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} m \xi^2 \eta^2 \dot{\varphi}^2 \quad \ldots\ldots (13)$$

$$U = -\frac{2 \varkappa e^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{1}{2} e E (\xi^2 - \eta^2) \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

De vergelijkingen van LAGRANGE leveren ons nu de bewegingsvergelijkingen.

Die voor φ wordt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0$$

of $$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.},$$

waarvoor wij kunnen schrijven:

$$m \xi^2 \eta^2 \dot{\varphi} = \sqrt{m} \,.\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

α eene constante zijnde.

De bewegingsvergelijking voor ξ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

wordt, als wij in $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ gebruik maken van (15):

$$\frac{d}{dt}\left\{ m (\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi} \right\} = m \xi (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{\alpha^2}{\xi^3 \eta^2} - \frac{4 \varkappa e^2 \xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} - e E \xi.$$

Deze vergelijking gaat bij gebruikmaking van de energievergelijking

$$\frac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{\alpha^2}{2 \xi^2 \eta^2} - \frac{2 \varkappa e^2}{\xi^2 + \eta^2} + $$
$$+ \frac{1}{2} e E (\xi^2 - \eta^2) = - A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

over in

$$(\xi^2 + \eta^2) \frac{d}{d t} \left\{ m (\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi} \right\} = \frac{\alpha^2}{\xi^3} - 2 e E \xi^3 - 2 A \xi.$$

Deze vergelijking kan geïntegreerd worden na vermenigvuldiging met $\dot{\xi}$. Men vindt

$$\frac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2)^2 \dot{\xi}^2 = - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\xi^2} - \frac{1}{2} e E \xi^4 - A \xi^2 + C_1 . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Ten einde de correspondeerende vergelijking voor η op te schrijven merken wij op, dat de formules (*13*) en (*14*) hetzelfde blijven als men ξ en η met elkaar verwisselt en tevens het teeken van E omkeert. Wij kunnen dus onmiddellijk opschrijven

$$\frac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2)^2 \dot{\eta}^2 = - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\eta^2} + \frac{1}{2} e E \eta^4 - A \eta^2 + C_2 . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Uit de energievergelijking (*16*) volgt

$$C_1 + C_2 = 2 \varkappa e^2 .$$

In plaats van de integratieconstanten C_1 en C_2 voeren wij in de constante β bepaald door

$$C_1 = e^2 (\varkappa + \beta) \; , \; C_2 = e^2 (\varkappa - \beta).$$

Ter bekorting noemen wij nu (met EPSTEIN):

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= - \frac{\alpha^2}{\xi^2} - e E \xi^4 - 2 A \xi^2 + 2 e^2 (\varkappa + \beta) \\ f_2(\eta) &= - \frac{\alpha^2}{\eta^2} + e E \eta^4 - 2 A \eta^2 + 2 e^2 (\varkappa - \beta) \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \quad (19)$$

dan kunnen wij (*17*) en (*18*) schrijven in den vorm

$$\left. \begin{aligned} m (\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi} &= \sqrt{m f_1(\xi)} \\ m (\xi^2 + \eta^2) \dot{\eta} &= \sqrt{m f_2(\eta)} \end{aligned} \right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

waarbij bedacht moet worden dat de tweede-machtswortels nu eens positief, dan weer negatief kunnen zijn.

Uit (*20*) kan dt geëlimineerd worden:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \frac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = 0 \; ,$$

of na integratie

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \int \frac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \beta' \; , \; \ldots\ldots \quad (21)$$

waarin β' een nieuwe integratieconstante is. Deze vergelijking stelt de baanvergelijking in het meridiaanvlak voor.

Ten einde een tweede vergelijking te verkrijgen schrijven wij (*20*):

$$\frac{\dot{\xi}}{\sqrt{f_1(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{m\,.\,(\xi^2+\eta^2)}} \; , \quad \frac{\dot{\eta}}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{m\,.\,(\xi^2+\eta^2)}} \; ,$$

waaruit volgt

$$\frac{\xi^2\,\dot{\xi}}{\sqrt{f_1(\xi)}} + \frac{\eta^2\,\dot{\eta}}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

of na integratie:

$$\int \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} + \int \frac{\eta^2\,d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{m}}(t - t_0) \; \ldots\ldots \quad (22)$$

Een derde vergelijking verkrijgt men uit (*20*) met inachtneming van (*15*):

$$\frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{f_1(\xi)}} + \frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{dt}{\sqrt{m}\,.\,\xi^2\,\eta^2} = \frac{d\varphi}{\alpha}$$

of na integratie:

$$\int \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{f_1(\xi)}} + \int \frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{f_2(\eta)}} = \frac{1}{\alpha}(\varphi - \varphi_0) \; \ldots\ldots \quad (23)$$

Hiermede is de integratie der bewegingsvergelijkingen afgeloopen.

Beschouwen wij de baanvergelijking (*21*) nader. Wij kunnen in plaats van (*19*) schrijven:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\xi) &= -\frac{eE}{\xi^2}(\xi^2-\xi_1^2)(\xi^2-\xi_2^2)(\xi^2-\xi_3^2) \\ f_2(\eta) &= \frac{eE}{\eta^2}(\eta^2-\eta_1^2)(\eta^2-\eta_2^2)(\eta^2-\eta_3^2) \end{aligned}\right\} \; \ldots \quad (24)$$

Wij denken het electrische veld E zwak in vergelijking met de aantrekking die het electron van de kern ondergaat. Dan wordt van $f_1(\xi) = 0$ als vergelijking in ξ^2 en van $f_2(\eta) = 0$ als vergelijking in η^2 telkens één der wortels zeer groot, en wel die van $f_1(\xi) = 0$, stel ξ_3^2, negatief, die van $f_1(\eta) = 0$, stel η_3^2, positief. Daar wij bij eene stationaire beweging niet kunnen toelaten dat ξ of η ∞ wordt, zal, daar $f_1(\xi)$ en $f_2(\eta)$ niet negatief kunnen worden, ξ^2 tusschen ξ_1^2 en ξ_2^2, η^2 tusschen η_1^2 en η_2^2 gelegen zijn, resp. met deze waarden samenvallen. Uit *(20)* besluiten wij dan dat ξ tusschen ξ_1 en ξ_2, η tusschen η_1 en η_2 heen en weer schommelt. De baan is dus beperkt tot een vierhoek $A\,B\,C\,D$ (Fig. 19) gevormd door de lijnen $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$.



Fig. 19.

Beschouwen wij nu een punt P van de baan, niet gelegen in de grenslijnen van den genoemden vierhoek. Dit punt kan in twee tegengestelde richtingen gepasseerd worden. Wij kiezen die beweging waarbij ξ toeneemt. Hierbij kan in dit punt η toenemen of afnemen. Laten wij, ten einde de gedachten te bepalen, denken dat η toeneemt. Voor het tegenovergestelde geval gelden geheel overeenkomstige beschouwingen.

Wij kunnen nu in *(21)* voor $\sqrt{f_1(\xi)}$ den positieven wortel kiezen. Dan zal voor $\sqrt{f_2(\eta)}$ ook de positieve wortel gekozen moeten worden. Dit blijft zoo totdat een dezer functies 0 wordt (het geval dat beide tegelijk 0 worden sluiten we hier uit). Zij dit het eerst met $f_2(\eta)$ het geval: $f_2(\eta_2) = 0$. Bij η_2 keert tegelijk het teeken van $d\eta$ en van $\sqrt{f_2(\eta)}$ om. De integraal $\int \frac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}}$ blijft toenemen. Hetzelfde geldt voor den omkeer der bewegings-richting bij η_1, en overeenkomstige opmerkingen zijn te maken betreffende $\int \frac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}}$.

Wij kunnen (*21*) schrijven:

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\,\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\,\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \beta' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Zij nu voor een bepaalden doorgang door $P\ (\xi\,,\eta)$:

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\,\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} = \sigma_1\ ,\ \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\,\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \sigma_2$$

en zij

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\,\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} = s_1\ ,\ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\,\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = s_2\ .$$

Fig. 20.

Dan zal bij het daarna weder passeeren der ξ-lijn van P $\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\,\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}}$ achtereenvolgens de waarden aannemen:

$$-\sigma_1 + 2\,s_1\ ,\ \sigma_1 + 2\,s_1\ ,\ -\sigma_1 + 4\,s_1\ ,\ \sigma_1 + 4\,s_1 \text{ enz.},$$

en evenzoo bij het weder passeeren van de η-lijn van P $\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\,\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}}$ de waarden

$$-\sigma_2 + 2\,s_2\ ,\ \sigma_2 + 2\,s_2\ ,\ -\sigma_2 + 4\,s_2\ ,\ \sigma_2 + 4\,s_2, \text{ enz.}$$

Is nu $s_1 = s_2$, dan volgt uit het feit dat σ_1 en σ_2 aan (*25*) voldoen, dat dit ook 't geval is met $\sigma_1 + 2\,s_1$ en $\sigma_2 + 2\,s_2$. Dan is dus de baan na één omloop gesloten.

Zijn s_1 en s_2 onderling meetbaar, dan wordt de baan na een zeker aantal omloopen gesloten; zijn s_1 en s_2 onderling onmeetbaar, dan is de baan niet gesloten en wordt de vierhoek $A\,B\,C\,D$ door de baan dicht gevuld. Dit alles is geheel analoog aan hetgeen bij de figuren van LISSAJOUS is op te merken.

Wij moeten nu van alle door (*21*), (*22*) en (*23*) bepaalde bewegingen de stationaire bewegingen uitkiezen door toepassing van den algemeenen regel van § 23. Daartoe verdeelen wij nu T volgens (*13*) in:

$$T_1 = \frac{1}{2}\,m\,(\xi^2 + \eta^2)\,\dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{m\,f_1(\xi)}\ .\ \dot{\xi}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\,m\,(\xi^2 + \eta^2)\,\dot{\eta}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{m\,f_2(\eta)}\ .\ \dot{\eta}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\,m\,\xi^2\,\eta^2\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{m}\,.\,\alpha\,\dot{\varphi}\ .$$

Volgens den regel van § 23 is de eerste quanta-voorwaarde nu:

$$\int T_1\, d\, t = \frac{1}{2} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{m\, f_1(\xi)}\, .\, d\,\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sqrt{m\, f_1(\xi)}\, d\,\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\, .\, 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{m\, f_1(\xi)}\, d\,\xi = \frac{1}{2}\, n_1\, h,$$

of

$$2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{m\, f_1(\xi)}\, d\,\xi = n_1\, h. \qquad (26)$$

Evenzoo de tweede:

$$2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{m\, f_2(\eta)}\, d\,\eta = n_2\, h. \qquad (27)$$

Wat de derde quanta-voorwaarde betreft is op te merken, dat het meridiaanvlak, nadat φ van 0 tot $2\,\pi$ is geloopen, weer denzelfden stand inneemt, en dus $2\,\pi$ als periode is op te vatten, zoodat wij de derde quanta-voorwaarde zullen schrijven:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{m}\, .\, \alpha\, d\,\varphi = n_3\, h$$

of

$$\sqrt{m}\, .\, 2\,\pi\,\alpha = n_3\, h. \qquad (28)$$

In de quanta-voorwaarden *(26)*, *(27)*, *(28)* zitten alleen de integratieconstanten A, α en β.

Wij kunnen nu door eliminatie van α en β de energie $-A$ in de quanta-getallen n_1, n_2 en n_3 uitdrukken.

Wij zullen daarbij ervan gebruik maken, dat de kracht die het uitwendige veld op het electron uitoefent, altijd nog klein is vergeleken met de kracht, die de kern erop uitoefent, en ons bepalen tot eerste machten van E. Wij zullen dan dus moeten vinden dat de splitsing der spectraallijnen onder de werking van het electrische veld, zoo zij er is, evenredig is aan E.

Wij voeren ter vereenvoudiging de schrijfwijze in:

$$\xi^2 = u\ ,$$

en schrijven de eerste vergelijking van *(19)* als volgt:

$$f_1(\xi) = \frac{2\,A}{u} \left\{ p\, u^3 - (u - q)\,(u - r) \right\}$$

waarin

$$p = -\frac{c\,E}{2\,A}\ ,\ q + r = \frac{e^2}{A}(\varkappa + \beta)\ ,\ q\,r = \frac{\alpha^2}{2\,A}\ \ldots\ (29)$$

Daar p klein is, kunnen de drie wortels van $f_1(\xi) = 0$ als volgt benaderd worden:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= q + \frac{q^3}{q-r}\,p\ , \\ u_2 &= r + \frac{r^3}{r-q}\,p\ , \\ u_3 &= \frac{1}{p} - (q+r). \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (30)$$

Dan is

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= 2\,A\,\frac{p}{u}(u-u_3)(u-u_1)(u-u_2) \\ &= 2\,A\left\{1-(q+r)\,p\right\}\frac{1}{u}\left(1-\frac{u}{u_3}\right)(u-u_1)(u_2-u). \end{aligned}$$

De eerste quanta-voorwaarde (26) gaat hiermede, rekening houdend met de kleinheid van p, over in:

$$n_1\,h = \sqrt{2\,m\,A}\left\{1-\frac{1}{2}(q+r)\,p\right\}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{u}\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}\,du$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2\,m\,A}\,p\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}\,d\,u\ ,$$

of

$$n_1\,h = \sqrt{2\,m\,A}\left\{1-\frac{1}{2}(q+r)\,p\right\}\left\{\frac{1}{2}\pi(u_1+u_2)-\pi\sqrt{u_1\,u_2}\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2\,m\,A}\,p\,.\,\frac{\pi}{8}(u_2-u_1)^2\ .$$

Hierin u_1 en u_2 volgens (30) gesubstitueerd geeft:

$$\frac{n_1\,h}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}\,m\,A}\left\{q+r-2\sqrt{q\,r}+\frac{1}{8}\Big[3(q+r)^2-4\,q\,r\Big]\,p\right\}.$$

Met p, q en r volgens (29) wordt dit

$$\sqrt{\frac{1}{2}\,m\,A}\left\{\frac{e^2}{A}(\varkappa+\beta)-\alpha\sqrt{\frac{2}{A}}\right\}-$$
$$-\frac{1}{16}\,c\,E\sqrt{\frac{m}{2\,A}}\left\{\frac{3\,e^4}{A^2}(\varkappa+\beta)^2-\frac{2\,\alpha^2}{A}\right\} = \frac{n_1\,h}{\pi}\ \ldots\ (31)$$

De tweede quanta-voorwaarde, die betrekking heeft op η, kan uit deze verkregen worden door het teeken van E en β te veranderen:

$$\sqrt{\frac{1}{2} m A} \left\{ \frac{e^2}{A} (\varkappa - \beta) - \alpha \sqrt{\frac{2}{A}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{16} e E \sqrt{\frac{m}{2 A}} \left\{ \frac{3 e^4}{A^2} (\varkappa - \beta)^2 - \frac{2 \alpha^2}{A} \right\} = \frac{n_2 h}{\pi} \quad . \; . \; (32)$$

Wij schrijven hier de derde quanta-voorwaarde (28) in den vorm:

$$2 \sqrt{m} \, . \, \alpha = \frac{n_3 h}{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

Uit deze vergelijkingen (31), (32) en (33) zijn nu A, α en β op te lossen.

Beschouwen wij even β. Eene beweging met dezelfde n_1, n_2, n_3 is mogelijk bij $E = 0$. De daarbij behoorende β noemen wij β_0. Het is duidelijk dat, in verband met de kleinheid van E, β weinig van β_0 zal verschillen, in kleine termen dus door β_0 zal kunnen vervangen worden. Wat β_0 betreft volgt, wanneer (32) van (31) afgetrokken wordt (voor $E = 0$):

$$\sqrt{\frac{1}{2} m A_0} \; \frac{e^2}{A_0} \, . \, 2 \beta_0 = (n_1 - n_2) \frac{h}{\pi}$$

terwijl optelling van (31), (32) met inachtneming van (33) geeft:

$$\sqrt{\frac{1}{2} m A_0} \; \frac{e^2}{A_0} \, . \, 2 \varkappa = (n_1 + n_2 + n_3) \frac{h}{\pi}$$

zoodat

$$\beta_0 : \varkappa = (n_1 - n_2) : (n_1 + n_2 + n_3).$$

Optelling van (31) en (32) geeft nu met inachtneming van (33):

$$e^2 \sqrt{\frac{2 m}{A}} \varkappa - n_3 \frac{h}{\pi} - \frac{3}{4} e E \sqrt{\frac{m}{2 A}} \; \frac{e^4 \varkappa \beta_0}{A^2} = (n_1 + n_2) \frac{h}{\pi}$$

waaruit verder volgt

$$- A = - (n_1 + n_2 + n_3)^{-2} \frac{2 \pi^2 \varkappa^2 m e^4}{h^2} +$$

$$+ \frac{3}{8} (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + n_3) \frac{h^2}{\pi^2 \varkappa m e} E \quad . \; . \; . \; . \; (34)$$

Daar de drie stukken in welke wij de kinetische energie (13) verdeeld hebben, niet negatief kunnen zijn, zoo volgt uit de wijze waarop hier de quanta-getallen zijn ingevoerd, dat n_1, n_2, n_3 niet negatief kunnen zijn.

Uit (34) volgt nu volgens den regel van BOHR voor de frequentie van het licht dat uitgezonden wordt wanneer het electron van een bewegingstoestand gekenmerkt door de getallen n_1, n_2, n_3 overgaat tot een bewegingstoestand gekenmerkt door de getallen n'_1, n'_2, n'_3:

$$\nu = \left\{ \frac{1}{(n'_1 + n'_2 + n'_3)^2} - \frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} \right\} \frac{2\pi^2 \varkappa^2 m e^4}{h^3} +$$

$$\frac{3}{8} \left\{ (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + n_3) - (n'_1 - n'_2)(n'_1 + n'_2 + n'_3) \right\} \frac{h}{\pi^2 \varkappa m e} E \quad (35)$$

Voor $E = 0$ krijgen wij (met $\varkappa = 1$) de formule van BALMER terug. Door vergelijking met (50) zien wij dat inderdaad de coëfficient ook dezelfde is als bij de afleiding van BOHR.

Verder wordt door (35) het STARK-effect zeer mooi weergegeven. Door het aanbrengen van het veld E ondergaat het aantal trillingen eene verandering

$$\Delta \nu = \frac{3}{8} \frac{h}{\pi^2 \varkappa m e} Z E$$

als

$$Z = (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + n_3) - (n'_1 - n'_2)(n'_1 + n'_2 + n'_3) \quad . . (36)$$

De splitsing blijkt dus inderdaad (in eerste benadering) evenredig te zijn met E. Verder is op te merken dat n_1 en n_2, resp. n'_1 en n'_2 volkomen gelijke rol spelen, zoodat als in een gas op zeker oogenblik een aantal overgangen plaats grijpen met bepaalde waarden van $n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n'_3$, er evenzoo overgangen zullen zijn, met geen andere verandering in deze getallen dan dat n_1 en n_2, en evenzoo n'_1 en n'_2 met elkaar zijn verwisseld. Op den eersten term in (35), het van E onafhankelijke trillingsgetal heeft deze verwisseling geen invloed, maar het teeken van Z wordt er, zonder dat de grootte verandert, door omgekeerd. Derhalve zullen de lijnen telkens paarsgewijze, symmetrisch ten opzichte van de oorspronkelijke, nog niet gesplitste lijn, optreden.

Voor waterstof ($z = 1$) is voor de gewone BALMER-reeks:

$$n'_1 + n'_2 + n'_3 = 2.$$

Verder is voor

$$H_\alpha : n_1 + n_2 + n_3 = 3$$
$$H_\beta : n_1 + n_2 + n_3 = 4$$
$$H_\gamma : n_1 + n_2 + n_3 = 5, \text{ enz.}$$

Deze waarde van $n_1 + n_2 + n_3$ voor H_α kan op verschillende wijzen tot stand komen. Dit correspondeert daarmede dat de H_α-lijn in meerdere paren gesplitst wordt.

Het is verder duidelijk dat het aantal mogelijke wijzen waarop $n_1 + n_2 + n_3 = 4$ gevormd kan worden, grooter is dan het aantal wijzen waarop $n_1 + n_2 + n_3 = 3$ gevormd kan worden. H_β zal dus in een grooter aantal componenten gesplitst worden dan H_α, H_γ in een weer grooter aantal componenten, enz., gelijk ook inderdaad door STARK gevonden is. In dit opzicht is dus het STARK-effect verschillend van het ZEEMAN-effect, waar de verschillende lijnen van eenzelfde reeks dezelfde splitsing ondergaan.

Uit (36) volgt voor de grootte van de splitsing in golflengte uitgedrukt:

$$\Delta\lambda = \frac{3}{8}\,\frac{h\,\lambda^2}{\pi^2\,z\,m\,e\,c}\,Z\,E.$$

Wij vinden voor H_α ($\lambda = 6562{,}8 \times 10^{-8}$ in lucht), met $h = 6{,}56 \times 10^{-27}$, $e = 4{,}77 \times 10^{-10}$, $\frac{e}{m} = 5{,}295 \times 10^{17}$:

$$\Delta\lambda = 8{,}33 \times 10^{-11}\ Z\,E.$$

Bij de proeven van STARK was $E \left(= 104000\ \frac{\text{volt}}{\text{cm}} \right) = \frac{104000}{300}$. Dit geeft

$\Delta\lambda = 2{,}89 \times 10^{-8}\,Z$, of als we $\Delta\lambda$ in Ångström-eenheden aangeven: $\Delta\lambda = 2{,}89\ Z\,\text{Å}$.

Bij het nagaan welke waarden Z kan hebben moet eene beperking in acht worden genomen. SOMMERFELD was reeds bij de studie van de detailstructuur der spectraallijnen (§ 25) empirisch gekomen tot den regel dat bij den overgang van het

electron van eene bewegingswijze in eene andere eene toename van de quanta-getallen niet zou kunnen voorkomen. Intusschen vindt EPSTEIN dat op dien regel uitzonderingen voorkomen, en komt hij tot de voorwaarden:

$$n'_1 \leqq n_1\,,\ n'_2 \leqq n_2\,,\ n'_3 \leqq n_3 + 1\,,$$

waarbij dan het geval $n'_3 = n_3 + 1$ slechts optreedt als een der quanta-sprongen $n_1 - n'_1$ of $n_2 - n'_2$ groot is.

Met inachtneming van deze voorwaarden komen wij voor H_α tot de volgende splitsing: [1])

Z	$\Delta\lambda$ berekend	$\Delta\lambda$ waargenomen [2])
5	14,4	—
4	11,6	11,5
3	8,7	8,8
2	5,8	6,2
1	2,9	2,6
0	0	0

Bij H_γ kan Z loopen tot 21: inderdaad heeft STARK bij deze lijn een veel grooter aantal componenten waargenomen.

4 (Bldz. 54). Deze stelling, bij welke van de veranderlijkheid der massa met de snelheid wordt afgezien — hetgeen intusschen voor de deeltjes in de kern niet zonder bedenking is —, kan afgeleid worden uit de stelling van het viriaal. Volgens deze [3]) is voor een stationair stelsel

$$\Sigma\,\frac{1}{2}\,m\,v^2 = -\,\frac{1}{2}\,\Sigma(Xx + Yy + Zz),$$

waarin $x\,,y\,,z$ voorstellen de rechthoekige coördinaten van een deeltje, $X\,,Y\,,Z$ de componenten van de op dat deeltje werkende kracht. De sommen zijn uit te strekken over alle deeltjes van het systeem, en verder is gedacht dat men voor de beide leden van de vergelijking neemt het gemiddelde over een lang tijdsverloop (of eventueel over eene periode).

---

[1]) Bij H_α komt het geval $n'_3 = n_3 + 1$ niet voor.

[2]) J. STARK. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. V. Feinzerlegung der Wasserstoffserie. Ann. d. Phys. 4 48 (1915), p. 193.

[3]) Zie b.v. J. D. VAN DER WAALS. Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1899, p. 5.

Werken op de deeltjes alleen krachten die afkomstig zijn van aantrekkingen of afstootingen van de andere deeltjes, gericht volgens de verbindingslijn, dan kan deze stelling gebracht worden in den vorm

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \Sigma F r,$$

waarin F voorstelt de kracht, positief als zij aantrekkend is, tusschen twee deeltjes, welker onderlinge afstand r bedraagt, en waarin de sommen zijn uit te strekken over alle paren van deeltjes.

Zijn nu de krachten tusschen de deeltjes te danken aan hunne electrostatische aantrekkingen of afstootingen, dan is

$$F = - \frac{e e'}{r^2}$$

en

$$F r = - \frac{e e'}{r} = - u$$

als u de potentieele energie van het betreffende paar voorstelt. De viriaalstelling gaat dan dus over in

$$T = - \frac{1}{2} U,$$

als T de gemiddelde kinetische en U de gemiddelde potentieele energie van het stelsel is.

H. A. LORENTZ.

HET MAGNETISME.

Voordrachten gehouden in Januari 1921,

bewerkt door W. H. KEESOM.

I.

§ 1. Hoewel de verschijnselen van het magnetisme in vele richtingen grondig onderzocht zijn, bergen zij toch nog veel geheimzinnigs. Zij bieden eene groote mate van verscheidenheid. Het zal dus noodig zijn, dat wij ons beperken. Wij zullen dan dezen eersten keer ons bepalen tot wat wij zouden kunnen noemen de oude of algemeene theorie van het magnetisme.

Het is wenschelijk dat wij ons daartoe eenige grondbegrippen in herinnering brengen. Met name zullen daarbij ter sprake moeten komen de *magnetisatie*, de *magnetische kracht* en de *magnetische inductie.* Dit zijn drie grootheden die door richting en grootte bepaald worden (vectoren).

Allereerst de magnetisatie. Om ons eene eenigszins aanschouwelijke voorstelling te maken kunnen wij, zonder daaraan te veel gewicht te hechten, denken aan de oude magnetische fluida, of in het algemeen aan twee agentia, noord- en zuid-, of positief en negatief magnetisme.

De werkingen tusschen twee hoeveelheden magnetisme worden bepaald door de wet van COULOMB. Wij zullen daarbij de eenheden voor de hoeveelheid magnetisme zoo gekozen denken, dat de kracht tusschen twee hoeveelheden m en m' op den afstand r gegeven wordt door

$$\frac{m\,m'}{4\,\pi\,r^2}.$$

§ 2. De ervaring leert dat het niet mogelijk is een van beide soorten van magnetisme afzonderlijk te verkrijgen. In een lichaam is altijd evenveel positief als negatief magnetisme. De algebraische som der hoeveelheden magnetisme in een lichaam is steeds nul.

Alleen bevinden zich het noord- en zuidmagnetisme in een gemagnetiseerd lichaam niet op dezelfde plaats.

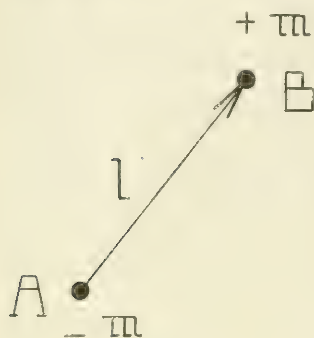


Fig. 1.

Als eenvoudigste geval kunnen wij ons voorstellen twee gelijke en tegengestelde hoeveelheden magnetisme $-m$ en $+m$ in de punten A en B (Fig. 1). Deze vormen wat men noemt een magnetisch moment. Hieraan wordt de grootte $m\,l$ toegekend, als l de afstand AB is; de richting is die van A naar B.

Inderdaad zullen de werkingen, die dit systeem naar buiten uitoefent, evenredig zijn met de hoeveelheden m, maar bovendien zullen zij afhangen van den afstand l over welken noord- en zuidmagnetisme uit elkander geschoven zijn.

Wij kunnen nu gemakkelijk de voor het magnetisch moment gegeven definitie generaliseeren.

Bevat een klein ruimtedeel (volume-element) van een lichaam van elkaar gescheiden hoeveelheden noord- en zuidmagnetisme, zoo dat de algebraische som nul is, dan zal (Fig. 2) de uitdrukking

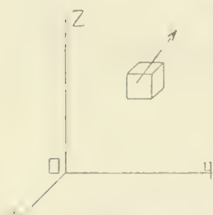


Fig. 2.

$$\Sigma\, m\, x\,,$$

gesommeerd over alle hoeveelheden magnetisme in dat volume-element, ons eene aanwijzing geven in welke mate noord- en zuid-magnetisme in de X-richting uiteen liggen. Wij beschouwen evenzoo $\Sigma\, m\, y$ en $\Sigma\, m\, z$, vatten die drie grootheden op als vectoren in de X, Y en Z-richtingen, en stellen deze samen tot een enkelen vector. Dit is dan het magnetisch moment van het beschouwde volume-element.

Men ziet gemakkelijk in, dat deze definitie, toegepast op het geval van Fig. 1, de aldaar gegeven waarde voor het magnetisch moment oplevert.

Een lichaam is gemagnetiseerd als de volume-elementen ervan

een magnetisch moment hebben: verandert daarbij, zooals wij zullen onderstellen, de toestand van het lichaam geleidelijk van punt tot punt, dan is op een bepaalde plaats het moment van een volume-element evenredig met de grootte van dit laatste. Als maat voor de magnetisatie dient het magnetisch moment **M** per volume-eenheid. Is de vector **M** in elk punt in grootte en richting gegeven, dan is de magnetische toestand van het lichaam geheel bekend.

Voorbeelden van gemagnetiseerde lichamen: natuurlijke magneten (magneetijzersteen), staalmagneten (hoefmagneten, rechte magneetstaaf).

IJzer, gebracht in de nabijheid van een magneetpool wordt gemagnetiseerd.

Ieder lichaam, dat in de nabijheid van een magneetpool gebracht wordt, wordt gemagnetiseerd, hoewel in zeer verschillende mate, en ook op verschillende wijze.

Zoo vond Brugmans te Leiden dat bismuth niet op dezelfde wijze als ijzer, doch tegengesteld gemagnetiseerd wordt: het bismuth is diamagnetisch.

Faraday [1]) in het bijzonder heeft voor een groot aantal stoffen onderzocht, hoe zij gemagnetiseerd worden, en gevonden dat zij in dit opzicht tot twee klassen kunnen worden gegroepeerd: de paramagnetische en de diamagnetische stoffen.

§ 3. Een gemagnetiseerd lichaam is in het algemeen een gecompliceerd iets. Wat zijne werkingen naar buiten betreft kan het in menig opzicht vervangen worden door een meer eenvoudige verdeeling van magnetisme.

Beschouwen wij daartoe eens een magneetstaaf, die in hare lengterichting overal gelijkmatig gemagnetiseerd is, zoodat overal de magnetisatie gelijk gericht en even groot is. Vatten wij in het oog twee even groote volume-deeltjes *a b* en *b c* naast elkander (Fig. 3). In *a b* liggen zuidpolen in het grensvlak *a*, noordpolen in het grensvlak *b*; *b c* heeft zuidpolen in *b*, noordpolen in *c*. De werkingen naar buiten van de genoemde noordpolen en

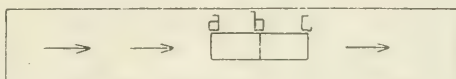


Fig. 3.

[1]) M. Faraday. On new magnetic actions, and on the magnetic condition of all matter. Experimental Researches in Electricity 3. Series 20 and 21, 1845.

zuidpolen in b heffen elkander, daar zij even sterk zijn, op. Voor $a\,b$ en $b\,c$ gezamenlijk blijft alleen de werking naar buiten over van de polen in a en c. Zoo blijft voor den geheelen magneet slechts over het magnetisme in de eindvlakken.

Is de magnetisatie niet overal even groot, dan wordt het resultaat anders. Is b.v. de magnetisatie naar rechts toenemend, dan zullen de polen in $b\,c$ iets sterker zijn dan in $a\,b$, en blijft in b zuidmagnetisme over. Dan houden wij dus ook nog eene verdeeling van magnetisme over het binnenste van het lichaam over.

Wij kunnen dus de werkelijke verdeeling van het magnetisme vervangen denken door eene „aequivalente verdeeling". Deze strekt zich in het algemeen zoowel over het oppervlak als over het binnenste van het lichaam uit. Men vindt [1]) voor de dichtheid dezer verdeeling over het oppervlak

$$\mathbf{M}_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

n.l. de component van $\mathbf{M}$ volgens de naar buiten getrokken normaal n (Fig. 4).



Fig. 4.

De dichtheid der verdeeling over het binnenste wordt, als $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ de componenten van $\mathbf{M}$ volgens drie onderling loodrechte coördinaatassen zijn, gegeven door

$$-\left(\frac{\partial\,\mathbf{M}_x}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\mathbf{M}_y}{\partial\,y}+\frac{\partial\,\mathbf{M}_z}{\partial\,z}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

of

$$-\operatorname{div}\,\mathbf{M}\,.$$

§ 4. De magnetische kracht $\mathbf{H}$ is de kracht die op een eenheid noordmagnetisme werkt. Wat het binnenste van een gemagnetiseerd lichaam betreft, moet deze definitie worden aangevuld door de toevoeging dat die eenheid gedacht moet worden in een holte in het lichaam, die de gedaante heeft van een nauw kanaaltje in de richting der magnetisatie.

Voorzoover de magnetische kracht door een magnetisatie wordt teweeggebracht, is zij zoowel buiten als binnen een gemagnetiseerd lichaam gelijk aan de kracht die door de in § 3 genoemde aequivalente verdeeling van magnetisme wordt uitgeoefend.

Een magnetische kracht wordt echter ook door electrische

[1]) Zie het bewijs in het Aanhangsel onder I.

stroomen teweeg gebracht. Ook electriciteitsbeweging brengt een magnetisch veld voort.

Loopt in den rechten draad $a\,b$ een stroom i dan ondervindt een magneetpool in P een kracht (Fig. 5). De krachtlijnen zijn concentrische cirkels.

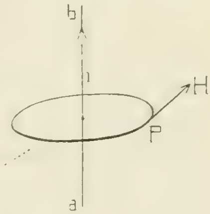


Fig. 5.

Denken wij een volgens zulk een lijn loopenden ring, en een magneetpool die als een aangeregen kraal zich daar langs bewegen kan. Deze magneetpool zou zich dan steeds sneller om den draad heen gaan bewegen.

Wij kunnen nu den arbeid beschouwen, die door de magnetische kracht verricht wordt wanneer de magneetpool éénmaal geheel om den draad heen loopt. Het blijkt dat die arbeid dezelfde waarde heeft, onverschillig langs welke lijn de magneetpool om den draad heenloopt, mits hij dit slechts eenmaal doet en uitkomt in het punt van waaruit hij is vertrokken.

Er bestaat een belangrijk verband tusschen dien arbeid en de intensiteit van den electrischen stroom. Ten einde dat verband algemeen uit te drukken beschouwen wij een gesloten lijn s, en een oppervlak σ dat die lijn tot rand heeft (Fig. 6). Kies langs s een bepaalde richting van rondgang als de positieve, b.v. de richting $A\,B\,C\,A$. Trek verder de normaal n aan het oppervlak zoo, dat de positieve richting langs s en de richting van n bij elkaar passen zooals de draaiing en de voortgang van een kurkentrekker.

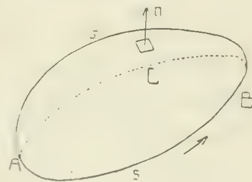


Fig. 6.

Het bedoelde verband wordt dan uitgedrukt door:

Stelling I: De arbeid der magnetische kracht, als een positieve eenheid magnetisme de lijn s in positieve richting doorloopt, is gelijk aan de hoeveelheid electriciteit die per tijdseenheid door het oppervlak σ gaat, die hoeveelheid positief gerekend als de stroom naar den door n aangewezen kant gaat.

§ 5. Wat de magnetische inductie betreft zullen wij ons lange beschouwingen besparen door eenvoudig als definitie te stellen dat de magnetische inductie $\mathbf{B}$ gevonden wordt door de vectoren $\mathbf{M}$ en $\mathbf{H}$ samen te stellen (Fig. 7):

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aangezien er in het luchtledige, of, als men wil, in den aether nooit sprake is van een magnetisatie, zoo is dus in den aether:

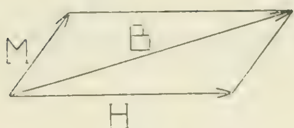
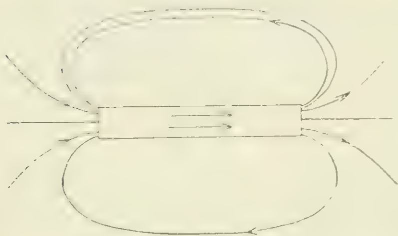


Fig. 7.

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hoofdeigenschap der magnetische inductie. Zij is solenoidaal verdeeld, n.l. op dezelfde wijze als de verplaatsing of de snelheid in een onsamendrukbare vloeistof.

Dit kan ons op gemakkelijke wijze een beeld geven van het beloop der magnetische inductie, zie b.v. Fig. 8 voor een magneetstaaf. In een onsamendrukbare vloeistof kunnen wij lijnen denken die overal de richting hebben van de snelheid. Die lijnen kunnen wij vereenigen tot buizen, stroombuizen. Door elke doorsnede van zoo een buis stroomt in gelijke tijden evenveel vloeistof. De snelheid is overal in een stroombuis omgekeerd evenredig aan de loodrechte doorsnede van die buis.


Fig. 8.

Evenzoo kunnen wij ons denken inductielijnen, die overal de richting hebben van de magnetische inductie. Verder inductiebuizen. De grootte van de magnetische inductie is dan overal in een inductiebuis omgekeerd evenredig aan de loodrechte doorsnede van die buis.

De solenoidale verdeeling van de magnetische inductie kan als volgt algebraisch worden uitgedrukt:

In het binnenste van een lichaam is

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

aan de grens van twee lichamen 1 en 2 is

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

d.w.z. de normale component van de inductie blijft onveranderd bij overgang van het lichaam 1 naar het lichaam 2.

Denken wij een oppervlak σ, zooals in § 4 genoemd is (Fig. 6). Hebben wij te doen met een vloeistof dan kunnen we spreken van den stroom door dat oppervlak. Evenzoo spreken we nu

van de inductie, of van den flux, door het oppervlak heen. Zij wordt op een dergelijke wijze berekend als het volume van een onsamendrukbare vloeistof, dat per tijdseenheid er door zou gaan. Men vermenigvuldigt n.l. elk element van σ met $\mathbf{B}_n$ en telt al de uitkomsten bij elkaar op.

Beschouwen wij twee oppervlakken σ_1 en σ_2, die dezelfde randlijn s hebben. Evenals bij de strooming van eene onsamendrukbare vloeistof door beide oppervlakken in denzelfden tijd evenveel stroomt, zoo zal ook de flux door beide oppervlakken even groot zijn. Men kan dus spreken van den flux door de randlijn s heen.

§ 6. Met behulp van de magnetische inductie zijn wij in staat de electromotorische kracht van inductiestroomen te berekenen.

Zij s (Fig. 6) b.v. een gesloten koperdraad. Verandert het magnetisch veld, of liever de magnetische inductie, dan ontstaat in den draad een inductiestroom. De electromotorische kracht, die geacht kan worden dezen inductiestroom te doen ontstaan, wordt bepaald door de volgende stelling.

Stelling II. De electromotorische kracht van inductie (de arbeid, door de electrische kracht verricht als een eenheid electriciteit de lijn s doorloopt) is gelijk aan de vermindering per tijdseenheid van de magnetische inductie door σ.

Bij de toepassing moet de lijn s zich met de materie bewegen.

De inductiestroomen die ontstaan in geleiders die zich bewegen, kunnen veelal uit het volgende theorema worden afgeleid.

Stelling III. Heeft een punt van een geleider de snelheid $\mathbf{v}$ dan werkt daar een electrische kracht, die loodrecht staat op $\mathbf{v}$ en $\mathbf{B}$, en waarvan de grootte door het oppervlak van het op $\mathbf{v}$ en $\mathbf{B}$ beschreven parallelogram wordt gegeven (Fig. 9). De richting der electrische kracht past bij die der wenteling van $\mathbf{v}$ naar $\mathbf{B}$.

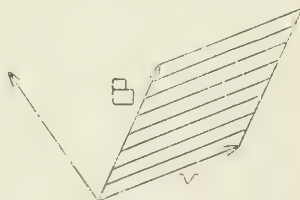


Fig. 9.

De componenten dezer electrische kracht zijn

$$\mathbf{v}_y\,\mathbf{B}_z - \mathbf{v}_z\,\mathbf{B}_y,\ \mathbf{v}_z\,\mathbf{B}_x - \mathbf{v}_x\,\mathbf{B}_z,\ \mathbf{v}_x\,\mathbf{B}_y - \mathbf{v}_y\,\mathbf{B}_x \quad . \; . \; . \quad (7)$$

§ 7. Wij onderscheiden in een magnetisch veld de magnetische kracht $\mathbf{H}$ en de magnetische inductie $\mathbf{B}$. Wij kunnen ons die als

oorzaak en gevolg denken. Wij kunnen ons n.l. voorstellen dat de magnetische kracht **H** iets voortbrengt, dat door de magnetische inductie **B** bepaald is. Wij hebben de eenheden zoo gekozen dat in den aether dan **B** = **H** wordt.

In een lichaam hebben wij te doen met den aether en bovendien met materie. Dan is de opgewekte magnetische inductie grooter dan **H**, of eventueel (in diamagnetische lichamen) kleiner.

Het verband tusschen **B** en **H** hangt samen met het verband tusschen de magnetisatie **M** en **H**. Dit verband tusschen **M** en **H** is in vele gevallen ingewikkeld.

In eenvoudige gevallen is **M** evenredig met **H** en in dezelfde richting. Voor eene stof als b.v. ijzer geldt dit alleen, en dan nog slechts in bepaalde gevallen (zie verder in deze §) voor kleine waarden van **H**, bij groote niet meer.

In Fig. 10*a* is voor het geval dat **M** evenredig is aan **H**, de

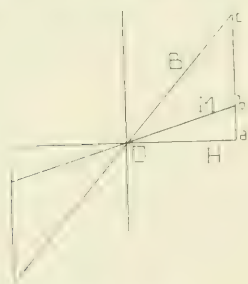


Fig. 10*a*.

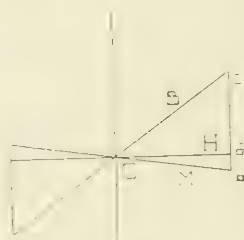


Fig. 10*b*.

waarde van **M** als functie van **H** door de rechte lijn Ob voorgesteld, zoodat ab de magnetisatie is, die bij de magnetische kracht Oa behoort. Het is dan gemakkelijk in de dezelfde figuur **B** als functie van **H** voor te stellen. Volgens verg. (3) behoort b.v. bij de magnetische kracht Oa een inductie, die men vindt door $ac = ab + Oa$ te maken. Zoo krijgt men de lijn Oc die voor elke waarde van de magnetische kracht de inductie geeft.

Uit
$$\mathbf{M} = \varkappa\, \mathbf{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$
($\varkappa$ constante) volgt, zie verg. (3):
$$\mathbf{B} = (1 + \varkappa)\, \mathbf{H}$$
of
$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$
als $\mu = 1 + \varkappa$.

Fig. 10*b* geldt voor diamagnetische stoffen, voor welke $\varkappa$ negatief

is. Wij merken hierbij op dat de absolute waarde van $\varkappa$ bij alle diamagnetische stoffen kleiner (zelfs veel kleiner) dan 1 is, zoodat μ altijd positief is.

Men noemt $\varkappa$ de susceptibiliteit, μ de permeabiliteit.

Tevens blijkt dat $\mu > 1$ voor paramagnetische stoffen ($\varkappa > 0$), en dat $\mu < 1$ voor diamagnetische stoffen ($\varkappa < 0$). In den aether is $\mu = 1$.

Voor ijzer wordt het verband tusschen **M** en **H** voorgesteld door Fig. 11.

Gaan wij uit van ongemagnetiseerd ijzer en brengen wij een aangroeiend magnetisch veld aan. De magnetisatie neemt dan toe volgens de aanvankelijk naar boven gekromde lijn Oa. Wordt de magnetische kracht grooter, dan neemt ten slotte **M** in steeds geringer mate toe, het ijzer wordt verzadigd. Laten wij, nadat een zeker punt, b bijvoorbeeld bereikt is, de magnetische kracht weer afnemen, dan volgt **M** de kromme bc, d.w.z. de magnetisatie neemt niet weer bij elke waarde van **H** de waarde aan die zij bij het aangroeien van **H** had, maar zij blijft voortdurend eene grootere waarde behouden. Zelfs wanneer $\mathbf{H} = 0$ geworden is, behoudt **M** eene zekere waarde Oc. Laten wij dan **H** in tegengestelde richting aangroeien, dan volgt de magnetisatie de kromme cde. Nu **H** weer latende afnemen tot nul en haar in de oorspronkelijke richting weer latende toenemen volgt **M** de kromme cfb. De kromme $bcdefgb$ heet de hysteresiskromme.

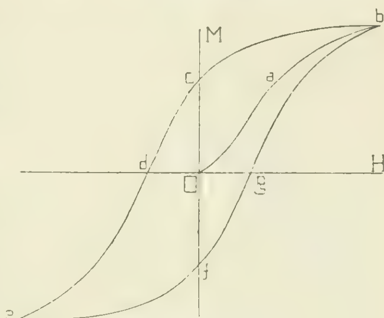


Fig. 11.

§ 8. Wij zullen nu voor een paar voorbeelden **H** en **B** nader nagaan. Daarbij zullen wij doen alsof steeds verg. (9) geldt. Van de complicatie, die b.v. bij ijzer optreedt, zullen wij daarbij dus afzien.

Beschouwen wij eerst eens een draadklos, die door een stroom doorloopen wordt. De magnetische krachtlijnen loopen als in Fig. 12 is aangegeven. Zij loopen overal door den vrijen aether. Dus is overal $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, zoodat de krachtlijnen tevens inductielijnen voorstellen.

Denken wij nu in den draadklos een ijzeren kern (die het

binnenste van den klos geheel vult). De loop van de inductielijnen blijft bijna ongewijzigd. In het ijzer moeten wij echter tusschen **B** en **H** onderscheiden. Wij zullen dit niet nader vervolgen, maar ons nog even afvragen, hoe is het gesteld met **B** en **H** als draadklos en kern vervangen zijn door een (even sterken) stalen magneet. De magnetische kracht buiten den magneet is dan dezelfde als in het geval van klos met kern. Hoe is het echter met de magnetische kracht binnen den magneet?

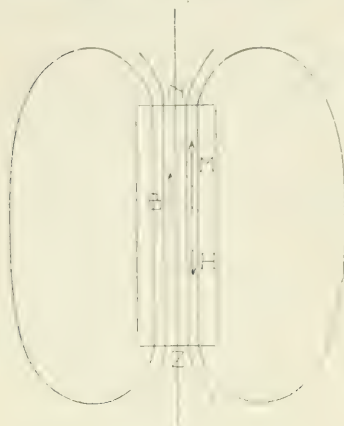


Fig. 12.

Is de magnetisatie overal dezelfde, zoodat de aequivalente verdeeling alleen bestaat uit noord- en zuidmagnetisme aan de eindvlakken, dan zien wij onmiddellijk dat **H** binnen den magneet eene richting heeft tegengesteld aan de magnetisatie (zie Fig. 12). Voor een niet te korten magneet is deze magnetische kracht intusschen betrekkelijk klein, zoodat wij zien, dat **B** wel is waar kleiner is dan **M**, maar toch nog dezelfde richting heeft als **M**. De inductielijnen kunnen dus zeer wel continu rondloopen zooals door de solenoidale verdeeling vereischt wordt. Met de magnetische krachtlijnen is dat integendeel niet het geval.

Niettegenstaande in het staal van den permanenten magneet een **H** optreedt, die zelfs tegengesteld is aan de magnetisatie (ontmagnetiseerende kracht), blijft toch de magnetisatie bestaan Dit is wel een zeer duidelijk voorbeeld dat in staal **M** niet als in zwak paramagnetische lichamen evenredig aan **H** en daarmee gelijk gericht is. Voor het onderhouden van eene magnetisatie in staal is de aanwezigheid van een magnetische kracht niet noodig.

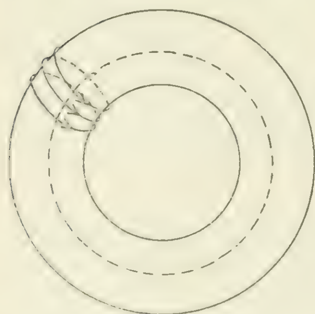


Fig. 13.

Beschouwen we nu een ijzeren ring (Fig. 13), geheel bedekt met windingen waarin een electrische stroom i loopt Het aantal windingen zij n. Trekt men in het ijzer een cirkel,

coaxiaal met den ring, dan geeft deze cirkel overal de richting van $\mathbf{H}$ en $\mathbf{B}$ aan. $\mathbf{H}$ wordt gevonden door toepassing van stelling I, n.l. als l de omtrek van den cirkel is, is

$$l\,\mathbf{H} = n\,i, \qquad (10)$$

dus

$$\mathbf{H} = \frac{n}{l}\,i, \text{ en volgens (9) } \mathbf{B} = \frac{\mu\,n}{l}\,i, \qquad (11)$$

waarbij wij nu, overeenkomstig de opmerking in den aanhef van deze §, maar handelen alsof voor ijzer een bepaalde μ geldt.

§ 9. Laat in den ring een nauwe spleet zijn aangebracht, begrensd door twee vlakken loodrecht op den omtrek (Fig. 14). De wijdte der spleet zij b; wat er van den omtrek van den cirkel overblijft l. De inductielijnen blijven door de spleet ongewijzigd doorloopen, $\mathbf{B}$ is in de spleet even groot als in het ijzer, gelijk uit (6) volgt. Nu is in het ijzer $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{B}$, in de spleet $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Stelling I geeft dus

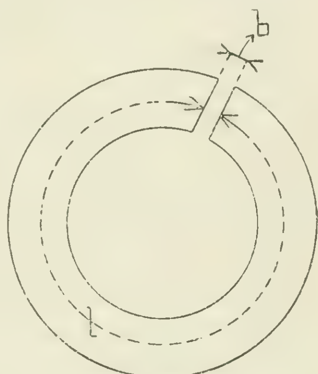


Fig. 14.

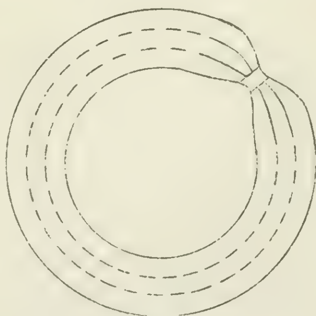
$$\frac{l}{\mu}\,\mathbf{B} + b\,\mathbf{B} = n\,i, \qquad (12)$$

waaruit volgt

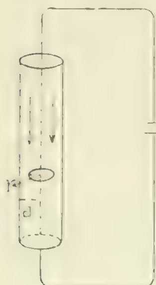
$$\mathbf{B} = \frac{\mu\,n}{l + \mu\,b}\,i, \qquad (13)$$

welke uitdrukking tevens de magnetische kracht in de luchtspleet aangeeft.

Wij kunnen ook eens denken dat wij den ring van Fig. 13 op een bepaalde plaats vernauwen (Fig. 15). De inductielijnen bezitten deze eigenschap, dat zij liefst zooveel mogelijk in het ijzer blijven loopen. Zij worden dus in het vernauwde gedeelte sterk opeen gedrongen. Denken wij nu op de plaats van deze vernauwing een luchtspleet, dan zijn ook hierin


Fig. 15.

de inductielijnen dicht opeen gedrongen. Een inductiebuis ondervindt bij den overgang uit het ijzer in de spleet een sterke vernauwing, en wij krijgen dus in die spleet een sterk magnetisch veld. Het is volgens dit beginsel dat wij tusschen de toegespitste polen van een electromagneet een sterk magnetisch veld opwekken.


Fig. 16.

§ 10. Een rechte ijzerdraad wordt door een stroom i doorloopen (Fig. 16). Wij denken den stroom in den draad over de doorsnede gelijkmatig verdeeld. De magnetische kracht is dan volgens cirkels om de as gericht. Zij r de straal van zulk een cirkel in den draad, a de straal van den draad. Dan is volgens stelling I

$$2 \pi r \mathbf{H} = \frac{r^2}{a^2} i, \quad \mathbf{H} = \frac{i}{2 \pi a^2} r.$$

Er is dan een circulaire magnetisatie

$$\mathbf{M} = \beta r, \text{ als } \beta = \frac{\varkappa i}{2 \pi a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

§ 11. Wij kunnen nu met behulp van stelling II de inductiestroomen berekenen, die ontstaan als in dergelijke gevallen als de in de vorige §§ behandelde, de magnetisatie ontstaat of verdwijnt.

Wij denken b.v. dat wij in het geval van § 10 den stroom in den ijzerdraad doen ophouden door de verbinding met de stroombron op te heffen. Het ijzer behoudt dan een groot deel van zijn magnetisatie. De magnetisatie blijft n.l. zeer gemakkelijk behouden in die gevallen waarin zij een gesloten kring vormt.

Wij verbinden nu de koperdraden, die eerst van de uiteinden van den ijzerdraad naar de stroombron liepen, met een galvanometer, en doen de magnetisatie van den ijzerdraad verdwijnen door dezen aan een schok bloot te stellen. Door den galvanometer vloeit dan een inductiestroom.

Wij zullen ter berekening van dezen stroom onderstellen, dat bij het doen ophouden van den eersten stroom de magnetisatie geheel behouden bleef, en dat zij vervolgens door den schok geheel verdwijnt. Daarbij valt op te merken dat tegelijk met den oorspronkelijken stroom i de magnetische kracht verdwijnt.

Buiten den draad verdwijnt het veld geheel en er binnen wordt de magnetische inductie gelijk aan de in (14) gegeven magnetisatie **M**. Daar van deze tenslotte niets overblijft, bepaalt (14) de vermindering die de inductie door den schok ondergaat.

Om nu de door deze vermindering teweeggebrachte inductiestroomen te bepalen, vestigen wij de aandacht op de electrische kracht, aan welke in elk punt de stroom evenredig is. Is de draad zeer lang in vergelijking met zijn dikte, dan is de inductiestroom in het grootste deel der lengte evenwijdig aan de as gericht. Nabij de einden kan ook een electriciteitsbeweging van de as af of daar naar toe bestaan. De afstand over welken dat het geval is, hoewel klein tegenover de lengte, zal groot zijn in vergelijking met de dikte van den cilinder; de radiale stroom vindt dus een veel breederen weg dan de longitudinale en zal een veel kleinere electrische kracht dan deze laatste vereischen. Op dezen grond zullen wij van de radiale electrische kracht afzien, terwijl wij van de longitudinale aannemen dat zij in alle punten van een lijn evenwijdig aan de as even groot is.

Als positieve richting kiezen wij die, in welke de ijzerdraad door den oorspronkelijken stroom i werd doorloopen, in Fig. 17 door een pijltje aangewezen; op de plaats van dat pijltje is dan de magnetisatie loodrecht op het vlak der teekening naar achteren gericht. Wij stellen verder de lengte van den draad door l voor, den straal der doorsnede weer door a en den afstand van een willekeurig punt tot de as door r. De electrische kracht E zal een functie van dien afstand zijn.



Fig. 17.

Wij passen nu vooreerst stelling II toe op een langen en oneindig smallen rechthoek zooals men dien in de figuur rechts van de as ziet; wij gaan langs den omtrek in den zin der beweging van de wijzers van een uurwerk, d.w.z. in een richting passende bij die van de magnetisatie **M**. Als de beide lange zijden op de afstanden r en $r + dr$ van de as liggen en aan die zijden de electrische kracht de waarden E en E' heeft, is de in de stelling genoemde „electromotorische kracht" $(E - E')\,l$; dit moet gelijk zijn aan de vermindering van **M** per tijdseenheid,

vermenigvuldigd met $l\,d\,r$. Is verder de stroom, d.w.z. de stroomsterkte in een oneindig dunnen lengtevezel, gedeeld door de loodrechte doorsnede van dien vezel, s op den afstand r van de as en s' op den afstand $r + d\,r$, dan heeft men, als σ het geleidingsvermogen van het ijzer is, $s = \sigma E$, $s' = \sigma E'$, zoodat $\frac{1}{\sigma}(s - s')$ gelijk moet zijn aan de afname per tijdseenheid van **M**, vermenigvuldigd met $d\,r$.

Wat wij willen bepalen is echter niet de electriciteitsbeweging op één bepaald oogenblik, maar de geheele stroom die door het verdwijnen der magnetisatie wordt opgewekt. Daarom voeren wij de integraal $\int s\,d\,t$ in, uitgestrekt over het te beschouwen tijdsverloop. Noemen wij deze S en behoort op dezelfde wijze S' bij den stroom s', dan volgt uit het zooeven gezegde dat $\frac{1}{\sigma}(S - S')$ gelijk is aan de geheele vermindering van **M**, vermenigvuldigd met $d\,r$. Dus, als men $S - S'$ door $-\frac{d\,S}{d\,r}\,d\,r$ vervangt,

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{d\,S}{d\,r}\,d\,r = \beta\,r\,d\,r,$$

waaruit volgt

$$S = -\frac{1}{2}\beta\,\sigma\,r^2 + C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Om de integratieconstante te bepalen moeten wij stelling II toepassen op een kring waarvan de sluitdraad deel uitmaakt, b.v. langs dezen draad van het middelpunt van het bovenvlak van den cilinder naar het middelpunt van het benedenvlak (positieve richting in den draad) en dan in het ijzer, vlak langs het oppervlak, van het laatste punt naar het eerste terug, volgens een weg die uit een straal van het grondvlak, een beschrijvende lijn en een straal van het bovenvlak is samengesteld. Daar buiten het ijzer geen magnetische inductie bestaat, moet de „electromotorische kracht” voor dezen kring nul zijn.

De bijdrage van den sluitdraad tot deze electromotorische kracht wordt gevonden door de oogenblikkelijke stroomsterkte met den weerstand w te vermenigvuldigen en voor de bijdrage van het overige deel van den kring kan men schrijven $\frac{l}{\sigma}s_a$, als s_a de

waarde van s voor $r = a$ is. Dus, als men weer tot de tijd-integralen overgaat, en den totalen stroom in den sluitdraad door I voorstelt

$$I\,w + \frac{l}{\sigma}\,S_a = 0,$$

of volgens (15)

$$I\,w - \frac{1}{2}\,\beta\,l\,a^2 + \frac{l}{\sigma}\,C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Hiermede is het doel bereikt als wij nog bedenken dat wegens de onsamendrukbaarheid der electriciteit I gelijk moet zijn aan den stroom door de volle doorsnede van den ijzerdraad, dus, als men weer van (15) gebruik maakt,

$$I = 2\,\pi \int_0^a S\,r\,d\,r = -\frac{1}{4}\,\pi\,\beta\,\sigma\,a^4 + \pi\,a^2\,C.$$

Substitueert men dit in (16), dan krijgt men een vergelijking waaruit C kan worden opgelost. Ten slotte, als men nog in plaats van σ den weerstand

$$w' = \frac{l}{\pi\,a^2\,\sigma}$$

van den ijzerdraad invoerd, gaat (15) over in

$$S = \frac{\beta\,l}{\pi\,w'}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{4}\,\frac{w + 2\,w'}{w + w'}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

In de as van den ijzerdraad heeft deze stroom derhalve de positieve, aan den buitenkant van den draad heeft hij de negatieve richting. Er heeft dus in den draad een rondstroomen der electriciteit plaats.

§ 12. MAXWELL [1]) heeft doen zien dat de krachten die op gemagnetiseerde lichamen werken, kunnen worden opgevat als voortvloeiende uit spanningen (eventueel drukkingen) in het omringende medium (de aether of een vloeistof of gas zonder merkbare magnetisatie). Die spanningen of drukkingen zijn op verschillende wijzen te ontbinden, wellicht het eenvoudigst in (Fig. 18):

a. een normale druk $\frac{1}{2}\,\mathbf{H}^2$ per vlakte-eenheid;

[1]) J. C. MAXWELL. On Physical Lines of Force. Phil. Mag. (4) 21, p. 161, 1861. Scientific Papers 1, p. 451.

b. een kracht langs de krachtlijnen naar buiten werkende, en waarvan de grootte per vlakte-eenheid $\mathbf{H}^2 \cos \vartheta$ bedraagt, als ϑ de scherpe hoek tusschen de krachtlijn en de normaal is.



Fig. 18.

Zoo worden de zijvlakken van de in § 9 genoemde spleet naar elkaar getrokken met een kracht $\frac{1}{2}\mathbf{H}^2$ per vlakte-eenheid. Het is alsof de tusschen die zijvlakken loopende krachtlijnen gespannen koorden waren. Bij een krachtigen electromagneet kan de kracht, waarmede de poolschoenen naar elkander toe worden getrokken, meer dan 100 K.G. per cm^2. bedragen.

De onder *b* genoemde kracht heeft ook een tangentieele component. Het is deze component, die zich tegen de beweging van den ring van een dynamo verzet. Ook komt deze tangentieele component te pas bij de unipolaire inductie.

§ 13. Unipolaire inductie. Een permanente magneet heeft de gedaante van een omwentelingscilinder en kan om zijne as wentelen (Fig. 19). Daarbij ontstaat een stroom in een stilstaande keten die twee sleepcontacten, het eene in het midden van een eindvlak en het andere in een punt van het cilinderoppervlak, met elkaar verbindt.

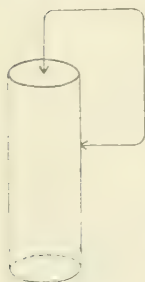


Fig. 19.

Over het ontstaan van dezen stroom zijn de meest uiteenloopende theorieën en verklaringen gegeven. De verklaring is eenvoudig wanneer men denkt aan de electrische kracht, die op grond van stelling III ontstaat doordat de deeltjes van den magneet zich bewegen in het veld van de inductie **B** te danken aan den magneet zelf.

Volgens die voorstelling is dus bij deze proef de zetel van de electrische kracht die de electriciteitsbeweging veroorzaakt, in den magneet. Wij kunnen ook den magneet in rust laten en denken dat de draad die de sleepcontacten verbindt, ronddraait om den magneet. Wij krijgen dan een zelfde electriciteitsbeweging. In dit geval moeten wij ons voorstellen dat de zetel van de electrische kracht zich bevindt in den draad (die zich in het magnetisch veld van den magneet beweegt).

Het is duidelijk dat bij den eerstgenoemden vorm van de

proef arbeid zal moeten verricht worden om den magneet rond te wentelen. Immers het opwekken van den electrischen stroom kost noodzakelijk arbeid. Men kan nu vragen: welke zijn dan de krachten die zich tegen de beweging van den magneet verzetten? Stelt men de magnetische krachten, die bij den permanenten magneet behooren, samen met de tangentiaal gerichte magnetische krachten, die voortvloeien uit den opgewekten electrischen stroom (§ 10), dan blijkt (Fig. 20) dat de krachtlijnen een zoodanigen loop hebben, dat de in § 12 *b* genoemde krachten een koppel opleveren, dat zich tegen de beweging verzet.

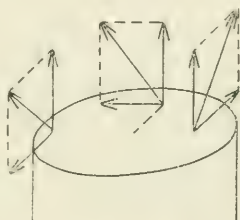


Fig. 20.

Leiden wij opzettelijk een stroom door den magneet door in den verbindingsdraad een stroombron in te schakelen, dan zullen de zooeven genoemde krachten den magneet doen rondwentelen.

Een mooi vraagstuk, waarbij stelling III toepassing vindt, is het volgende. Een geleidende bol bevindt zich in een homogeen magnetisch veld (in de richting van de *Y*-as in Fig. 21) en wentelt met standvastige snelheid om een lijn loodrecht op de magnetische kracht (om de *X*-as in Fig. 21). Welke inductiestroomen ontstaan dan in den bol?

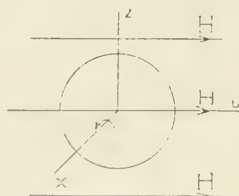


Fig. 21.

Het blijkt, dat de electriciteit gaat rondloopen om de *Z*-as. De bol werkt tengevolge van die stroomen naar buiten als een kleine magneet met de magnetische as in de richting van de *Z*-as.

Verder kan berekend worden de arbeid die verricht moet worden om den bol te doen draaien. Deze arbeid moet gelijk zijn aan de warmte die in den bol wordt ontwikkeld [1]).

§ 14. Om den magnetischen toestand van een lichaam te veranderen, moet men een zekeren uitwendigen arbeid verrichten. Wij kunnen b.v. denken aan een staaf ijzer, die wij in de lengterichting magnetiseeren door een stroom te laten gaan door een spoel, die de staaf omringt. Wanneer, zooals in dit geval, **B** en **H** dezelfde richting hebben, is die arbeid voor eene oneindig kleine verandering per volume-eenheid

[1]) Zie het Aanhangsel onder **2**.

$$\mathbf{H}\, d\, \mathbf{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Deze uitdrukking is te vergelijken met dergelijke uitdrukkingen die wij in de thermodynamica ontmoeten, zooals de arbeid om een draad uit te rekken: $P\, d\, l$; of een gas samen te drukken: $-p\, d\, v$.

Zij vormt den grondslag van de thermodynamische theorie der magnetische verschijnselen. Men kan er de hoeveelheid warmte uit afleiden, die in een lichaam met hysteresis bij het doorloopen van een magnetischen cyclus ontwikkeld wordt.

In het eenvoudige geval dat in

$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H}$$

μ constant is, gaat (18) over in

$$\mu\, \mathbf{H}\, d\, \mathbf{H},$$

en vinden wij voor het magnetische arbeidsvermogen per volume-eenheid

$$\frac{1}{2}\, \mu\, \mathbf{H}^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Men komt zoo tot de conclusie dat zich in elk lichaam dat gemagnetiseerd is, magnetisch arbeidsvermogen bevindt. Maar ook daarbuiten, overal waar het magnetische veld zich uitstrekt, is arbeidsvermogen. Is dan $\mu = 1$, dan bedraagt het magnetisch arbeidsvermogen $\frac{1}{2}\, \mathbf{H}^2$ per volume-eenheid. Zoo bevindt zich ook eene door deze formule bepaalde hoeveelheid magnetisch arbeidsvermogen in het veld van het aardmagnetisme.

Men kan zich de vraag stellen: hoeveel arbeidsvermogen bevindt zich in het veld van een staalmagneet, of in dat van een geleiddraad, waarin een stroom loopt?

Ook al wil men niet van een aether als drager van dat veld spreken, dat arbeidsvermogen is er in ieder geval.

Betreffende den aard van het magnetisch arbeidsvermogen heeft men zich wel voorgesteld, dat het zou zijn kinetische energie, eigen aan verborgen bewegingen in het magnetische veld. Men heeft zich zelfs wel bediend van het beeld van een stelsel van tandraderen, om de aanwezigheid van dat magnetisch arbeidsvermogen in het veld te illustreeren.

Intusschen heeft MAXWELL een mooi hoofdstuk [1]) in zijn „Treatise" er aan gewijd om, zonder precies na te gaan wat het wezen van het magnetische veld is, conclusies te trekken uit de onderstelling, dat het magnetisch arbeidsvermogen een vorm van kinetische energie is.

MAXWELL beschouwt b.v. twee stroomgeleiders, waarin de stroomen i_1 en i_2 loopen. De magnetische kracht in een punt in het veld van die beide stroomen, zal dan gevonden worden als de resultante van twee krachten, die resp. evenredig zijn aan i_1 en i_2, en in het algemeen een zekeren hoek met elkander maken. Berekent men voor een volume-element het magnetisch arbeidsvermogen volgens (19), en sommeert dan over het geheele veld, dan is het duidelijk, dat men voor het geheele magnetische arbeidsvermogen van het stelsel verkrijgt eene uitdrukking als

$$T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Hierin zijn L_1 en L_2 de coëfficienten van zelfinductie der beide stroomgeleiders, M is de coëfficient van wederkeerige inductie.

MAXWELL heeft dan laten zien hoe men, de magnetische energie als kinetische energie opvattende, uit de algemeene bewegingsvergelijkingen der mechanica de inductiestroomen en de krachten die op de lichamen werken, kan afleiden.

§ 15. Als voorbeeld daarvan behandelen wij het volgend eenvoudige geval. Een ijzerdraad die aan een vast punt is opgehangen (door een gewicht gestrekt), wordt door een stroom i_1 doorloopen, terwijl een tweede stroom i_2 geleid wordt door een spoel die den draad omringt. Door een koppel dat op het benedeneinde werkt, kan de draad worden getordeerd.

Zij α de hoek waarover het benedeneinde gedraaid is. De magnetische eigenschappen van het ijzer zijn dan door de samendrukkingen en uitrekkingen, die bij de torsie in den draad zijn opgetreden, iets gewijzigd. Onder deze omstandigheden komt in de uitdrukking voor het magnetische arbeidsvermogen een term voor van den vorm

$$C \alpha i_1 i_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Hieruit kan het volgende worden afgeleid:

[1]) J. C. MAXWELL. Electricity and Magnetism. Vol. II, ch. VII.

a. Als er in de keten waarvan de draad deel uitmaakt, geen stroom is, brengt verandering van α of van i_2 een inductiestroom in die keten teweeg. Electromotorische kracht:

$$-C\frac{d\,(\alpha\, i_2)}{d\,t} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

b. Evenzoo, als in de spoel eerst geen stroom is, geeft verandering van α of i_1 een inductiestroom in de spoel. Electromotorische kracht:

$$-C\frac{d\,(\alpha\, i_1)}{d\,t} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

c. Is eerst $i_1 = 0$, $i_2 = 0$ en de draad niet getordeerd, dan heeft het ontstaan van de beide stroomen een wringing ten gevolge. Tordeerend koppel:

$$C\, i_1\, i_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Men verkrijgt deze uitkomsten door toepassing van de vergelijkingen van Lagrange:

$$X = \frac{d}{d\,t}\frac{\partial\, T}{\partial\, \dot{x}} - \frac{\partial\, T}{\partial\, x},$$

als T de kinetische energie van het beschouwde systeem voorstelt, uitgedrukt als functie van de coordinaten x en de snelheden $\dot{x}$; t de tijd en X de uitwendige kracht die werkt op de coördinaat x, d.w.z. den factor, waarmede $d\,x$ moet vermenigvuldigd worden om bij eene kleine verandering van x den arbeid te verkrijgen, die daarbij door de uitwendige krachten op het systeem verricht wordt.

In het beschouwde voorbeeld is

$$T = \frac{1}{2}\, L_1\, i_1^2 + \frac{1}{2}\, L_2\, i_2^2 + C\,\alpha\, i_1\, i_2 + \frac{1}{2}\, Q\, \dot{\alpha}^2.$$

De laatste term stelt het mechanische arbeidsvermogen van beweging, beantwoordende aan de hoeksnelheid $\dot{\alpha}$ voor. In den derden term is $C\,\alpha$ de coëfficient van wederkeerige inductie. Die coëfficient is nul als de draad niet getordeerd is, en kan voor niet te groote waarden van den wringingshoek evenredig daarmee worden geacht.

De eerste drie termen te zamen zijn een quadratische functie

van de snelheden der bewegingen waarmede de electrische stroom gepaard gaat. Wij kunnen ons n.l. voorstellen dat de stand van alle deeltjes die aan deze bewegingen deelnemen, bepaald is door de hoeveelheden electriciteit die van één of ander beginoogenblik af door een doorsnede van den eersten en den tweeden geleider zijn gegaan. Deze hoeveelheden, die wij x_1 en x_2 zullen noemen, kunnen (met α) als coördinaten worden ingevoerd; de er bij behoorende snelheden $\dot{x}_1$ en $\dot{x}_2$ zijn niet anders dan de stroomsterkten i_1 en i_2.

In de vergelijking van LAGRANGE kunnen wij voor x achtereenvolgens nemen x_1, x_2 en α; wij vinden dan de aan deze coördinaten beantwoordende krachten X_1, X_2 en A, die van buiten af op het systeem moeten werken om den toestand, dien men in het oog wenscht te vatten, te doen bestaan. Van de drie krachten is A een koppel, terwijl X_1 en X_2 „electromotorische" krachten zijn; dit volgt hieruit, dat de producten van X_1 en X_2 met veranderingen van x_1 en x_2, dus met doorgestroomde hoeveelheden electriciteit, arbeiden moeten voorstellen.

Men vindt nu vooreerst

$$X_1 = \frac{d}{d\,t}(L_1\,i_1 + C\,\alpha\,i_2),$$

dus, als wij steeds $i_1 = 0$ willen houden,

$$X_1 = \frac{d}{d\,t}(C\,\alpha\,i_2).$$

Als deze electromotorische kracht moet werken om de eerste keten stroomloos te houden, mogen wij besluiten dat als zij niet werkt, een stroom in de keten bestaan zal, en wel juist de stroom die in gewone omstandigheden (als i_2 er niet was) door een electromotorische kracht gelijk en tegengesteld aan X_1 zou worden voortgebracht. Dit is de in (22) uitgedrukte uitkomst.

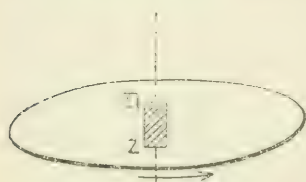
Tot (23) komt men op dezelfde wijze. Eindelijk vindt men

$$A = Q\,\ddot{\alpha} - C\,i_1\,i_2.$$

Om den draad ongetordeerd te houden is dus een uitwendig koppel $-C\,i_1\,i_2$ noodig. Is dat koppel er niet, dan zal de torsie ontstaan, die een gelijk en tegengesteld koppel bij afwezigheid der stroomen zou teweegbrengen.

II.

§ 16. Wij zagen den vorigen keer reeds (zie in het bijzonder § 4) welke nauwe samenhang er bestaat tusschen magnetische verschijnselen en electrische stroomen. Op grond van dien nauwen samenhang stelde AMPÈRE [1]) in 1820 zijne theorie van het magnetisme op. Volgens deze theorie zijn de magnetische momenten der volume-elementen van gemagnetiseerde lichamen hieraan te danken, dat om elk molecuul een electrische stroom in een kring loopt.

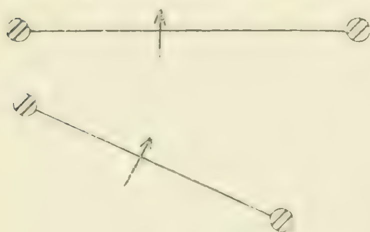

Fig. 22.

Een stroom i in een cirkel met den straal a oefent op afstanden die groot zijn in vergelijking met a dezelfde werkingen uit als een magneet in het middelpunt, loodrecht op het vlak van den cirkel gericht, en met een moment gelijk aan het oppervlak van den cirkel vermenigvuldigd met de stroomsterkte:

$$\mathbf{m} = \pi a^2 i \,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

De richting van het moment past bij die van den stroom (Fig. 22).

Daarbij is het volstrekt niet noodig dat in een volume-element van een gemagnetiseerd lichaam alle kringstroomen in onderling evenwijdige vlakken loopen. Het is voldoende als er maar eenige oriënteering is.


Fig. 23.

Wij kunnen elken kringstroom vervangen denken door den aequivalenten magneet, in Fig. 23 door pijltjes aangeduid. Hebben wij nu een verzameling kringstroomen, in allerhande richtingen georiënteerd, dan zullen wij de magnetische momenten van alle aequivalente magneten (Fig 24) hebben samen te stellen.

[1]) AMPÈRE. Sur l'action mutuelle entre deux courants électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants. Ann. chim. phys. 15, p. 59, 170, 1820.

Ten einde de component in zekere richting van het resulteerende magnetisch moment te leeren kennen, kunnen wij van de magnetische momenten van al die aequivalente magneten de componenten in de richting van die lijn zoeken en deze (algebraisch) optellen. Winnen b.v. in Fig. 24 de naar boven gerichte componenten het van de naar beneden gerichte, dan is er een resulteerend magnetisch moment naar boven.

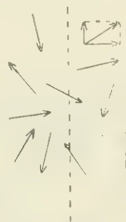


Fig. 24.

Zijn de kringstroomen volkomen willekeurig gericht, zoodanig dus dat er in de richtingen der magnetische momenten der aequivalente magneten geen enkele voorkeur is, dan is er geen resulteerend magnetisch moment.

§ 17. De kringstroom kan in een rondloopen van één of meer, stel van n electronen, alle met dezelfde lading e en dezelfde snelheid v bestaan. Elk electron gaat per seconde $\frac{v}{2\pi a}$ maal door een vast punt van den cirkel. Dus

$$i = \frac{n v e}{2 \pi a}.$$

Uit (25) volgt dan

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} n e a v. \quad \text{. . . . .} \quad (26)$$

Men komt tot eene belangrijke gevolgtrekking, wanneer men deze uitdrukking in verband brengt met het moment van hoeveelheid van beweging dier electronen. Zij de massa van een electron m. Dan is dat moment van hoeveelheid van beweging:

$$\mathbf{q} = n m a v. \quad \text{. . . . .} \quad (27)$$

Dus

$$\mathbf{q} = \frac{2 m}{e} \mathbf{m}. \quad \text{. . . . .} \quad (28)$$

Dit verband tusschen het magnetisch moment en het moment der hoeveelheid van beweging kan worden uitgebreid tot een stelsel van deeltjes, elk door electronen omloopen, al hebben de vlakken waarin dit plaats heeft, verschillende richtingen.

Dat in een gemagnetiseerd lichaam een met het magnetisch moment **M** evenredig moment van hoeveelheid van beweging

$$\mathbf{Q} = \frac{2m}{e}\mathbf{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

bestaat, is door de proef van EINSTEIN en W. J. DE HAAS [1]) aangetoond. Wat deze proef betreft zij verwezen naar de in 1918 gehouden voordrachten [2]). Slechts zij hier opgemerkt, dat uit de stelling dat het totale moment van hoeveelheid van beweging van een systeem onveranderd blijft als er geen krachten op het systeem werken, die een koppel teweeg brengen, volgt dat bij het ontstaan der magnetisatie de materie van het lichaam een moment van hoeveelheid van beweging krijgt

$$-\mathbf{Q} = -\frac{2m}{e}\mathbf{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Het optreden van dit moment van hoeveelheid van beweging vormde het door EINSTEIN en DE HAAS aangetoonde verschijnsel. Daarbij beantwoordt de richting van het effect aan de opvatting dat het negatieve deeltjes zijn, die rondloopen. Ook de orde van grootte van het verschijnsel kwam vrijwel uit. Latere proeven door anderen schijnen echter te wijzen op een effect waarvan de grootte de helft is van hetgeen op grond van (30) verwacht werd [3]). Eene herhaling dezer proeven is gewenscht, voordat hieromtrent nadere conclúsies getrokken worden.

§ 18. Wij komen nu tot de vraag: hoe worden de kringstroomen of hoe wordt de meer of minder regelmatige orienteering dier kringstroomen teweeggebracht, aan welke volgens de beide vorige §§ de lichamen hunne magnetische eigenschappen te danken hebben? Konden wij op deze vraag een volledig antwoord geven, dan

[1]) A. EINSTEIN en W. J. DE HAAS, Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stroomen van AMPÈRE. Versl. K. Akad. van Wet. Amsterdam 23, p. 1449, 1915.

[2]) H. A. LORENTZ. De electronentheorie. Drie voordrachten, gehouden in Teyler's Stichting in October 1918, § 15.

[3]) E. BECK. Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme. Ann. d. Phys. (4) 60, p. 109, 1919. Physik. Z.S. 20 p. 490, 1919. G. ARVIDSSON. Eine Untersuchung über die Ampèreschen Molekularströme nach der Methode von A. EINSTEIN und W. J. DE HAAS. Physik. Z.S. 21, p. 81, 1920.

waren wij in het bezit van eene uitgewerkte theorie over de magnetisatie. Men kan het nu in deze richting een heel eind brengen voor wat betreft de diamagnetische lichamen. De paramagnetische lichamen bieden veel grooter moeilijkheden.

Voor het diamagnetisme is eene theorie gegeven door WILHELM WEBER [1]). Het ontstaan van een magnetisch veld brengt in een cirkelvormigen geleider, waarvan het vlak loodrecht op de krachtlijnen staat, een inductiestroom te weeg, waarvan de richting tegengesteld is aan de bij de magnetische kracht passende. Bezat die geleider geen weerstand (zooals dat bij de suprageleiders van KAMERLINGH ONNES bijna het geval is) dan zou de eenmaal opgewekte inductiestroom voortdurend blijven rondloopen.

Dezelfde electrische krachten die aanleiding geven tot het optreden van den inductiestroom in bovengenoemden geleider, kunnen bij het opwekken van het veld de electriciteit aan het rondloopen om de moleculen brengen. Daarbij denken wij dan dat zich tegen dit rondloopen van de electriciteit om de moleculen geen weerstand verzet, zoodat deze stroomen om de moleculen, zoolang zij niet door nieuwe inductie gewijzigd worden, onverzwakt blijven doorloopen.

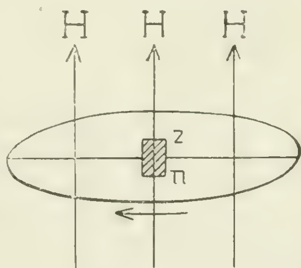


Fig. 25.

Geeft in Fig. 25 H de richting aan van het magnetisch veld dat ontstaan is, dan wordt door den pijl langs den cirkel aangegeven de richting van den opgewekten electrischen stroom. Deze stroom is, wat zijn magnetische werkingen betreft, aequivalent met een magneetje, waarvan het magnetisch moment eene richting heeft, die tegengesteld is aan die van H (Fig. 25). Eene verzameling van dergelijke stroomkringen beantwoordt dus aan de eigenschappen die een diamagnetisch lichaam verkrijgt als het in een magnetisch veld gebracht wordt.

Berekening van het opgewekte moment. Laat het aangebrachte veld de richting hebben van de Z-as; de magnetische

[1]) W. WEBER. Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität. Pogg. Ann. 87, p. 145, 1852. Ook in: Elektrodynamische Massbestimmungen, Leipzig, 1852.

kracht **H** zij met den tijd veranderlijk. Laat een electron genoodzaakt zijn bij zijn beweging op een cirkel te blijven in een vlak loodrecht op de Z-as en met het middelpunt op die as. De straal van den cirkel zij a (Fig. 26). Wij kiezen de positieve richting langs den cirkel passende bij de richting van **H**. De electrische kracht E is langs den cirkel gericht, en wordt volgens stelling II bepaald door

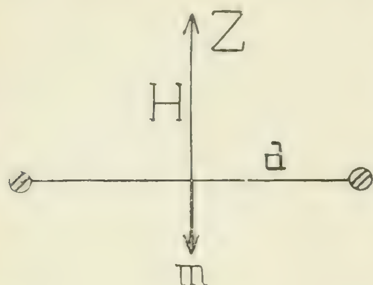


Fig. 26.

$$2\pi a E = -\pi a^2 \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

$$E = -\frac{1}{2} a \frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

De bewegingsvergelijking van het electron wordt dan

$$m \frac{dv}{dt} = eE = -\frac{1}{2} a e \frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

Als dus vóór het aanzetten van het veld $v = v_0$ was, dan heeft men later

$$v = v_0 - \frac{1}{2} a \frac{e}{m} \mathbf{H}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Was vóór het aanzetten van het veld het magnetisch moment $\mathbf{m}_0$, dan is er tenslotte volgens (26) een magnetisch moment

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - \frac{1}{4} \frac{a^2 e^2}{m} \mathbf{H}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Maakt de normaal op het vlak van den cirkel een hoek ϑ met de richting van het veld (Fig. 27), dan wordt

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - \frac{1}{4} \frac{a^2 e^2}{m} \mathbf{H} \cos\vartheta. \quad \ldots \quad (33)$$

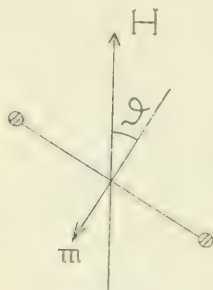


Fig. 27.

Stel het lichaam bevat een groot aantal deeltjes, N per volume-eenheid, elk met een in een cirkel rondloopend electron. De vlakken der cirkels hebben alle mogelijke standen, zonder voorkeur voor een bepaalde richting, en de oorspronkelijke bewegingen zijn zoo dat de momenten $\mathbf{m}_0$ elkaars werkingen opheffen. De door het veld opgewekte momenten geven te zamen een

moment tegengesteld aan de veldrichting. Voor één deeltje is de component van het moment in de veldrichting

$$-\frac{1}{4}\frac{a^2 e^2}{m}\mathbf{H}\cos^2\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

en voor de volume-eenheid is

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{4}\frac{a^2 e^2}{m}\mathbf{H}\,\Sigma\cos^2\vartheta = -\frac{1}{12}N\frac{a^2 e^2}{m}\mathbf{H}, \quad \ldots \quad (35)$$

daar $\cos^2\vartheta$ de gemiddelde waarde $\frac{1}{3}$ heeft.

Hieruit volgt voor de susceptibiliteit

$$\varkappa = -\frac{1}{12}N\frac{a^2 e^2}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

§ 19. Intusschen is een van de onderstellingen, waarop de verklaring van het diamagnetisme in de vorige § gebaseerd is, moeilijk houdbaar. Namelijk deze, dat er voorgeschreven cirkelvormige banen zouden zijn, in welke de electriciteit, dat zijn dus de electronen, om de moleculen of atomen zou moeten rondloopen.

De ondersteld electronen zijn er wel. Immers, volgens de voorstellingen die RUTHERFORD en BOHR hebben uitgewerkt, bestaat het atoom uit een positieve kern, waaromheen electronen loopen. Deze electronen zijn echter, behoudens de krachten die de kern en de andere electronen op elk van hen uitoefenen, geheel vrij in hunne beweging. Intusschen kan de verklaring van het diamagnetisme hiervoor pasklaar gemaakt worden.

Wij zullen dus hebben na te gaan hoe een atoom van BOHR zich gedraagt in een magnetisch veld. Wij kunnen daartoe gebruik maken van een mooie mathematische stelling.

Wanneer een atoom zich bevindt in een magnetisch veld, dat wij van nul af laten aangroeien, dan kunnen wij de beweging van de electronen rondom de kern het best beschrijven, wanneer wij een wentelend coördinatenstelsel gebruiken.

Kies den oorsprong der coördinaten (x, y, z) in de kern, de z-as in de richting van $\mathbf{H}$. Voer een tweede coördinatenstelsel

(x', y', z) in, dat dezelfde z-as heeft, maar dat ten opzichte van het eerste om die as met de hoeksnelheid

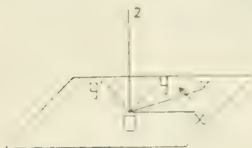


Fig. 28.

$$\omega = -\frac{e}{2m}\mathbf{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

wentelt (Fig. 28). Die hoeksnelheid neemt tegelijk met **H** van nul af toe.

Volgens de bedoelde stelling is dan de beweging der electronen ten opzichte van het wentelende assenstelsel dezelfde als zij, zoo er geen magnetisch veld was, ten opzichte van de stilstaande assen zou zijn [1]). Bij de afleiding van deze stelling zijn termen evenredig met $\mathbf{H}^2$ verwaarloosd.

De electronen krijgen dus in een magnetisch veld aan hunne beweging eene draaiing toegevoegd, waarvan de hoeksnelheid door (37) gegeven wordt. Uit (26) volgt dan voor het magnetisch moment van een deeltje

$$-\frac{1}{4}\frac{e^2}{m}\mathbf{H}\,\Sigma r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

als r de afstand van een electron tot de door de kern gaande z-as is, en de som over al de electronen wordt uitgestrekt.

Wij kennen van een aantal diamagnetische stoffen de susceptibiliteit, verder zijn e en m voor het electron bekend, en kennen wij het aantal moleculen of atomen dat b.v. in 1 cM³. aanwezig is. Dan geeft (38) het middel om voor het molecuul of atoom Σr^2 te berekenen.

Voor waterstof vindt men aldus [2]) voor een molecuul:

$$\Sigma r^2 = 1{,}24 \times 10^{-16},$$

of voor elk van de electronen, zoo zij even groote cirkels om de Z-as beschrijven:

$$r^2 = 0{,}62 \times 10^{-16}, \text{ of } r = 0{,}8 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

Voor bismuth [3]) vindt men voor een atoom:

$$\Sigma r^2 = 66 \times 10^{-16},$$

[1]) Voor de afleiding zie men het Aanhangsel onder **3**.

[2]) Berekend uit $\varkappa = -0{,}186 \times 10^{-6}$ voor vloeibare waterstof (dichtheid 0,07) volgens KAMERLINGH ONNES en PERRIER, (Comm. Leiden No. 122a) $\frac{e}{m} = 1{,}77 \times 10^{7}$ *e.m.e.*, $e = 4.77 \times 10^{-10}$ *e. st. e.* $= 1.59 \times 10^{-20}$ *e.m.e.* (verg. H. A. LORENTZ. De electronentheorie. Teyler voordrachten 1918, p. 16 en 23), en het getal van AVOGADRO : $N = 6{,}06 \times 10^{23}$.

[3]) $\varkappa = -13{,}25 \times 10^{-6}$ bij 20° C. volgens P. CURIE.

of daar het aantal electronen = het atoomnummer = 83, gemiddeld voor een electron

$$r^2 = 0{,}8 \times 10^{-16} \text{ of } r = 0{,}9 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

Deze uitkomsten zijn redelijk te noemen.

Is aldus het diamagnetisme verklaard, dan kan men zoo ook rekenschap geven van het effect van EINSTEIN en DE HAAS voor diamagnetische lichamen, voor welke het trouwens nog niet gevonden is.

§ 20. De verklaring van het paramagnetisme is, zooals wij reeds zeiden, nog lang niet zoo ver gevorderd. Voor het paramagnetisme is eveneens eene theorie gegeven door WILHELM WEBER. Deze theorie vereischt echter weer vaste kringen in of aan de moleculen resp. atomen.

In die vaste kringen loopen bij de paramagnetische lichamen volgens de genoemde theorie praeexisteerende electrische stroomen. Gedacht wordt weer dat die stroomen geen weerstand ondervinden, zoodat zij voortdurend blijven rondloopen.

Wordt een stroomkring, waardoor een electrische stroom loopt, in eén magnetisch veld gebracht, dan ondervindt die stroomkring in het algemeen een koppel. Hij zal trachten zich loodrecht op de magnetische krachtlijnen te plaatsen.

Volgens de theorie van WEBER vormen nu de moleculen, met de genoemde electrische stroomen daarin in vaste kringen rondloopend, dergelijke draaibare stroomkringen, die zich in het magnetisch veld trachten te richten. M. a. w. de moleculen gedragen zich als kleine permanente magneetjes.

In den natuurlijken toestand, d. w. z. buiten een magnetisch veld, zijn die magneetjes in allerhande richtingen geplaatst. Komen zij onder den invloed van een magnetische kracht, dan tracht deze hen parallel te richten.

Volgens ons tegenwoordig inzicht in den bouw der atomen en moleculen hebben wij echter in deze niet zoo iets als die vaste kringen. Dit zal vereischen, dat de theorie geheel anders opgebouwd wordt. Intusschen zullen wij bij gebrek aan beter alsnog de theorie van WEBER volgen.

Dan doet zich onmiddellijk deze vraag voor: hoe komt het, dat b.v. in ijzer de zwakste magnetische kracht niet al voldoende is om alle elementaire magneetjes geheel te richten?

Het antwoord hierop geeft de theorie van het paramagnetisme

van LANGEVIN[1]). Deze theorie houdt rekening met de warmtebeweging der moleculen. Zij is dan ook in staat rekenschap te geven van den invloed dien de temperatuur op de susceptibiliteit van paramagnetische lichamen heeft.

De moleculen van het lichaam worden als staafjes, elk met het magnetisch moment **m**, beschouwd, die om hun middelpunten kunnen draaien. Zoo nemen zij deel aan de warmtebeweging. Men past dan de stellingen der statistische mechanica toe.

Als een voorbeeld van deze laatste beschouwen wij allereerst de snelheden der deeltjes van een één-atomig gas. Laat u, v, w de snelheidscomponenten zijn, $E = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2)$ de kinetische energie van een deeltje. Dan is het aantal deeltjes, waarvoor de snelheidscomponenten liggen tusschen u en $u + du$, v en $v + dv$, w en $w + dw$

$$C e^{-\frac{E}{k\tau}} du\, dv\, dw \text{ (wet van MAXWELL)} \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

Hierin is τ de absolute temperatuur, en k eene constante, zoodanig dat $\frac{3}{2} k \tau$ de gemiddelde kinetische energie van een molecuul is.

Laat nu het gas aan de zwaartekracht onderworpen zijn. Het aantal deeltjes, waarvan de snelheden tusschen de zooeven genoemde grenzen liggen, en tegelijkertijd de coördinaten tusschen x en $x + dx$, y en $y + dy$, z en $z + dz$, is

$$C e^{-\frac{E}{k\tau}} dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

als nu E de som is van de kinetische en de potentieele energie.

Hier uit volgt b.v. dat de dichtheid van het gas naar boven afneemt evenredig met den factor

$$e^{-\frac{m g h}{k \tau}}$$

als m de massa van een deeltje, g de versnelling van de zwaartekracht en h de hoogte voorstelt.

Voor ronddraaiende deeltjes worden de formules iets meer gecompliceerd. Wij beschouwen nu de bovengenoemde magne-

[1]) P. LANGEVIN. Magnétisme et théorie des électrons. Ann. chim. phys. (8) 5, p. 70, 1905.

tische staafjes, vrij draaibaar geplaatst in een magnetisch veld.

Den stand van een der draaibare staafjes (Fig. 29) bepalen wij door den hoek ϑ, dien het met een lijn in de richting van het magnetisch veld maakt, en den hoek φ tusschen twee door deze lijn gebrachte vlakken, het eene vast en het andere door de as van het staafje gaande. De bij deze coördinaten behoorende snelheden zijn $\dot\vartheta$ en $\dot\varphi$, de kinetische energie is.

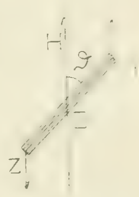


Fig. 29.

$$T = \frac{1}{2} Q(\dot\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, . \, \dot\varphi^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

(Q = traagheidsmoment).

Bovendien is er een potentieele energie.

$$U = -\mathbf{mH} \cos \vartheta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

Het aantal deeltjes waarvoor ϑ, φ, $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$ liggen tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, enz., is, als $E = U + T$:

$$C e^{-\frac{E}{k\tau}} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\vartheta^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot\vartheta \, \partial \dot\varphi} \right)^2 \right\} d\vartheta \, d\varphi \, d\dot\vartheta \, d\dot\varphi \; ^{1)} \; . \; . \; . \quad (43)$$

of

$$C' e^{-\frac{E}{k\tau}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\dot\vartheta \, d\dot\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Hieruit volgt voor het aantal deeltjes waarvoor ϑ ligt tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$, en $\dot\varphi$ tusschen $\dot\varphi$ en $\dot\varphi + d\dot\varphi$

$$C'' e^{-\frac{\frac{1}{2} Q \sin^2 \vartheta \, \dot\varphi^2 - \mathbf{mH} \cos \vartheta}{k\tau}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, d\dot\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

en, naar $\dot\varphi$ tusschen 0 en ∞ integreerend, voor dat van de deeltjes met geen andere beperking dan dat ϑ tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$ ligt.

$$C e^{\frac{\mathbf{mH} \cos \vartheta}{k\tau}} \sin \vartheta \, d\vartheta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

Het moment van één deeltje in de richting van het veld is

$$\mathbf{m} \cos \vartheta \, .$$

[1]) Zie het Aanhangsel onder 4.

De gemiddelde waarde hiervan wordt nu gegeven door

$$\frac{\int_0^\pi e^{\frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}\cos\vartheta}{k\,\tau}} \sin\vartheta\,\mathbf{m}\cos\vartheta\,d\vartheta}{\int_0^\pi e^{\frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}\cos\vartheta}{k\,\tau}} \sin\vartheta\,d\vartheta}$$

Stelt men $q = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}}{k\tau}$ . . . . (47)

dan levert deze uitdrukking, na uitvoering der integraties,

$$\mathbf{m}\left\{\frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} - \frac{1}{q}\right\} \quad \text{. . . . . (48)}$$

Vermenigvuldiging hiervan met N, het aantal deeltjes per volume-eenheid, geeft de magnetisatie **M**.

Denkt men **H** zeer groot, dan is ook q zeer groot en dan gaat (48) over in **m**. De magnetisatie wordt dan $N\mathbf{m}$, alle moleculen zijn gelijk gericht.

In werkelijkheid is q altijd heel klein. Dan wordt (48) $\mathbf{m}.\frac{1}{3}\,q$ (de eerste term van een reeksontwikkeling). Dus

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3}\,\frac{N\,\mathbf{m}^2}{k\,\tau}\,\mathbf{H} \quad \text{. . . . . (49)}$$

waaruit voor de susceptibiliteit volgt

$$\varkappa = \frac{1}{3}\,\frac{N\,\mathbf{m}^2}{k\,\tau} \quad \text{. . . . . (50)}$$

III.

§ 21. Wij zagen den vorigen keer hoe de theorie van LANGEVIN in staat stelt den invloed in rekening te brengen, dien de temperatuur heeft op de magnetisatie, die door eene magnetische kracht in paramagnetische lichamen wordt opgewekt.

Wij voerden toen de grootheid

$$q = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}}{k\,T} \quad \text{. . . . . (51)}$$

in, waarin wij, nu geen verwarring met de kinetische energie meer te vreezen is, de absolute temperatuur wederom als gewoonlijk door T voorstellen.

Stellen wij verder

$$N\mathbf{m} = \mathbf{M}_0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

dan is $\mathbf{M}_0$ de sterkste magnetisatie die het lichaam ooit zou kunnen krijgen, als namelijk alle moleculen volkomen evenwijdig aan elkander gericht zouden zijn.

De warmtebeweging verzet zich echter hier tegen. Wij vonden n.l. zie (48), dat

$$\mathbf{M} = \alpha \, \mathbf{M}_0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

waarin

$$\alpha = \frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}} - \frac{1}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

is.

Hier uit zich de invloed van de warmtebeweging in de grootheid q. Volgens (51) treedt n.l. hierin op kT. Nu is $\frac{3}{2}\,kT$ de gemiddelde kinetische energie van de voortgaande beweging van een gasmolecuul, en hiermede hangt het arbeidsvermogen van de draaiende beweging van de magneetjes nauw samen. Dit arbeidsvermogen bedraagt namelijk, daar het draaiende magneetje slechts twee graden van vrijheid bezit $^2/_3$ van dit bedrag, d. i. kT.

Men ziet in (51) duidelijk uitgedrukt den strijd dien de magnetische kracht, die de moleculen tracht te richten, heeft te voeren met de warmtebeweging: de teller hangt samen met den arbeid, dien de magnetische kracht bij draaiing van het magneetje verricht, de noemer met het arbeidsvermogen van de warmtebeweging. De verhouding van beide bepaalt q. Uit (54) volgt dan de grootheid α, die aangeeft welk gedeelte van de maximale magnetisatie bij de temperatuur T verwezenlijkt is.

Hoe α met q verandert wordt door de kromme lijn in Fig. 30 voorgesteld.

Voor $q = \infty$ wordt $\alpha = 1$. Is OD de raaklijn in den oorsprong, dan is

$$tg\, D\,O\,X = \frac{1}{3}.$$

In elk geval is

$$\frac{\alpha}{q} < \frac{1}{3}.$$

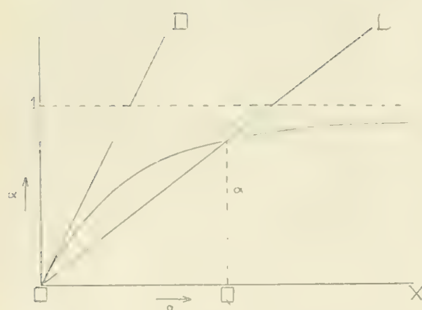


Fig. 30.

Bij paramagnetische lichamen is steeds q zeer klein. Dan kan men stellen, gelijk blijkt wanneer men in het tweede lid van (54) e^q en e^{-q} naar opklimmende machten van q ontwikkelt,

$$\alpha = \frac{1}{3} q .$$

De susceptibiliteit wordt dan

$$\varkappa = \frac{1}{3} \frac{m \mathbf{M}_0}{kT} = \frac{1}{3} \frac{\mathbf{M}_0^2}{NkT} = \frac{1}{3} \frac{N m^2}{kT} \quad \ldots \ldots \ldots (55)$$

§ 22. Volgens deze formule is in de eerste plaats de susceptibiliteit evenredig met N, dus met de dichtheid. Dit is vooral van belang voor een gas, waarvoor trouwens deze theorie in het bijzonder door LANGEVIN bedoeld is.

Verder is het quotient der susceptibiliteit door de dichtheid ϱ volgens deze formule omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur. Deze wet wordt naar CURIE[1]), die haar experimenteel vond, de wet van CURIE genoemd.

Zoo leverden de metingen van CURIE voor zuurstof:

t	T	$\frac{\varkappa}{\varrho}$	$\frac{\varkappa}{\varrho} T$
20.5	293.5	114.8×10^{-6}	0.0337
188	461	74.7×10^{-6}	0.0344
411	684	50.1×10^{-6}	0.0343.

Gelijk uit de laatste kolom blijkt, komt voor zuurstof, als gas de genoemde wet mooi uit.

Er bestaan bij vaste lichamen echter vele afwijkingen van de wet van CURIE. Zij is op te vatten als eene ideëele wet, waartoe in vele gevallen het gedrag der paramagnetische stoffen nadert.

§ 23. Met behulp van (55) kan men uit de waargenomen susceptibiliteit de magnetisatie $\mathbf{M}_0$ en ook het magnetisch moment van één molecuul afleiden.

Uit de susceptibiliteit van zuurstof bij 20,°5 C. en een druk van 1 atm. volgt b.v. (in gebruikelijke eenheden)

[1]) P. CURIE. Propriétés magnétiques des corps à diverses températures. Ann. chim. phys. (7) 5, p. 289, 1895.

$$\mathbf{M}_0 = 0{,}69 \text{ [1]}.$$

Hieruit volgt [2]) voor het magnetisch moment van een molecuul $m = 2{,}6 \times 10^{-20}$, per atoom dus $1{,}3 \times 10^{-20}$.

Hierbij is ondersteld dat de moleculen als elementaire magneetjes optreden, m. a. w. dat zij in hun geheel ronddraaien.

Onderstellen wij daarentegen dat de atomen vrij kunnen ronddraaien, dan moeten wij in (55) voor N het aantal atomen nemen. Het magnetisch moment van een atoom wordt dan

$$m = \sqrt{2} \times 1{,}3 \times 10^{-20} = 1{.}8 \times 10^{-20}.$$

Stellen wij ons voor dat het magnetisch moment van het zuurstof-atoom teweeggebracht wordt doordat een electron in een cirkel rondloopt om een kern, waarvan de positieve lading n maal zoo groot is als de lading van een electron, dan vinden wij voor den straal van dien cirkel in de beide zooeven genoemde gevallen: $\frac{1}{n} \times 2{,}7 \times 10^{-8}$, resp. $\frac{1}{n} \times 5{,}4 \times 10^{-8}$ cM. [3]).

De orde van grootte dezer uitkomsten is zoodanig, dat wij dit als zeer wel mogelijk moeten beschouwen.

Zien wij ten slotte nog even hoe groot q voor zuurstof wel kan zijn. Het sterkste veld dat wij kunnen bereiken is ongeveer 60.000 gauss. Substitueeren wij dus in (51) $\mathbf{H} = 60.000$, en nemen

---

[1]) Uit (55) volgt $M_0^2 = 3\frac{kT}{\varrho} \cdot \frac{\varrho_0}{1+\alpha t} Nk$. Nu is $NkT = {}^2/_3 \times$ kinetische energie van voortgaande beweging der moleculen $= RT$, als R de gasconstante is. Dus $Nk = R$. Voeren wij de moleculaire gasconstante $R_M = 8{,}315 \times 10^7$ in, dan is, daar N op de volumeeenheid betrekking heeft: $Nk = \frac{\varrho_0}{32} R_M$. Substitueeren wij verder $\frac{\varkappa T}{\varrho}$ uit de tabel van § 22, en $\varrho_0 = 0{,}00141$, dan volgt de in den tekst aangegeven waarde.

[2]) Door te deelen door $N = \frac{\varrho_0}{32} \times 6{,}06 \times 10^{23}$.

[3]) Voor het rondloopende electron geldt $\frac{ne^2}{a^2} . 9 \times 10^{20} = \frac{mv^2}{a}$ (e in electromagnetische eenheden), waaruit volgt $v = e\sqrt{\frac{n}{ma}} . 3 \times 10^{10}$. Na substitiatie hiervan in (26), waarin $n = 1$ gesteld moet worden, volgt $a = \frac{1}{n} . 4\,\mathbf{m}^2 . \frac{m}{e^2} . \frac{1}{9 \times 10^{20}}$. Ontleenen wij aan noot 2) § 19 de waarden voor e en $\frac{e}{m}$ in $e.m.$ eenheden, dan vinden wij de in den tekst gegeven getallen.

wij **m** $= 1{,}8 \times 10^{-20}$, stellen wij $T = 288$ (15° C.), terwijl $k = 1.37 \times 10^{-16}$, dan volgt

$$q = 0{,}027 .$$

Hieruit volgt volgens (54)

$$\alpha = 0{,}009 .$$

Men ziet hieruit hoe moeilijk het is in eene paramagnetische stof alle deeltjes geheel te richten.

Als een ander voorbeeld van de toepassing van (55) tot bepaling van de magnetische momenten **m** mogen ten slotte nog vermeld worden de uitkomsten, die men verkregen heeft voor het magnetisch moment van het Cu-atoom in verschillende zouten, nl. getallen als: 9,56, 9,56, 9,55, 9,57, waarbij een bepaald magnetisch moment[1]) als eenheid aangenomen is.

§ 24. Eigenlijk zou de theorie van LANGEVIN moeten opgebouwd worden op de voorstelling dat de magnetische eigenschappen der paramagnetische deeltjes te danken zijn aan rondloopende electronen. Dit zou wel gaan als men maar mocht aannemen dat deze electronen in banen rondloopen, die vast aan het atoom verbonden zijn. Er zouden zich dan slechts enkele finesses voordoen.

In § 20 kwam te pas de potentieele energie van het elementairmagneetje in het magnetisch veld. In de plaats van het elementairmagneetje treedt nu het rondloopende electron, dat we door een kringstroompje kunnen vervangen denken. Zulk een stroom staat gelijk met een magnetisch moment **m**. Bevindt hij zich in een veld **H**, dan komt in de magnetische energie een term[2])

$$V = + \mathbf{m}\mathbf{H} \cos \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

voor. Deze magnetische energie gedraagt zich als eene kinetische energie. Onder den invloed van het veld tracht zich n.l. de kring zoo te stellen, dat deze term zoo groot mogelijk wordt.

Dan moet echter in (43) en (44) voor E niet genomen worden de totale energie, maar moet in E de magnetische energie met het negatieve teeken genomen worden, zoodat dus Σ vervangen moet worden door $T - V$, en krijgt men weer dezelfde uitkomsten.

Wanneer intusschen de electronen die het magnetisch moment

[1]) Namelijk dat van het magneton, zie § 27.

[2]) Zie het aanhangsel onder **5**.

teweegbrengen, niet in vaste banen rondloopen als de electriciteit in een kringstroom, maar zich vrij in het atoom of molecuul bewegen, dan wordt de verklaring van het paramagnetisme veel moeilijker.

Wel is waar brengt ook een vrij rondloopend electron een magnetisch moment te weeg en daaraan beantwoordt een term als (56) in de magnetische energie. Om nu, in de onderstelling van zulke deeltjes, de verschijnselen van het paramagnetisme te begrijpen, moet men aannemen dat om een of andere reden in het veld de wijzen van omloop, waarbij (56) positief is, meer voorkomen dan die waarbij die uitdrukking negatief is, en dat het voorkomen der verschillende bewegingswijzen statistisch met formules zooals die van LANGEVIN kan worden beschreven.

Hoe men daartoe zal kunnen komen is vooralsnog niet in te zien. Intusschen wordt de theorie van LANGEVIN op verschillende punten zoo mooi bevestigd, dat men er niet aan twijfelt of er moet wel veel waars in zijn.

De theorie van LANGEVIN gaat goed voor gassen, eveneens voor vloeistoffen, zooals b.v. oplossingen van ijzerzouten. Bij vaste lichamen wordt het moeilijker zich voor te stellen dat de magnetische deeltjes vrij ronddraaien, en raadselachtig is de afhankelijkheid der magnetische eigenschappen van de richting, die men bij paramagnetische kristallen opmerkt.

Een groote moeilijkheid voor de theorie is nog gelegen in het volgende. In paramagnetische lichamen zijn in ieder geval de atomen als permanente magneetjes te beschouwen, die hun moment behouden. Een rondloopend electron daarentegen zou volgens de grondvergelijkingen van het electromagnetische veld moeten uitstralen, en daarbij zijn beweging uitputten en dus zijn magnetisch moment verliezen. Deze moeilijkheid, die zich ook b.v. in de theorie van de lichtuitstraling voordoet, is een groote schaduw in de tegenwoordige theoretische physica.

§ 25. Ferromagnetische lichamen. Van deze is ijzer het type, verder behooren ertoe nikkel, kobalt, en ook verbindingen als magnetietpyrrhotine.

Deze stoffen kunnen gemagnetiseerd zijn, zonder dat er een uitwendig veld is. Zij kunnen dus permanente magneten vormen.

Voor de magnetische eigenschappen van deze stoffen is door

WEISS [1]) eene theorie gegeven. Deze theorie slaat zich wel heel stoutmoedig door de in de vorige § genoemde, en door nog eenige nieuwe moeilijkheden heen, maar zij levert desniettemin mooie resultaten.

Blijkbaar zijn er in ijzer, wanneer dit eenmaal magnetisch is, inwendige krachten die het gemagnetiseerd houden. De deeltjes houden, wanneer zij eenmaal een weinig georiënteerd zijn, elkander gericht.

WEISS neemt daarom aan dat uit onderlinge werkingen tusschen de elementaire magneten krachten voortvloeien, die dezelfde uitwerking hebben als een zeker magnetisch veld $\mathbf{H}_m$. De theorie wordt dan mathematisch uiterst eenvoudig. In plaats van (51) komt

$$q = \frac{\mathbf{m}\,(\mathbf{H} + \mathbf{H}_m)}{k\,T}, \quad \dots\dots\dots\dots (57)$$

terwijl (53) en (54) blijven gelden.

Het „moleculaire" veld $\mathbf{H}_m$ wordt verder evenredig aan de magnetisatie gesteld:

$$\mathbf{H}_m = c\,\mathbf{M} \quad \dots\dots\dots\dots (58)$$

Verschillende problemen kunnen dan worden opgelost.

§ 26. Als er een moleculair veld is, kan ondanks de warmtebeweging eene magnetisatie bestaan zonder uitwendig veld, dus bij $\mathbf{H} = 0$.

Men heeft nl. in dit geval volgens (57), (58) en (53)

$$q = \frac{\mathbf{m}\,c\,\mathbf{M}_0}{k\,T}\,\alpha \quad \dots\dots\dots\dots (59)$$

Uit deze vergelijking en (54) kunnen α en q worden berekend.

Graphische oplossing. Trek in Fig. 30 een lijn OL, zoo dat

$$tg\,L\,O\,X = \frac{k\,T}{\mathbf{m}\,c\,\mathbf{M}_0} \quad \dots\dots\dots\dots (60)$$

is. Het snijpunt P van OL met de kromme lijn geeft de oplossing.

Ook O is een snijpunt van OL met de kromme lijn; $\alpha = 0$

[1]) P. WEISS. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. J. de phys. (4) 6 (1907), p. 661. Molekulares Feld und Ferromagnetismus. Physik. ZS. 9 (1908), p. 358.

en $q = 0$ voldoen inderdaad aan de vergelijkingen. De eenvoudigste oplossing is dus $\mathbf{M} = 0$. Dit is echter niet de ware oplossing, deze toestand is n.l. labiel. Alleen P geeft stabiel evenwicht[1]).

De lijn OL zal de kromme lijn alleen dan snijden, en er kan dus alleen dan een spontane magnetisatie zijn, als

$$\frac{k\,T}{\mathbf{m}\,c\,\mathbf{M}_0} < \frac{1}{3}\,,\ \text{of}\ T < \frac{\mathbf{m}\,c\,\mathbf{M}_0}{3\,k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

is. Er kan dus alleen beneden zekere temperatuur eene spontane magnetisatie bestaan. De temperatuur, bij welke de spontane magnetisatie verdwijnt, wordt het CURIE-punt genoemd. Zij wordt gegeven door

$$\Theta = \frac{\mathbf{m}\,c\,\mathbf{M}_0}{3\,k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Boven deze temperatuur verliest een magneet dus zijne magnetisatie. Het CURIE-punt ligt voor ijzer bij 775 ° C, voor nikkel bij 360 ° C, voor magnetiet bij 580 ° C (benaderde waarden).

Ligt de temperatuur beneden het CURIE-punt, dan is er een spontane magnetisatie die door $\alpha = Q\,P$ bepaald wordt. Wij kunnen de vraag stellen: kunnen wij dan de magnetisatie sterker maken door nog een uitwendig veld op het lichaam te laten werken? Theoretisch is het mogelijk door het uitwendige veld maar sterk genoeg te maken de magnetisatie $\mathbf{M}_0$ te bereiken. Praktisch gaat dit echter niet. De reden hiervan is, dat het moleculaire veld zoo sterk is, het bedraagt millioenen gauss. Daartegenover heeft het uitwendig veld slechts geringen invloed. Men noemt daarom de aan $Q\,P$ beantwoordende spontane magnetisatie wel de „verzadigingsmagnetisatie" bij de beschouwde temperatuur.

[1]) Denken wij uitgaande van den toestand P de magnetisatie door een of andere oorzaak een weinig vergroot bij overigens gelijk blijvende omstandigheden. De waarden van α en q worden dan aangegeven door een punt op PL, rechts van P. De magnetisatie, die bij de dan aanwezige $\mathbf{H}$ kan bestaan, wordt aangewezen door een punt van de kromme, rechts van P, en is dus kleiner dan de aanwezige magnetisatie. Deze zal derhalve afnemen, en zoo zullen wij weer tot P terugkomen. Passen wij dezelfde redeneering toe op den met O correspondeerenden toestand, dan zien wij dat na eene dergelijke storing de toestand zich van den oorspronkelijken zal verwijderen.

Voor een lagere temperatuur maakt OL een kleineren hoek met OX. Daaruit volgt dat bij lagere temperatuur de verzadigingsmagnetisatie nadert tot $\mathbf{M}_0$. In Fig. 31 stelt de kromme AB voor hoe de verzadigingsmagnetisatie van de temperatuur afhangt. Bij het absolute nulpunt wordt zij gelijk aan $\mathbf{M}_0$. Het is dus van belang de verzadigingsmagnetisatie bij lage temperaturen te onderzoeken.

WEISS en KAMERLINGH ONNES [1]) hebben ijzer, nikkel, kobalt, magnetiet tot in vloeibare waterstof onderzocht.

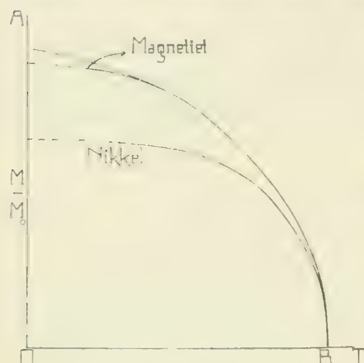


Fig. 31.

Magnetiet bleek alleen in het hoogste deel iets van de berekende lijn af te wijken, nikkel meer. De algemeene gang is intusschen toch wel zooals de theorie doet verwachten.

Uit die proeven bij lage temperaturen kan men $\mathbf{M}_0$ afleiden en daarmee voor deze ferromagnetische stoffen ook $\mathbf{m}$ leeren kennen.

Uit het CURIE-punt kan met behulp van (62) dan de constante c van het moleculaire veld, en daarmede dus ook de grootte van het moleculaire veld bij elke temperatuur, worden gevonden.

Bij willekeurige temperaturen worden de berekeningen op grond van de boven gegeven algemeene vergelijkingen wat ingewikkeld. Een tweetal aardige problemen verkrijgt men door de temperatuur te nemen even boven of even beneden het CURIE-punt.

§ 27. Denken wij eerst de temperatuur een weinig boven het CURIE-punt. Er is dan geen magnetisatie meer mogelijk zonder uitwendig veld. Zij dit $\mathbf{H}$.

De magnetisatie wordt dan als volgt gevonden. Van de twee vergelijkingen (57) en (54) waardoor a en η bepaald worden, kan de eerste gebracht worden in den vorm

$$\eta = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}}{k\,t} + 3\,a\,\frac{\Theta}{T} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (63)$$

[1]) P. WEISS en H. KAMERLINGH ONNES. Onderzoekingen over de magnetisatie bij zeer lage temperaturen. Versl. Kon. Acad., Febr. 1910, p. 768; Comm. Leiden No. 114.

terwijl, als q klein is, voor de tweede kan worden geschreven

$$\alpha = \frac{1}{3} q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Dus:

$$\alpha = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{H}}{3\,k\,(T-\Theta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

zoodat

$$\varkappa = \frac{\mathbf{m}\,\mathbf{M}_0}{3\,k\,(T-\Theta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Vergelijken we met (55), dan blijkt dat T is vervangen door $T-\Theta$.

Het volgende voorbeeld is ontleend aan metingen van WEISS en FOËX [1]):

Nikkel

t	$\bar{\varkappa}.\ 10^6$	$\bar{\varkappa}\,(t-364°)$
380,5	429,5	0,0071
388,4	266,9	0,0065
407,5	153,9	0,0067

Hierbij onderscheidt zich de grootheid $\bar{\varkappa}$ slechts door een constanten factor van $\varkappa$.

WEISS heeft met zijne medewerkers veel gewerkt boven het CURIE-punt. Daarbij werd dan gevonden dat vanaf dat punt in een zeker temperatuurinterval $\varkappa$ omgekeerd evenredig is met $T-\Theta$ overeenkomstig (66). In een volgend temperatuurinterval bleek de susceptibiliteit echter omgekeerd evenredig aan $T-\Theta'$, dus als het ware met de temperatuur gerekend vanaf een ander CURIE-punt. Men kan zich voorstellen dat in dit temperatuurinterval **m** anders geworden is.

WEISS heeft voor allerhande atomen **m** berekend. De daarbij verkregen uitkomsten hebben hem geleid tot zijne hypothese der *magnetonen*. Veelal bleek n.l. het magnetisch moment, berekend b.v. per gramatoom, een veelvoud te zijn van eene bepaalde grootheid. Het eerst werd dit door WEISS opgemerkt bij ijzer en nikkel [2]). Uit de metingen van WEISS en KAMERLINGH ONNES

[1]) P. WEISS et G. FOËX. Étude de l'aimantation des corps ferromagnétiques au-dessus du point de CURIE. Arch. sc. phys. et natur. (4) 31, p. 5, 89, 1911.

[2]) P. WEISS. Sur la rationalité des rapports des moments magnétiques moléculaires et le magnéton. J. de phys. (5) 1 (1911), p. 900, 965.

volgt voor het magnetisch moment van het gramatoom van ijzer: 12360, nikkel: 3370. Deze getallen verhouden zich op weinig na als 11 en 3. Deelt men door deze getallen, dan krijgt men:

ijzer 12360 : 11 = 1123,6

nikkel 3370 : 3 = 1123,3.

Het gemiddelde 1123,5 noemt WEISS het gram-*magneton*.

WEISS heeft vervolgens bij allerhande andere stoffen geheele veelvouden van dit magneton gevonden. Maar er zijn ook vele afwijkingen van een geheel veelvoud. Men kan nog niet zeggen wat de toekomst over dit magneton, als fundamenteel magnetisch moment zal leeren.

§ 28. Beneden het CURIE-punt zal er altijd magnetisatie zijn. De theorie van WEISS dwingt ons dus aan te nemen dat ijzer beneden die temperatuur altijd gemagnetiseerd is. Dat wij het ijzer dan in een schijnbaar ongemagnetiseerden toestand kunnen hebben is volgens WEISS daaraan toe te schrijven, dat een stuk ijzer steeds bestaat uit een conglomeraat van een groot aantal kristallen, die elk voor zich wel is waar magnetisch zijn, maar wier magnetische assen willekeurig naar alle richtingen georiënteerd zijn, zoodat zij gezamenlijk geen magnetisch moment in een of andere richting geven.

Is de temperatuur slechts weinig beneden het CURIE-punt, dan is de spontane magnetisatie gemakkelijk als volgt te berekenen.

Verg. (59) wordt

$$q = 3\alpha \frac{\Theta}{T} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (67)$$

en voor (54) kan men schrijven

$$\alpha = \frac{1}{3} q - \frac{1}{45} q^3 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (68)$$

Hieruit volgt, ermede rekening houdende dat T weinig van Θ verschilt

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{\Theta - T}{\Theta}},$$

of
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{\Theta - T}{\Theta}} \quad \dots\dots\dots \quad (69)$$

De spontane magnetisatie is dus bij temperaturen dicht beneden het CURIE-punt evenredig met $\sqrt{\Theta - T}$.

§ 29. Wij komen nu tot een van de mooiste bevestigingen van de theorie van Weiss. Wij berekenen daartoe eerst de potentieele energie, die bij aanwezigheid van een moleculair veld in een gemagnetiseerd lichaam bestaat.

Daarbij zullen wij ons door enkele moeilijkheden, die zich bij nader bezien voordoen, maar heenslaan.

Verdeel de magnetische deeltjes in de volumeeenheid in een groot aantal groepen, ieder gekenmerkt door een bepaalde richting van het magnetisch moment. Stel dat er zoodanige krachten tusschen de deeltjes bestaan, dat een groep A ten opzichte van een groep A' een potentieele energie heeft, die, afgezien van een standvastigen term, kan worden voorgesteld door

$$-c\, n\, n'\, \mathbf{m}^2 \cos\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

Hierin zijn n en n' de aantallen deeltjes, waaruit de groepen A en A' bestaan; ϑ is de hoek dien de richtingen hunner magnetische momenten met elkaar maken, en c een constante.

Uit (70) volgt, dat al de deeltjes der groep A van al de deeltjes van A' een koppel ondervinden dat hen in de richting van A' tracht te brengen en waarvan de grootte is

$$c\, n\, n'\, \mathbf{m}^2 \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

Ditzelfde richtende koppel zou ook bestaan als op de deeltjes A een magnetische kracht in de richting van het moment van A' werkte met de grootte

$$c\, n'\, \mathbf{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (72)$$

Evenzoo kan men de werking der andere groepen A'', A''', enz. op A vervangen door magnetische krachten $c\, n''\, \mathbf{m}$, $c\, n'''\, \mathbf{m}$, enz., telkens in de richting van de momenten dier groepen. Al deze krachten samenstellende, krijgt men een magnetische kracht

$$\mathbf{H}_m = c\, \mathbf{M}$$

in de richting der magnetische $\mathbf{M}$; dit stemt met (58) overeen.

De potentieele energie der deeltjes ten opzichte van elkaar is

$$U = -\frac{1}{2} c\, \Sigma \left(n\, \mathbf{m}\, \Sigma\, n' \mathbf{m} \cos\vartheta \right), \quad \ldots \ldots \quad (73)$$

waarbij wij eerst, de groep A vasthoudende, over alle groepen A' moeten optellen, en vervolgens over alle groepen A. De factor $\frac{1}{2}$ treedt hierbij op wijl bij het sommeeren op deze wijze de potentieele energie van twee bepaalde groepen ten opzichte van elkaar tweemaal genomen wordt.

De eerste optelling $\Sigma n' \mathbf{m} \cos \vartheta$ geeft de component van de magnetisatie in de richting der momenten van A, dus, als φ de hoek is tusschen die momenten en de magnetisatie,

$$\mathbf{M} \cos \varphi .$$

Dus:

$$U = -\frac{1}{2} c \mathbf{M} \Sigma n \mathbf{m} \cos \varphi \, , \qquad (74)$$

waarbij de laatste som $= \mathbf{M}$ is, zoodat

$$U = -\frac{1}{2} c \mathbf{M}^2 \qquad (75)$$

wordt.

§ 30. Uit (75) en (69) volgt

$$U = -\frac{5}{6} c \mathbf{M}_0^2 \frac{\Theta - T}{\Theta} \qquad (76)$$

welke uitdrukking bij het stijgen van T toeneemt. De toename per eenheid van temperatuurverhooging is

$$\frac{dU}{dT} = \frac{5}{6} \frac{c \mathbf{M}_0^2}{\Theta}$$

of volgens (62)

$$\frac{5}{2} \frac{\mathbf{M}_0}{\mathbf{m}} k = \frac{5}{2} N k \qquad (77)$$

Hieraan beantwoordt een zeker deel in de soortelijke warmte, dat boven het CURIE-punt niet meer voorkomt; dus maakt de soortelijke warmte, als men het CURIE-punt passeert, een sprong. Uit (77) blijkt dat die sprong voor een ferromagnetisch element gelijk is aan $\frac{5}{3}$ maal de soortelijke warmte bij constant volume, die hetzelfde element zou hebben als eenatomig gas.

Deze sprong in de soortelijke warmte is inderdaad waargenomen [1], hetgeen de mooiste bevestiging van de theorie van het moleculaire veld is.

§ 31. Wij zagen in § 28 dat wij ons een stuk ijzer moeten voorstellen als bestaande uit een conglomeraat van een groot aantal kristallen, die elk voor zich magnetisch zijn, maar waarvan de magnetisaties, wanneer het stuk ijzer in zijn geheel onmagnetisch is, over alle richtingen willekeurig verdeeld zijn. Door een uitwendig magnetisch veld kunnen nu de magnetisaties dier kristalletjes gewijzigd worden.

[1]) P. WEISS et P. N. BECK. Chaleur spécifique et champ moléculaire des substances ferromagnétiques. J. de phys. (4) 7 (1908), p. 249.

WEISS[1]) heeft meer in bijzonderheden kunnen onderzoeken hoe zich het goed gekristalliseerd in de natuur voorkomende pyrrhotine (eene verbinding van ijzer en zwavel) gedraagt. Daarbij is gebleken dat een kristal van deze stof eene bepaalde richting bezit, volgens welke het gemakkelijk gemagnetiseerd kan worden, met dien verstande evenwel, dat het ook in de tegengestelde richting even gemakkelijk gemagnetiseerd kan worden.

Wij zullen ons nu maar voorstellen dat ook de ijzerkristalletjes eene dergelijke eigenschap hebben, dat zij namelijk slechts volgens eene bepaalde lijn, doch evengoed in de eene als in de juist tegengestelde richting, kunnen gemagnetiseerd zijn. Verder nemen wij aan dat eene uitwendige magnetische kracht, mits deze minstens eene bepaalde grootte heeft, de magnetisatie kan doen omslaan. Dan kunnen wij verschillende bijzonderheden in het gedrag van het ijzer begrijpen.

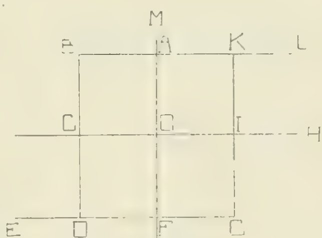


Fig. 32

Wij denken eerst eens met één enkel kristal te doen te hebben. Het magnetisch veld **H** zij aanvankelijk nul. De magnetisatie zij dan voorgesteld door OA (Fig. 32). De richting, die de magnetisatie dan heeft, noemen wij de positieve richting. Wij laten nu **H** in negatieve richting aangroeien. De magnetisatie ondergaat daarbij geen verandering, zij volgt de lijn AB, totdat **H** eene zekere waarde OC bereikt. Dan slaat de magnetisatie om: CD. Wordt **H** nog grooter negatief dan volgt **M** de lijn DE. Laten wij nu **H** afnemen, en daarna positief aangroeien, dan volgt de magnetisatie de gebroken lijn $EFGKL$, om daarna, wanneer dan **H** weer tot nul afneemt, de lijn LA te volgen. Dan is de cyclus gesloten. Wij hebben aldus eene hysteresisfiguur gekregen.

In werkelijkheid krijgt men met een stuk ijzer eene figuur als in Fig. 11 is voorgesteld. Volgens het in § 14 gezegde stelt daarbij de inhoud van de door *bcdefgb* begrensde figuur den arbeid voor, dien wij moeten verrichten om den cyclus uit te voeren, welke arbeid in den vorm van in het ijzer ontwikkelde warmte vrij komt.

[1]) P. WEISS. Les propriétés magnétiques de la pyrrhotine. Arch. Sc. phys. et nat. (4) 19 (1905), p. 537,: 20 (1905) p. 213. J. de phys. (4) 4 (1905), p. 469, 829.

Hoe komt het nu dat wij niet Fig. 32, doch Fig. 11 verkrijgen? In de eerste plaats is op te merken, dat onze onderstelling dat het kristal alleen volgens éene lijn kan gemagnetiseerd worden, niet geheel met de werkelijkheid overeenkomt. Wij kunnen de magnetisatie ook wel in richtingen dwingen, die van de voorkeurrichting wat afwijken. Wij zien hiervan echter af.

Maar wij moeten verder bedenken, dat een stuk ijzer niet bestaat uit één enkel kristal, maar uit een groot aantal kristalletjes, die in willekeurig verdeelde richtingen liggen. Bij het aanbrengen van het magnetisch veld zullen de magnetisaties der verschillende kristallen niet alle tegelijk omklappen, maar naar gelang van hunne richting dat meer of minder spoedig doen. Daardoor gaat het omslaan van de magnetisatie meer geleidelijk. De verschillende kristallen spelen nu eene dergelijke rol als b.v. bij de behandeling van de paramagnetische lichamen de draaibare magneetjes deden.

Wij kunnen ons nu als volgt duidelijk maken, hoe een stuk ijzer door een uitwendig veld **H** van voldoende sterkte gemagnetiseerd wordt.



Fig. 33.

Wij denken van uit een punt O (Fig. 33) de magnetisaties voor de verschillende kristalletjes uitgezet. De uiteinden liggen dan gelijkmatig verdeeld op een boloppervlak. Wij brengen nu een magnetisch veld aan volgens de richting OP. Wanneer dit veld eene bepaalde waarde, stel $\mathbf{H}_c$, bereikt, zullen alle magnetisaties, die precies volgens OQ gericht zijn, naar OP omslaan. Wordt **H** grooter, dan zal dat ook het geval zijn met magnetisaties, die met OQ een hoek maken. Is $\mathbf{H} \cos \theta = \mathbf{H}_c$, dan zal dit het geval zijn met alle magnetisaties wier richtingen liggen binnen den kegel $OA'B'$, die θ tot halven tophoek heeft. Immers voor alle betreffende kristalletjes is de component van **H** volgens de richting waarin zij gemagnetiseerd kunnen zijn, voldoende groot om de magnetisatie te doen omklappen. De richtingen dier magnetisaties komen dan te liggen in den kegel OAB. Dit is aangegeven door in Fig. 33 AB dubbel te teekenen. Het is nu zonder meer duidelijk, dat het stuk ijzer in zijn geheel een magnetisch moment in de richting van OP gekregen heeft.

Wij kunnen nu gemakkelijk aangeven wat er gebeurt, wanneer wij daarna het veld **H** weer laten afnemen en dan in tegengestelde richting laten aangroeien.

Door middel van eene dergelijke figuur kunnen wij b.v. ook inzien, hoe wij een gemagnetiseerd stuk ijzer kunnen ontmagnetiseeren, door het in een draadklos bloot te stellen aan het veld van telkens zwakker wordende stroomen, die telkens in tegengestelde richting door de klos gevoerd worden.

§ 32. Men kan door eene mooie proef [1]) aannemelijk maken, dat in een stuk ijzer kleine kristalletjes aanwezig zijn, die elk voor zich gemagnetiseerd zijn.

In Fig. 34 stelt *A B* een ijzerdraad voor, die gemagnetiseerd kan worden, door een hoefmagneet *M* ertoe te doen naderen. Bij verwijdering van *M* wordt de draad weer gedeeltelijk geontmagnetiseerd.

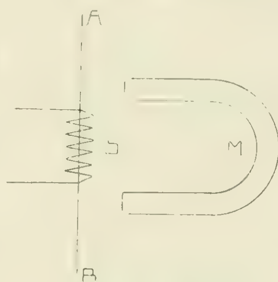


Fig. 34.

In de spoel *S* ontstaan hierbij inductiestroomen. Barkhausen [2]) heeft opgemerkt, dat men, wanneer in den stroomkring van *S* een telefoon is ingeschakeld, daarin een geruisch hoort. De inductiestroom is dus geen vloeiend verloopende stroom, maar bestaat uit afzonderlijke inductiestootjes, en het ligt voor de hand zich voor te stellen dat die stootjes daarvan afkomstig zijn, dat telkens de magnetisatie van een geheel kristalletje tegelijk omklapt. De afzonderlijke stootjes kunnen daarbij geteld worden.

Men kan het verschijnsel voor een auditorium demonstreeren, wanneer men de inductiestootjes versterkt door middel van trioden. Het is daarbij voordeelig voor *A B* niet ijzer, doch nikkelstaal te kiezen, daar bij dit materiaal de inductiestooten het sterkst zijn.

Heeft men den magneet *M* tot op zekeren afstand tot *A B* doen naderen, hem daarna verwijderd, en doet men hem een tweeden keer naderen, dan hoort men in den telefoon geen geluid zoolang de magneet niet dichter bij komt dan den eersten

---

[1]) Opgesteld door Dr. B. van der Pol.

[2]) H. Barkhausen. Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen. Physik. ZS. 20 (1919), p. 401. Verg. ook B. van der Pol Jr. Discontinuïteiten bij het magnetiseeren. Versl. Kon. Akad. Amsterdam 29 (1920), p. 341.

keer het geval was. Dit is geheel overeenkomstig de theorie. Alle magnetisaties n.l., die omgeklapt zouden kunnen worden, zijn reeds bij de eerste nadering omgeklapt. Wel krijgen wij een geluid wanneer nu de magneet dichterbij gebracht wordt, of wanneer de magneet omgekeerd wordt.

Bij een tweede proef brengen wij in het spoeltje *S* een ijzerdraad, waarin remanent magnetisme aanwezig is. Buigen wij den ijzerdraad, dan verdwijnt een deel van het remanente magnetisme. Hierbij hoort men op dezelfde manier als bij de eerste proef een geluid in den telefoon. Ook wanneer het ijzer van te voren is uitgegloeid hoort men bij buigen het geluid nog. Dit is wel een bewijs voor het spontaan gemagnetiseerd zijn van de kristalletjes.

De proef zou geheel bewijzend zijn als men den draad kon houden buiten het aardmagnetische veld. Intusschen verandert het verschijnsel niet wanneer men door het spoeltje een constanten stroom leidt, die een veld geeft, dat ongeveer gelijk is aan het aardmagneetveld. Dit bevestigt wel de bewijskracht van deze proef.

Hoe het komt, dat bij het buigen van de staaf de magnetisatie in sommige kristalletjes omklapt zien wij nog niet goed in. Ook de invloed van mechanische schokken op de magnetisatie is nog geheimzinnig. Men heeft zich wel eens voorgesteld, dat men door zulk een schok de moleculen zou „dooreenschudden", zoodat zij uit hunne georiënteerde standen zouden worden gebracht. Hiertegen valt op te merken, dat bij alle mechanische bewegingen die wij kunnen voortbrengen, groepen van millioenen van moleculen in hun geheel verplaatst worden.

Behalve met behulp van een telefoon kan men de afzonderlijke inductiestootjes ook met een galvanometer, b.v. een snaargalvanometer aantoonen. Daarbij kan de intensiteit der inductiestootjes in verschillende gevallen beter vergeleken worden.

Het is op deze wijze gebleken dat men bij gebruikmaking van een wijdere spoel het effect bijna even goed verkrijgt als met een nauwe spoel. Wanneer nu telkens slechts één kristalletje tegelijk omklapte, zou de verandering die de loop van de krachtlijnen hierbij ondergaat, zich slechts over een kleinen afstand doen gevoelen, en zou men moeten verwachten, dat men een des te beter effect zou krijgen naarmate de spoel nauwer is. Nu dit laatste niet het geval is, moet men aannemen, dat telkens in een lange rij van kristallen de magnetisatie tegelijk omklapt.

AANHANGSEL.

1. (§ 3) Wij beschouwen den potentiaal dien een gemagnetiseerd lichaam in een naburig punt teweegbrengt; daarbij kiezen wij dat punt tot oorsprong O van een rechthoekig coördinatenstelsel. Laat vooreerst het lichaam zeer klein zijn, en laat in verschillende punten $Q\,(x, y, z)$ er van hoeveelheden magnetisme, die wij door m voorstellen, zijn opeengehoopt; de gezochte potentiaal is dan, als wij de afstanden tot O door r voorstellen

$$V = \frac{1}{4\pi} \Sigma \frac{m}{r}.$$

Daar de totale hoeveelheid magnetisme $\Sigma m = 0$ is, kan V alleen van nul verschillend zijn omdat de verschillende hoeveelheden m op ongelijke afstanden van O liggen. Om met die ongelijkheid rekening te houden kiezen wij een bepaald punt P van het lichaam uit en vergelijken voor een punt Q de waarde van $\frac{1}{r}$ met de overeenkomstige waarde $\frac{1}{r_0}$ voor het punt P. Door de coördinatenverschillen $x_Q - x_P$, $y_Q - y_P$, $z_Q - z_P$ als oneindig klein te beschouwen, vinden wij, in aanmerking nemende dat $\frac{1}{r}$ een functie van x, y, z is,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + (x - x_P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + (y - y_P)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + (z - z_P)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Hierin verstaan wij onder de differentiaalquotienten $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ enz. de waarden die zij in het punt P hebben, zoodat die grootheden hetzelfde zijn, onverschillig welk punt Q men neemt. Substitueert men de uitdrukking voor $\frac{1}{r}$ in de vergelijking voor V, dan komt er

$$V = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\Sigma\, m\,(x - x_P) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\Sigma'\, m\,(y - y_P) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\Sigma\, m\,(z - z_P)\right\}$$

De hierin voorkomende sommen zijn niet anders dan de componenten van het magnetische moment **M** van het lichaam, zoodat, als wij daarvoor schrijven $\mathbf{m}_x$, $\mathbf{m}_y$, $\mathbf{m}_z$,

$$V = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{m}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{m}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{m}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} \quad . . . (1)$$

wordt.

Wij kunnen nu gemakkelijk tot het geval van een gemagnetiseerd lichaam van eindige uitgestrektheid overgaan. Wij verdeelen het in volume-elementen $dx\, dy\, dz$ (Fig. 35) en stellen de magnetisatie of het magnetisch moment per volumeeenheid door **M**, de componenten daarvan door $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ voor. De componenten van het moment van het volumeelement $dx\, dy\, dz$ zijn dan $\mathbf{M}_x\, dx\, dy\, dz$, enz. Vervangt men in *(1)* $\mathbf{m}_x$, enz., door deze uitdrukkingen, dan krijgt men den potentiaal dien één volumeelement in O ten gevolge heeft: om den potentiaal te vinden, dien het geheele lichaam daar teweegbrengt, en waarvoor wij nu V schrijven, moeten wij dan nog over de geheele uitgestrektheid van het lichaam integreeren. Derhalve:



Fig. 35.

$$V = \frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathbf{M}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dx\, dy\, dz.$$

Integreeren wij den term $\mathbf{M}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dx\, dy\, dz$ partieel naar x, den volgenden naar y, den derden naar z, dan leveren de geïntegreerde termen te zamen

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\left\{\mathbf{M}_x \cos(n, x) + \mathbf{M}_y \cos(n, y) + \mathbf{M}_z \cos(n, z)\right\} d\,O \quad . . (2)$$

Daarin stelt $d\,O$ een element van het oppervlak voor, en n de naar buiten getrokken normaal: (n, x), (n, y), (n, z) zijn de hoeken die deze met de coördinaatassen maakt en de integratie moet over het

geheele oppervlak worden uitgestrekt. De uitdrukking gaat over in

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\mathbf{M}_n\, d\,O\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

als $\mathbf{M}_n$ de volgens n gerichte component van de magnetisatie is, en is gelijk aan den potentiaal veroorzaakt door een over het oppervlak verdeeld agens met vlaktedichtheid $\mathbf{M}_n$.

Verder krijgen wij nog de ruimte integraal:

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \quad \ldots \ldots (4)$$

die gelijk is aan den potentiaal veroorzaakt door eene lading gegeven door (2).

2. (§ 13). Zij ω de omwentelingssnelheid van den bol, en σ het specifiek geleidingsvermogen van het materiaal, waarvoor wij $\mu = 1$ onderstellen. Men ziet gemakkelijk in dat de inductiestroomen, die in den bol tengevolge van de wenteling ontstaan, evenredig zullen zijn aan $\sigma\,\omega\,H$. Deze inductiestroomen zullen aanleiding geven tot magnetische krachten die eveneens evenredig zijn aan $\sigma\,\omega\,H$. Hierdoor wordt het magnetisch veld gewijzigd, hetgeen eene wijziging in de inductiestroomen medebrengt. Deze wijziging is intusschen evenredig aan $(\sigma\,\omega)^2$. Wij zullen $\sigma\,\omega$ zoo klein onderstellen, dat wij met deze wijziging in het magnetisch veld bij de berekening der inductiestroomen geen rekening behoeven te houden. Dan is dus overal

$$\mathbf{H}_x = 0\,,\ \mathbf{H}_y = H\,,\ \mathbf{H}_z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

De componenten van de snelheid van een punt in den bol zijn

$$\mathbf{v}_x = 0\,,\ \mathbf{v}_y = -\,\omega\,z\,,\ \mathbf{v}_z = \omega\,y \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

en hieruit volgt blijkens (7) dat in dat punt eene electrische kracht werkt in de richting van de X-as:

$$-\,\omega\,y\,H\,.$$

Tengevolge van de werking van deze electrische kracht zullen er zich electrische ladingen op het oppervlak van den bol ophoopen. Stel den potentiaal, die aan deze ladingen te danken is φ. Dan zijn de componenten van de electrische kracht $\mathbf{E}$:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_x &= -\,\omega\,y\,H - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\\ \mathbf{E}_y &= -\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\\ \mathbf{E}_z &= -\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Uit deze vergelijkingen volgt:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y}-\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x}=-\omega H \\ \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z}-\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z}=0 .\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

De electrische stroom $\mathbf{i}$ wordt bepaald door

$$\mathbf{i}=\sigma \mathbf{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

en uit (8) volgt dus

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \mathbf{i}_x}{\partial y}-\frac{\partial \mathbf{i}_y}{\partial x}=-\sigma \omega H \\ \frac{\partial \mathbf{i}_y}{\partial z}-\frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial x}-\frac{\partial \mathbf{i}_x}{\partial z}=0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Aan deze vergelijkingen kan voldaan worden door te stellen:

$$\mathbf{i}_x=-\frac{y}{r} . i, \mathbf{i}_y=\frac{x}{r} . i, \mathbf{i}_z=0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

als $r^2=x^2+y^2$, zoodat r den afstand van het punt tot de Z-as voorstelt. Door substitutie van deze waarden *(11)* in *(10)* vindt men als eenige voorwaarde

$$i+r \frac{d i}{d r}=\sigma \omega H r .$$

De oplossing hiervan is

$$i=\frac{1}{2} \sigma \omega H r+\frac{C}{r},$$

waarin echter de integratieconstante C nul moet zijn, omdat voor $r=0$ de stroom niet oneindig kan worden. Dus

$$i=\frac{1}{2} \sigma \omega H r . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Er loopen dus in den bol stroomen in cirkels om de Z-as, in eene richting die past bij de richting van de positieve Z-as, en waarvan de intensiteit, zooals door *(12)* wordt aangegeven, telkens evenredig is aan den straal van den betreffenden cirkel.

Het is duidelijk dat voldaan is aan de voorwaarde dat aan het grensvlak van den bol de stroom geen normale component moet hebben.

Wij merken nog op, dat uit (7) nu nader volgt

$$\varphi = -\frac{1}{2}\,\omega\, H\, x\, y\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

zoodat de aequipotentiaalvlakken cilindervlakken evenwijdig aan de Z-as zijn, met gelijkzijdige hyperbolen als loodrechte doorsneden. De oppervlaktedichtheid is verder hieruit onmiddellijk af te leiden.

Beschouwen wij in den bol een cirkelvormigen ring, verkregen door wenteling van het vlakte-element $\varrho\, d\varrho\, d\theta$ (Fig. 36) om de Z-as. Hierin loopt een stroom

$$i\,\varrho\, d\varrho\, d\theta = \frac{1}{2}\,\sigma\,\omega\, H\,\varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta\,.$$

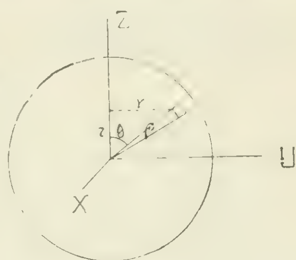


Fig. 36.

Het magnetisch moment van dezen circulairen stroom bedraagt volgens (25):

$$\pi\, r^2 \times i\,\varrho\, d\varrho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\,\sigma\,\omega\, H\,\varrho^4 \sin^3\theta\, d\varrho\, d\theta\,.$$

Het magnetisch moment van den geheelen bol, door integratie verkregen is:

$$\frac{2\pi}{15}\,\sigma\,\omega\, H\, R^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

als R den straal van den bol voorstelt. Het heeft de richting van de positieve Z-as. De bol ondervindt dientengevolge in het magnetisch veld een koppel

$$\frac{2\pi}{15}\,\sigma\,\omega\, H^2\, R^5\,.$$

Er moet arbeid verricht worden om den bol te draaien, en wel bedraagt die arbeid per seconde

$$\frac{2\pi}{15}\,\sigma\,\omega^2\, H^2\, R^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

In den bol wordt door de electrische stroomen warmte ontwikkeld, in de volume-eenheid een bedrag:

$$\frac{i^2}{\sigma}\,.$$

Dit geeft in den bovengenoemden ring

$$\varrho\, d\varrho\, d\theta \,.\, 2\pi\varrho \sin\theta \,.\, \frac{1}{\sigma} \,.\, \frac{1}{4}\, \sigma^2\, \omega^2\, H^2\, \varrho^2 \sin^2\theta = \frac{\pi}{2}\, \sigma\, \omega^2\, H^2\, \varrho^4 \sin^3\theta\, d\varrho\, d\theta \,.$$

Integreeren wij dit over den geheelen bol, dan vinden wij de uitdrukking (*15*) terug.

3. (§ 19). Wij beschouwen een atoom, bestaande uit een kern die wij wegens de groote massa onbewegelijk onderstellen, en een aantal electronen die daarom rondloopen. Den oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel plaatsen wij in de kern.

Is er geen magnetisch veld, dan heeft men voor elk electron bewegingsvergelijkingen van den vorm

$$m\ddot{x} = X,\ m\ddot{y} = Y,\ m\ddot{z} = Z\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

waarin X, Y, Z de componenten van de kracht zijn, die het van de kern en van de andere electronen ondervindt.

Laten wij nu onderstellen dat er een magnetisch veld is, waarvan de intensiteit geleidelijk van nul af tot zeker bedrag aangroeit. Dan komen bij de zooeven genoemde kracht nog twee andere. Vooreerst de in stelling III van § 6 genoemde. De componenten daarvan zijn, daar wij geen onderscheid tusschen **H** en **B** behoeven te maken,

$$e(\dot{y}\,\mathbf{H}_z - \dot{z}\mathbf{H}_y)\,,\ e(\dot{z}\,\mathbf{H}_x - \dot{x}\,\mathbf{H}_z)\,,\ e(\dot{x}\,\mathbf{H}_y - \dot{y}\,\mathbf{H}_x)\,.$$

Ten tweede een kracht die uit de verandering van **H** voortvloeit, en door Stelling II bepaald wordt. Gemakshalve nemen wij aan dat op elk oogenblik het veld symmetrisch is rondom de door O gaande magnetische krachtlijn, die wij recht onderstellen. De lijnen langs welke de in de stelling genoemde electrische kracht werkt zijn dan cirkels om die krachtlijn door O. Nemen wij voor een oogenblik aan dat deze lijn de richting der Z-as heeft, en beschouwen wij een cirkel met den zeer kleinen straal r rondom O in het xy-vlak; de positieve richting daarlangs passe bij de Z-as. De magnetische inductie door het oppervlak σ van dien cirkel is $\pi r^2 \mathbf{H}_z$, en de vermindering daarvan per tijdseenheid $-\pi r^2 \dot{\mathbf{H}}_z$. Dit is dus de in de stelling genoemde arbeid der electrische kracht en daar deze wegens de symmetrie in alle punten van den cirkel even groot is, heeft men voor de grootte der electrische kracht $-\frac{1}{2} r\, \dot{\mathbf{H}}_z$ en voor

hare componenten $\frac{1}{2} y \dot{\mathbf{H}}_z$, $-\frac{1}{2} x \dot{\mathbf{H}}_z$, 0. Gemakkelijk ziet men nu dat bij een willekeurige richting van het magnetische veld de componenten worden

$$\frac{1}{2}(y \dot{\mathbf{H}}_z - z \dot{\mathbf{H}}_y)\,,\ \frac{1}{2}(z \dot{\mathbf{H}}_x - x \dot{\mathbf{H}}_z)\,,\ \frac{1}{2}(x \dot{\mathbf{H}}_y - y \dot{\mathbf{H}}_x)\,.$$

In het veld heeft men dus voor elk electron bewegingsvergelijkingen van den vorm

$$m \ddot{x} = X + e(\dot{y} \mathbf{H}_z - \dot{z} \mathbf{H}_y) + \frac{e}{2}(y \dot{\mathbf{H}}_z - z \dot{\mathbf{H}}_y)\,, \text{ enz. . . } (17)$$

Wij voeren nu de coördinaten x', y', z' in, met betrekking tot assen die met de hoeksnelheid

$$\omega = -\frac{e}{2m} \mathbf{H}$$

om de door O gaande krachtlijn wentelen.

De componenten dezer hoeksnelheid, die tegelijk met $\mathbf{H}$ verandert zijn

$$-\frac{e}{2m} \mathbf{H}_x\,,\ -\frac{e}{2m} \mathbf{H}_y\,,\ -\frac{e}{2m} \mathbf{H}_z$$

en, als λ_1, μ_1, ν_1 de richtingsconstanten van OX' met betrekking tot OX, OY, OZ zijn, λ_2, μ_2, ν_2 die van OY' en λ_3, μ_3, ν_3 die van OZ', heeft men

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{e}{2m}(\mu_1 \mathbf{H}_z - \nu_1 \mathbf{H}_y)\,, \text{ enz. . . . . } (18)$$

en, als men termen met $\mathbf{H}^2$ verwaarloost,

$$\ddot{\lambda}_1 = \frac{e}{2m}(\mu_1 \dot{\mathbf{H}}_z - \nu_1 \dot{\mathbf{H}}_y)\,, \text{ enz. . . . . } (19)$$

Uit de betrekkingen

$$x' = \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z\,, \text{ enz.}$$

volgt verder

$$\ddot{x}' = \lambda_1 \ddot{x} + \mu_1 \ddot{y} + \nu_1 \ddot{z} + 2(\dot{\lambda}_1 \dot{x}_1 + \dot{\mu}_1 \dot{y} + \dot{\nu}_1 \dot{z}) +$$
$$+ \ddot{\lambda}_1 x + \ddot{\mu}_1 y + \ddot{\nu}_1 z\,, \text{ enz.}$$

Voert men hier de waarden *(18)* en *(19)* in, dan kan men uit *(17)* afleiden

$$m \ddot{x}' = X'\,,\ m \ddot{y}' = Y'\,,\ m \ddot{z}' = Z'\,,$$

uit welke vergelijkingen het magnetische veld verdwenen is. De grootheden $X' = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z$, enz., zijn de componenten ten opzichte van de nieuwe assen van de door de kern en de overige electronen op het beschouwde deeltje uitgeoefende kracht. Daar deze componenten op denzelfde wijze van de nieuwe coördinaten afhangen als X, Y, Z van de oude coördinaten hebben de gevonden vergelijkingen dezelfde gedaante als *(16)*.

4. (§ 20). De coördinaten van alle punten van een systeem mogen bepaald zijn door de algemeene coördinaten van het systeem:

$$q_1, q_2 \ldots q_n.$$

Dan is de kinetische energie eene functie van $q_1, q_2 \ldots q_n$, en van $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_n$.

$$T = F(q_1 \ldots q_n, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

De coördinaten en snelheden van alle punten van het systeem zijn dan bepaald door de algemeene coördinaten $q_1 \ldots q_n$, en de bijbehoorende momenten

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \ldots p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

De statistische mechanica leert nu dat de kans dat bij thermodynamisch evenwicht de coördinaten begrepen zijn tusschen q_1 en $q_1 + dq_1, \ldots q_n$ en $q_n + dq_n$, en de momenten tusschen p_1 en $p_1 + dp_1, \ldots p_n$ en $p_n + dp_n$, gegeven wordt door

$$C e^{-\frac{E}{kT}} dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

$(E = T + U)$.

Door *(21)* worden de grootheden $p_1 \ldots p_n$ als functiën van de coördinaten en de snelheden gegeven en men kan nu in *(22)* $dp_1 \ldots dp_n$ vervangen door

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_1}, & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_2}, & \ldots\ldots & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_1}, & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_2}, & \ldots\ldots & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}_n} \\ \\ \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_n} \end{vmatrix} d\dot{q}_1\, d\dot{q}_2 \ldots\ldots d\dot{q}_n,$$

of volgens *(21)* door

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2}, & \ldots\ldots & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1}, & \ldots & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_n} \\ \cdot & & \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_1}, & \ldots\ldots & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_n^2} \end{vmatrix} d\dot{q}_1\, d\dot{q}_2 \ldots\ldots\ldots d\dot{q}_n \,. \quad (23)$$

Toepassing hiervan levert (43).

5. (§ 24). Wij beschouwen het geval van twee gesloten stroomkringen waarin stroomen van de sterkte i en i' bestaan. Laat in eenig punt der ruimte **H** en **H**$'$ de magnetische krachten zijn, die door deze stroomen worden teweeggebracht en zij ϑ de hoek tusschen die krachten. Dan is de tweede macht der resulteerende magnetische kracht

$$\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}'^2 + 2\, \mathbf{H}\, \mathbf{H}' \cos \vartheta\,;$$

de helft hiervan geeft ons het magnetische arbeidsvermogen per volume-eenheid, wanneer, zooals wij onderstellen, de permeabiliteit overal 1 is, zoodat wij niet tusschen magnetische kracht en magnetische inductie behoeven te onderscheiden. Door integratie over de geheele ruimte ($d\,S$ volume-element) krijgen wij de geheele magnetische energie:

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{H}^2\, d\,S + \frac{1}{2}\int \mathbf{H}'^2\, d\,S + \int \mathbf{H}\, \mathbf{H}' \cos \vartheta\, d\,S\,.$$

De eerste en de tweede term stellen het arbeidsvermogen voor, dat men zou hebben als alleen de eerste of alleen de tweede stroom bestond; de derde is het arbeidsvermogen dat aan het gelijktijdig bestaan van beide stroomen te danken is. Deze laatste energie

$$A = \int \mathbf{H}\, \mathbf{H}' \cos \vartheta\, d\,S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

willen wij berekenen.

Wij vestigen nu de aandacht op de krachtlijnen of inductielijnen die bij den stroom i' behooren. Wij stellen ons voor (verg. Fig. 12) dat dit in zich zelf terugkeerende lijnen zijn. Eenige ervan worden door den eersten stroomkring omvat en om de

gedachten te bepalen nemen wij aan dat zij door dien kring heengaan in een richting passende bij die van den stroom i.

Wij kunnen de geheele ruimte in oneindig nauwe inductiebuizen behoorende bij den stroom i', verdeelen en zoeken nu vooreerst de bijdrage die één dergelijke buis B voor de integraal (24) oplevert. Zij s een der in die buis liggende krachtlijnen, $d\,s$ een element daarvan, en neem voor het volume-element $d\,S$ het gedeelte der buis dat tusschen de loodrechte doorsneden begrepen is, die door de uiteinden van $d\,s$ gaan. Dan is, als men voor de loodrechte doorsnede $d\,\omega$ schrijft,

$$d\,S = d\,\omega\,d\,l\,,$$

zoodat men de uitdrukking

$$\mathbf{H}'\,d\,\omega\,.\mathbf{H}\cos\vartheta\,d\,l$$

over de geheele buis moet integreeren. Volgens de hoofdeigenschap der magnetische inductie is echter $\mathbf{H}'\,d\,\omega$ over de geheele buis constant en volgens Stelling I (§ 4) is

$$\int \mathbf{H}\cos\vartheta\,d\,l$$

nul, wanneer de lijn l niet door den eersten stroomkring omvat wordt, en heeft zij de waarde i als dat wel het geval is. (Men overtuige zich ervan, dat hier i en niet $-i$ moet worden genomen.) Ten slotte vindt men dus voor de gezochte grootheid (24)

$$A = i\int \mathbf{H}'\,d\,\omega\,,$$

waarbij de integraal een som voorstelt over de bij i' behoorende inductiebuizen, en wel alleen over die, welke door den stroom i omvat worden. Die integraal is dus niet anders dan wat wij in § 5 de inductie door een oppervlak, langs welks rand de stroom i loopt, genoemd hebben.

Door nu aan te nemen dat het magnetische veld $\mathbf{H}'$ in een deel der ruimte waarin de stroom i loopt, als homogeen kan worden beschouwd (en door verder $\mathbf{H}$ in plaats van $\mathbf{H}'$ te schrijven) komt men gemakkelijk tot de in den tekst aangegeven uitdrukking.

Men overtuige er zich weer van dat het algebraïsche teeken hier goed is, als men onder ϑ den hoek verstaat dien het met den stroom i aequivalente magnetische moment met de magnetische kracht $\mathbf{H}$ maakt.

QUELQUES RECHERCHES À PROPOS DU NETTOYAGE DES TABLEAUX DE FRANS HALS À HARLEM.

par

G. VAN DER SLEEN.

INTRODUCTION.

En 1919 M. D. de Wild, de La Haye, enleva au moyen d'alcool contenant un peu de xylène, les épaisses couches de vernis, devenues jaunes et opaques, qui recouvraient le tableau des Régents de l'hôpital Ste Elisabeth, peint par Frans Hals en 1641. Beaucoup de personnes, habituées à l'ancien aspect jaunâtre du tableau, ne se déclarèrent pas satisfaits du nouvel aspect de la toile. Quelques-unes même allèrent jusqu'à prétendre que la peinture avait souffert et on fit entendre à mots couverts qu'on supposait que non seulement le vernis avait été enlevé, mais même la couleur et notamment un glacis appliqué par Frans Hals.

Lors du nettoyage d'un second tableau, „Banquet des officiers des Archers de St. Georges," peint par Hals en 1616, on décida d'envoyer les tampons d'ouate, qui avaient servi à l'opération, à M. le Dr. G. van der Sleen, chimiste à Harlem, pour en faire l'analyse. Son examen, dont les resultats seront communiqués ci-dessous, prouva qu'on n'enleva rien de la couleur et que l'aspect jaunâtre des tableaux de Frans Hals à Harlem est dû aux vieilles couches de vernis, devenues ternes, qui ne protègent plus la peinture, ne laissent plus ressortir les couleurs, et donnent au tableau une fausse apparence, parce que le blanc, le bleu et le violet se présentent, à travers les couches, comme du jaune, du vert et du brun.

Les adversaires de la méthode de nettoyage suivie s'en reféraient toujours à un ouvrage bien connu de MAX VON PETTENKOFER, „Über Oelfarbe", qui était considéré autrefois comme un évangile, mais dont la pratique révéla les erreurs. Les assertions qu'au musée Frans Hals on avait reconnues commes fausses par expérience, M. VAN DER SLEEN en démontra l'inexactitude par voie chimique.

Ces recherches, qui seront décrites ci-dessous, contribueront, j'espère, à faire disparaître beaucoup d'idées fausses et de préjugés.

G. D. GRATAMA,
Directeur du musée Frans Hals de Harlem.

I.

Recherches relatives au nettoyage du „Banquet des Officiers des Archers de St. Georges," peint par Frans Hals en 1616.

Les communications qui vont suivre sont la réponse à la question, posée par le directeur du musée Frans Hals, si un examen chimique pourrait décider si dans le nettoyage, tel qu'il fut effectué à Harlem, des constituants de la *couleur* avaient été enlevés. Le grand changement que l'opération avait apporté au tableau avait notamment éveillé chez beaucoup de personnes la crainte que l'œuvre originale ne fût pas restée intacte. Or, si en enlevant la couche de vernis on avait enlevé aussi une partie de la peinture, on devait pouvoir retrouver des traces de cette dernière, et particulièrement des constituants colorants, dans les tampons d'ouate imbibés d'alcool et de xylène, qui avaient servi à dissoudre et balayer la couche de vernis.

Un grand nombre de ces tampons furent exprimés et l'on obtint ainsi 50,7 gr. d'un liquide trouble, qui, en reposant, se sépara en trois couches:

1°. au-dessus un liquide clair A, de couleur jaune clair;

2°. une couche inférieure B également claire, mais jaune brunâtre;

3°. une couche intermédiaire, flottant entre les deux liquides, mousseuse et d'une couleur sale.

Après qu'on eut enlevé autant que possible les liquides clairs au moyen d'un fin siphon, la couche mousseuse restante fut transportée, avec ce qui restait des liquides A et B, dans deux

tubes de centrifugeur et soumise pendant un certain temps à la centrifugation au moyen d'un centrifugeur électrique. Les saletés s'accumulèrent au fond du tube et les liquides clairs se séparèrent au-dessus. Ceux-ci furent de nouveau décantés autant que possible et la crasse restante lavée à plusieurs reprises à la térébenthine, puis à l'alcool, puis encore à la térébenthine et à l'alcool, à l'acétone, à l'eau et enfin au chloroforme. A chaque lavage on centrifugea jusqu'à ce que le liquide fut devenu clair, après quoi ce liquide fut enlevé.

Liquide A. Ce liquide surnageant, de couleur jaune clair, dont on recueillit 13,4 gr., avait un poids spécifique de 0,956 et laissa, après évaporation, un résidu sec de 23,9 %; en tout donc 3,20 gr. de vernis sec.

Liquide B. La couche inférieure brunâtre, dont on obtint 29,2 gr., avait un poids spécifique de 1,0002, laissa après évaporation 43,8 %, soit 12,72 gr. de vernis sec.

On recueillit donc de A	13,4 gr. contenant	3,20 gr. de vernis sec				
„ B	29,2 „	„	12,79	„	„	„
En tout	42,6 „	„	15,99	„	„	„

Le contenu total du flacon pesait 50,7 gr., de sorte qu'il y avait dans le flacon une quantité de vernis sec de 50,70: 42,6 × 15,99 = 19 gr. environ.

La raison pour laquelle la solution de vernis s'est séparée en deux couches, toutes deux imparfaitement miscibles au xylène et à l'alcool, est de nature physico-chimique assez compliquée et n'a pas d'importance pour ce qui va suivre.

Au moyen des deux liquides on obtint, sur des plaques de verre, des couches de vernis d'épaisseur déterminée; celle donnée par le liquide A était vitreuse et à peu près incolore, de sorte qu'on peut admettre qu'elle n'avait pas eu d'influence sensible sur le tableau. Mais il en est autrement du liquide B, dont la quantité était beaucoup plus grande (12,79 gr. de matière sèche contre 3,20 gr. de A).

Pour examiner l'influence de ce vernis sur les couleurs d'un tableau, on fit sécher sur une plaque de verre une quantité de vernis telle, qu'il se forma une couche ayant à près l'épaisseur de la couche de vernis recouvrant primitivement le tableau de Hals (0,3 mm. à peu près). Or, si l'on examine cette plaque au spectroscope, on constate que son influence sur les couleurs est loin d'être faible.

Le *rouge* n'est pas modifié sensiblement et pour le *jaune* non plus on ne remarque rien de particulier. Dans le *vert* l'effet est douteux; il semble qu'une partie en est absortbée, mais, à mesure que l'on s'approche de la raie spectrale F, donc de la limite entre le vert et le bleu, l'absorption devient notable et de plus en plus forte. Le vert-bleu est absorbé *partiellement* et le bleu spectral pur l'est *en grande partie*; quant au bleu-violet et au violet ils ont *complètement* disparu. Il est clair qu'un pareil filtre, placé devant un tableau, doit en modifier à fond le coloris. Non seulement il se fait que des couleurs les unes ne sont *pas du tout* absorbées par la couche superposée, alors que d'autres le sont en partie ou même totalement, mais, comme un peintre ne se sert jamais de couleurs pures du spectre, on peut dire que pratiquement il n'y a aucune couleur qui ne soit modifiée. Il se peut que quantitativement le rouge ne soit pas notablement absorbé, mais il suffit qu'il contienne un peu de violet, pour que celui-ci soit retenu, et alors la *teinte* ne peut pas rester la même.

Le changement est évidemment très fort pour le blanc, qui lui-même n'est pas une couleur spectrale.

L'influence de la couche de vernis jaune est rendue plus grande encore par le fait qu'on regarde un tableau à lumière réfléchie, de sorte que la lumière incidente doit traverser le filtre deux fois avant d'atteindre l'oeil.

Il est clair que le peintre n'a jamais contemplé son œuvre dans cet état. Au moment où elle fut peinte, le vernis-filtre ne s'y trouvait pas encore et le maître ne se sera sans doute pas creusé la tête pour résoudre la question de savoir quelles couleurs il devait employer pour obtenir l'effet désiré à travers une couche de vernis jaune de 0,3 mm. d'épaisseur.

Il résulte de ce qui précède que la question, qui est à la base de cet examen, celle de savoir si dans la masse qui fut enlevée lors du nettoyage du tableau il se trouvait des matières *colorantes*, n'a qu'une importance secondaire. Car il était prouvé que l'enlèvement de la couche de *vernis* avait eu une très grande influence, tellement grande que vis à vis de celle-là la disparition possible d'un peu de la couleur n'importait guère. L'examen fut néanmoins poursuivi comme il avait été projeté et la crasse enlevée fut soumise à l'action de divers solvants pour en extraire le ciment (l'huile etc.) Cela n'était pas facile,

car le vernis contenait des grains difficilement solubles ou des particules de résine, qui ne pouvaient être enlevées que peu à peu par les divers réactifs. Quand enfin plus rien ne passa en solution, le résidu, dans lequel devaient se trouver toutes les particules colorantes, fut séché et pesé.

De 19,0 gr. de vernis sec il resta en tout 40,8 mgr. de poussière + crasse + particules insolubles.

Cette quantité est bien faible. Si l'on admet que les solutions de vernis usuelles contiennent 25 °/₀ de substance sèche (je trouvai 10 à 35 °/₀), les 40,8 mgr. de particules insolubles se trouveraient dans 76 gr. de vernis, dont elles constitueraient les 0,053 °/₀, ce qui n'a certainement rien d'anormal.

Lors du dernier lavage au chloroforme tout le résidu restait à la surface et, comme les matières colorantes usurelles tombent toutes au fond, on peut dire qu'on *ne trouva pas trace de matière colorante.*

Pour en être tout à fait certain on fit encore les épreuves suivantes:

Une petite quantité du résidu fut triturée dans un mortier en agate avec un quantité de vernis au mastic telle que la masse ainsi obtenue contint autant d'impuretés que le vernis du tableau. Cette opération réussit assez bien: une plaque de verre, sur laquelle le vernis fut étalé en couche, portait 2 mgr. de la crasse, alors que d'après le calcul elle aurait dû en porter 1,6 mgr. Or, *on n'en voit rien.* Il n'y a donc aucun inconvénient à enlever cette crasse, avec un peu de la couleur peut-être.

Finalement le reste de la crasse fut brûlé; on observa un moment une flamme; la teneur en cendres était exactement de 50 °/₀. Ces observations sont normales, quand il s'agit de poussières; les matières constitutives des couleurs, en effet, ne brûlent pas. Dailleurs, les cendres contenaient un peu de fer, comme c'est toujours le cas pour la cendre de poussières.

Les conclusions de cet examen peuvent être résumées comme suit:

1. Lors du nettoyage du tableau de Frans Hals on a enlevé une couche de vernis jaune, qui, par son pouvoir absorbant, modifiait considérablement le coloris.

2. La quantité de crasse, y-compris de la poussière et des impuretés du vernis, était si faible que les éléments colorants qu'elle aurait pu contenir se réduisaient à rien.

3. La quantité de crasse, poussière etc., y-compris les traces possibles d'éléments colorants, était tellement faible que, mélangée dans le rapport primitif à un vernis incolore, elle était tout à fait invisible.

4. On ne découvrit pas trace de constituants des couleurs.

Une étude plus détaillée des tampons d'ouate exprimés ne pouvait que confirmer les résultats ci-dessus.

On reconnut dans cette étude qu'il était désirable d'approfondir un peu, au point de vue chimique, les questions qui s'y présentent. Dans les milieux où l'on s'occupe de peinture, on cite encore souvent l'ouvrage de PETTENKOFER, bien que les recherches de cet auteur datent déjà de si longtemps (1860—1870) qu'il n'est pas sans utilité d'examiner jusqu'à quel point les idées qu'il exprime doivent être modifiées d'après les recherches plus récentes.

Nous examinerons en premier lieu s'il est *possible* de dissoudre le ciment de vieilles couches de peinture. Ce ciment, l'huile de lin „séchée," fut appelé „linoxyne" par MULDER. Ceci nous met en plein dans la lutte, enragée peut-on dire, de MAX VON PETTENKOFER, professeur d'hygiène à Munich (mort en 1901) contre les restaurateurs de tableaux en général, mais en particulier contre ceux qui avaient donné des préceptes qu'il considérait comme pernicieux.

PETTENKOFER, en effet, envisageait la question du côté scientifique, alors que l'empirisme avait, jusque-là, régné en maître. Cela l'amena sur le terrain de son contemporain GERRIT JAN MULDER, professeur de chemie à Utrecht (1841—1868, mort en 1880), qui, dans sa „Chimie der austrocknenden Oele," publiée en 1867 à Berlin, chez JULIUS SPRINGER, rassembla et critiqua le peu que l'on connaissait à cette époque de cette question et entreprit des recherches personnelles qui le firent considérer comme le fondateur de la chimie de l'art de la peinture.

Je n'ai pas pu me procurer l'original de cet ouvrage de MULDER, mais j'en possède l'édition hollandaise, publiée en 1864 chez H. A. KRAMERS, à Rotterdam, sous le titre: „de Scheikunde der droogende oliën," comme première partie du tome IV de ses „Scheikundige Onderzoekingen en Verhandelingen".

Solubilité de la linoxyne. A ce sujet Mulder dit (je traduis):

Linoxyne (p. 120): „Elle est plus dense que l'eau, amorphe, élastique, insoluble dans l'eau, l'alcool ou l'éther, gonfle fortement

dans le chloroforme et le sulfure de carbone. L'ammoniaque dissout la linoxyne, après une longue digestion, en se colorant en rouge, et l'acide chlorhydrique précipite de cette solution une matière floconneuse. Un des meilleurs solvants de la linoxyne est un mélange d'alcool et de chloroforme; quand on la fait digérer dans ce liquide, elle commence par gonfler fortement et puis elle se dissout. L'huile de térébenthine la rend fort gélatineuse, mais n'en dissout que fort peu".

L'assertion, que la linoxyne est soluble dans un mélange d'alcool et de chloroforme, est inexacte; cela n'est vrai que pour la linoxyne encore jeune, dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

On à cherché pendant longtemps un solvant approprié, qui rendrait sans doute possibles de nombreuses applications nouvelles. Des brevets ont été pris par quelques chercheurs, qui croyaient avoir réussi, mais, à ma connaissance, l'application pratique s'est vainement fait attendre. Je citerai ici *l'alcool amylique*, le constituant principal des huiles empyreumatiques, des fabriques d'alcool. Le brevet mentionne, que la linoxyne commence par s'y gonfler et qu'elle s'y dissout *au bout d'un an environ.* Un autre moyen est *l'acide acétique glacial* (donc l'acide acétique à 100 °/₀). *Bouillie* dans cet acide, la linoxyne se dissout; mais, chose remarquable, après évaporation du solvant, il reste une tout autre substance, qui est soluble dans la térébenthine. Fait-on boullir cette nouvelle solution, la linoxyne se reforme et, comme elle n'est pas soluble dans la térébenthine, elle se sépare à l'état solide.

Quand il s'agit de faire l'analyse chimique de linoléum (un mélange de linoxyne, de résine, d'huile de ricin et de poudre de liège), la meilleure méthode consiste à mettre dans un tube en verre la substance pulvérisée et mélangée à du benzène, puis *à sceller le tube et à le chauffer pendant une heure à 150° C.* Comme le benzène bout à 80°, il se développe dans le tube une pression considérable, qui peut donner lieu à une explosion, si le tube vient à éclater. L'expérience n'est donc pas sans danger et se fait dans un „four à bombes". Mais il paraît que même traitée ainsi la linoxyne ne se dissout pas entièrement.

On ne connait donc en ce moment aucun moyen de dissoudre la linoxyne et on n'y arrive donc certainement pas par la méthode

anodine qui servit au nettoyage du tableau de Frans Hals.

Mais, ainsi que Mulder le fit déjà remarquer, la linoxyne ne résiste pas à l'ammoniaque, ni même au savon ni à la soude, et surtout pas à la soude caustique ou la potasse à l'alcool. Mais dans ces cas il ne s'agit pas d'une dissolution: la linoxyne est „saponifiée" et, lorsqu'on décompose au moyen d'un excès d'acide les solutions alcalines ainsi obtenues, il se précipite un mélange d'acides, d'où l'on ne peut pas récupérer la linoxyne.

Il résulte bien de ce qui précède que la linoxyne doit être considérée comme une substance insoluble et, comme le vernis appliqué sur le tableau est soluble, au contraire, il est clair qu'on peut, à toute époque, débarrasser un tableau de sa couche de vernis.

La question est toutefois un peu plus compliquée. M. G. D. Gratama m'a fait parvenir deux petites peintures anciennes, l'une, un morceau d'un panneau, du temps de Frans Hals, résiste à toutes les tentatives faites par en enlever quoi que ce soit au moyen des solvants usuels. L'autre, un fragment d'un plafond peint sur toile, datant d'environ un siècle, se laisse nettoyer complètement au moyen d'un mélange d'alcool et de térébenthine, au point que la toile sous-jacente est mise à nu.

D'ailleurs, on est parvenu à enlever des *retouches* du tableau de Hals de 1616.

Il est tout naturel de songer ici à des différences d'âge. On sait, en effet, que lorsque l'huile est „sèche" au toucher, le processus de la maturation n'est cependant pas du tout terminé, c'est-à-dire qu'il y a encore des parties qui ou bien ne sont pas encore transformées, ou bien sont oxydées à l'état d'un corps qui doit à son tour se transformer en linoxyne.

Pour donner une idée de la complexité du processus qui se déroule dans cette maturation de l'huile, je mentionnerai les recherches de R. H. Sabin [1])

L'huile de lin non bouillie augmente en poids de 16 à 17 °/₀ au bout d'une semaine environ, après quoi son poids diminue, au point qu'après 2 semaines le onzième de l'augmentation est perdu de nouveau, après 4 mois les $^3/_4$, après 8 mois les $^9/_{10}$; alors l'huile est revenue à peu près à son poids primitif.

[1]) Journal of Industrial and Engineering Chemistry, 3, 84—86 (27 déc. 1910).

Pendant tout ce temps, donc aussi pendant l'augmentation de poids, il s'en échappe des substances volatiles.

Il résulte donc de là qu'au bout d'un an un état durable n'est pas encore établi. Et il est possible que nous devions admettre que le processus qui est accompagné d'une *perte* de poids n'est jamais terminé, de sorte qu'au bout d'un temps suffisamment long toute la linoxyne finirait par disparaître (volatilisée ou oxydée).

En tous cas, si le processus de la maturation est de longue durée, nous savons que le moment où l'huile est oxydée au point de n'être plus soluble se présente très tôt; pour de minces couches un espace d'une *semaine* est certainement suffisant, et un mois est à coup sûr une estimation acceptable. Donc, si le vieux panneau, du commencement du 17ᵉ siècle ne se dissolvait *pas*, alors que le plafond âgé d'un siècle environ le faisait, au contraire, cela ne tient *pas* à la différence d'âge. Tout le monde peut s'en assurer en examinant l'ouvrage d'un peintre en bâtiments: un mois après l'application de la peinture, on peut frotter sans danger sur le panneau d'une porte avec des tampons d'ouate imbibés de térébenthine et d'alcool: la couleur ne s'en va pas.

Mais la question de la possibilité d'enlever la couleur n'est pas régie *tout entière* par la solubilité de la linoxyne. Nous admettons que la linoxyne et la couleur constituent un tout organique, à comparer à un mur, dont la couleur remplit le rôle des briques et la linoxyne celui du mortier durci, qui tient le tout ensemble. Pour faire disparaître un tel mur par des forces externes (ici le frottement), il n'est pas nécessaire que le mortier soit dissous, car il en résulterait qu'on pourrait diminuer jusqu'à l'infini la *quantité* de ciment. Or, le ciment de la couleur n'est pas formé uniquement de linoxyne. Mulder donna ce nom au produit qui lui resta lorsqu'il traita de l'huile de lin séchée à l'ether, l'alcool et l'eau, jusqu'à ce que plus rien ne passa en solution. Il y ajoute que lorsqu'on répète assez longtemps l'extraction à l'ether, l'alcool ne trouve plus rien à extraire. La quantité de „substances étrangères" était différente pour diverses huiles, mais nous pouvons bien admettre une valeur de 20 °/₀, valeur qui fut trouvée à peu près par d'autres et qui est également d'accord avec les résultats de mes propres expériences. Cette proportion de substances solubles augmente

encore considérablement, lorsqu'on ajoute à l'huile de lin du vernis, de la résine ou de la cire, et peut aisément s'élever alors au point qu'après dissolution de ces constituants il reste si peu de linoxyne, que le mur prend le caractère d'un amas de pierres qui ne peut plus résister aux forces extérieures.

Telle est bien la raison pour laquelle le morceau de plafond centenaire ne résista pas au procédé de nettoyage: il était peint plutôt au vernis qu'à l'huile.

Il est donc bien prouvé par là que *lorsqu'on s'est servi pour peindre d'huile de lin pure*, l'enlèvement de la couche de vernis appliquée dans la suite peut avoir lieu sans le moindre danger. S'il est possible d'enlever aussi de cette manière des retouches, c'est que la nouvelle peinture n'adhère pas à l'ancienne. Généralement la couche de vernis n'est pas enlevée d'une manière si parfaite qu'il n'en reste plus une couche d'épaisseur microscopique; mais, même s'il n'en était pas ainsi, les restaurateurs ne sont pas à ce point des vandales (on les en accuse parfois) qu'ils useraient ou brûleraient la couche sous-jacente pour réaliser une véritable union avec les couches à appliquer. Il est donc, en général, impossible de ne pas enlever les retouches *en même temps* que la mince couche de vernis qui se trouve au-dessous.

II.

Sur les causes de l'altération des peintures à l'huile.

On sait depuis longtemps que la peinture à l'huile ne dure pas éternellement. C'est encore MULDER, le fervent admirateur du „grand art", qui fut le premier à donner une explication scientifique de l'altération des tableaux.

Il écrit, à la p. 293: „Les frères VAN EYCK, HUBERT et JEAN, les maitres éminents de l'Ecole néerlandaise, se servirent, au 14e siècle, d'huile pour la peinture et créèrent ainsi une nouvelle époque dans l'art, donnèrent à celui-ci une extension et un développement inconnus et lui fournirent des moyens non suspectés avant eux."

Puis, plus loin: „Quant à la durabilité des ouvrages de l'art: le procédé d'incrustation des couleurs à l'eau par le feu, en usage avant qu'on eut connaissance de l'emploi d'huile par les frères VAN EYCK, était un moyen de rendre la peinture plus durable, mais il lui enlevait beaucoup de ce que l'artiste y avait

mis comme coloris et comme ton. Quant au procédé qui consistait à recouvrir les aquarelles d'une couche de cire, pour les garantir un peu contre les dommages que pouvaient y apporter le contact des doigts et les poussières de l'air ou les protéger contre les injures du temps, il était tout aussi pitoyable dans ses effets qu'il l'était dans son essence.

Les peintures à fresque ont toujours eu et auront toujours une valeur propre: ce sont des œuvres grandioses, frappantes et impressionnantes à distance, et durables. Mais c'est un genre spécial, excellent à certains endroits et pour certains buts. Enlevez à l'art la possibilité de déplacer ses produits, la possibilité de les amener près de vous, de sorte que vous êtes obligé d'aller les voir où ils sont, et vous lui enlevez l'amour qui offre et qui n'exige pas qu'on cherche où il est pour le trouver.

On est unanime à le déclarer: „les couleurs à l'huile ont donné à l'art un relief inconnu auparavant et l'ont animé d'une nouvelle vie, qui ne fut pas surpassée dans la suite."

Les citations précédentes montrent bien combien MULDER s'intéressait à son sujet: „la chimie des huiles siccatives." C'est à lui que l'on doit les premières recherches sérieuses sur les réactions qui ont lieu dans le processus du séchage et sur l'augmentation de poids considérable que l'huile de lin subit pendant ce processus; mais il apprit aussi que la quantité de matière qui s'y perd est plus grande encore: „Les huiles qui durcissent sont comme le sang: elles absorbent de l'oxygène et rendent de l'acide carbonique."

Et pas seulement de *l'acide carbonique*, mais encore de *l'eau*, et MULDER a même fait de longues expériences pour établir quelles sont les autres substances qui sont mises en liberté: acide formique, acide acetique, acide acrylique etc.

L'endroit ne serait pas bien choisi pour entrer dans des détails concernant ces expériences, ou les nombreuses recherches d'autres auteurs qui, disposant de moyens plus parfaits et de méthodes plus précises, perfectionnèrent les résultats de MULDER. Il y a toute une série de chercheurs qui s'en occupèrent: LIVACHE, WEGER, LIPPERT, BORRIES et, ne l'oublions pas, W. FAHRION.

Sous le même titre que MULDER: „Die Chemie der trocknenden Oele" et chez le même éditeur (JULIUS SPRINGER à Berlin). FAHRION a publié en 1911 un ouvrage où il a rassemblé tout ce qu'on savait à ce moment à ce sujet, et tous les ans on

trouve dans le „Zeitschrift für angewandte Chemie" un aperçu, écrit de sa main, de tout ce qu'on a encore appris à ce sujet dans le cours de l'année précédente.

Chose bien remarquable, cet excellent connaisseur de notre sujet ne consacre pas plus de trois lignes, peu importantes, au travail de PETTENKOFER, et ce qu'il en dit est même dit mal à propos.

Une mention toute spéciale doit être faite ici des recherches de A. GENTHE [1]), faites au laboratoire du prof. WILHELM OSTWALD à Leipzig [2]). Les expériences de GENTHE constituent un digne complément des recherches de MULDER et donnent un aperçu intéressant des progrès de la technique. Alors que MULDER obtint ses résultats par des moyens défectueux et des pesées laborieuses, dans lesquelles il tenait compte de toute espèce de circonstances accessoires, au laboratoire d'OSTWALD, 50 ans après, on avait disposé une quarantaine de flacons, reliés à des manomètres (remplis de paraffine), et tout ce qu'on avait à faire, c'était de faire la lecture de ces manomètres deux fois par jour, le matin à 9 heures et le soir à 6 heures, pour pouvoir suivre par le calcul toute la marche du processus du séchage. Une épreuve „à blanc," disposée à côté, devait servir à apporter les corrections nécessaires pour les variations accidentelles de la pression barométrique, de la température etc. Les flacons pouvaient être remplis d'air, ou d'oxygène, ou de tout autre gaz; un fil d'aluminium portait un sachet en papier buvard, imprégné d'une quantité d'huile exactement connue et, à mesure que l'huile séchait, l'oxygène de l'air était consommé et la quantité consommée était mesurée par la diminution de pression qui en résultait dans

[1]) *Zeitschr. f. angew. Chem.*, **21**, 2087, 1906.

[2]) WILHELM OSWALD est, sans contredit, le chimiste qui s'intéresse le plus à l'art de la peinture et qui a le plus approfondi ses problèmes. Savant renommé, prix Nobel, il est en même temps peintre amateur et en outre un excellent styliste, pour lequel le talent d'écrire est en quelque sorte devenu une seconde nature. Aussi le nombre de ses publications sur ce sujet est-il étonnant, et l'on peut dire qu'il en est un peu la dupe, car peu de gens ont la patience de les lire et de les étudier toutes. J'ai compté aus moins 16 publications sur sa théorie des couleurs dans les années 1915—1919.

Les „Malerbriefe" (Leipzig 1904) contiennent de nombreuses remarques intéressantes pour les peintres; il y consacre quelques paroles élogieuses à PETTENKOFER, mais on voit qu'il n'a pas fait une étude spéciale de cette partie de son sujet.

l'espace fermé du flacon. Il est évident que de pareilles expériences élégantes fournissent des résultats fort dignes de confiance et se prêtent à des variations à l'infini et au contrôle de changements très importants par eux-mêmes.

Auprès d'observations aussi subtiles les essais de MULDER paraissent bien grossiers; néanmoins ces derniers ont une importance pratique infiniment plus grande, parce que GENTHE poursuivait un but plutôt théorique et s'écartait un peu trop de la pratique. La tentation est grande d'insister un peu sur ces épreuves, mais, pour ne pas m'en occuper trop longuement, je mentionnerai encore simplement que ces recherches démontrèrent d'une façon éclatante la grande influence que la *lumière* exerce sur le séchage: dans une représentation graphique on obtenait à plusieurs reprises une ligne brisée: une montée rapide pendant le jour, exprimant un séchage rapide, le soir une ligne plus plate, qui, au matin suivant, reprenait son allure abrupte.

Très importante aussi est sa „Verbrennungscurve" (courbe de combustion); bien longtemps après la fin du processus de séchage proprement dit l'absorption d'oxygène continue encore: même au bout de 90 jours il se produisait encore une lente „combustion."

GENTHE est d'ailleurs le seul qui ait fait le „bilan" du séchage et prouva que la quantité d'huile + oxygène est égale au poids de la linoxyne + eau + acide carbonique + etc. Il trouva en moyenne:

Quantité d'oxygène absorbée dans l'obscurité à température ordinaire: 23 %

„ de substances volatiles perdues: 15 %

Au sujet de l'altération des peintures à l'huile MULDER s'exprime comme suit (p. 322): „On devra, en effet, chercher longtemps avant de trouver un véhicule mieux approprié que l'huile à l'art de la peinture. Il a cependant ses défauts: il est durable, mais pas assez. Comme toutes les substances organiques, l'huile bouillie finit par disparaître, et, avant cette disparition, aussi inévitable que celle des rochers qui s'élèvent au-dessus de la surface de la terre, on remarque des phénomènes de décompositon partielle, qui déprécient déjà la valeur du chef d'oeuvre.

La première chose que l'on voit est l'apparition d'une substance brune, un objet brun. Au bout de peu de mois cet objet se developpe déjà et, malgré qu'on se soit servi d'huile tout à fait incolore, telle qu'on l'obtient en l'exposant à la lumière,

cette huile brunit et l'on ne connaît jusqu'ici aucun moyen pour empêcher la formation de cette matière brune, si ce n'est l'action directe du soleil, qui peut être fatale pour le tableau; le remède peut être pire que le mal.

L'air, rendu actif par la chaleur et surtout par la lumière, durcit l'huile en voie de sécher; mais, lorsque l'huile est devenue séche, l'air actif agit en ennemi. Pour diminuer cette influence on recouvre le tableau d'une couche de vernis, une résine dissoute dans un liquide volatil. Le liquide s'évapore et il reste la couche de résine qui empêche en grande partie l'air d'atteindre la couche de peinture.

Ce vernis rend d'ailleurs transparentes les minces couches de matière blanche (de linoxyne surtout) qui ont été créees par oxydation de l'huile et recouvrent les molécules de matière colorante, ce qu'on appelle „inschieten" (peinture embue), de sorte que les particules colorantes se présentent à peu près comme elles sont; *à peu près*, pas tout à fait, car avec le vernis on n'obtient pas une transparence complète de la linoxyne.

Ainsi préparé, le tableau est abandonné au temps. Un panneau le protège suffisamment par derrière et le vernis le recouvre à peu près par devant. Une toile placée derrière ne protège pas suffisamment: là une épaisse couche de couleur, comme fond, est le moyen de tenir l'oxygène éloigné de la couche de peinture proprement dite. Mais une séparation complète de l'air est impossible, et voilà pourquoi une lente altération et une déchéance finale sont inévitables.

C'est sans aucum doute l'acide élaïque, existant dans toute huile qui sèche, qui sera attaqué le premier et transformé en acides gras volatils. Par là la couche de couleur doit devenir plus dure. Les acides palmitique et myristique de l'huile de lin seront oxydés plus lentement, mais ils le seront aussi. Alors la couleur doit devenir plus dure encore et se gâter."

W. Fahrion [1]) pense que la linoxyne, contient encore, quoique masqué, de l'oxygène actif et porte ainsi en soi le germe de destruction. „Les groupements de peroxyde," dit-il, „se transposent spontanément, bien que très lentement, en groupements de cétoxyde, et les groupements hydroxyle qui prennent ainsi naissance donnent lieu à une séparation d'eau, qui entraîne

[1]) *Zeitschr. f. angew. Chem.* **23**, 726, 1910.

une diminution de volume et par suite la formation de crevasses." Cela veut donc dire que la linoxyne n'est pas une combinaison stable. Elle se transforme peu à peu en une autre combinaison, ayant la même composition élémentaire, et cette nouvelle combinaison est constituée de telle sorte qu'elle abandonne aisément de l'eau.

La théorie de FAHRION signifie donc ni plus ni moins que le crevassement et la ruine des peintures à l'huile ne sont pas la conséquence d'influences externes, de nature chimique, physique, ou mécanique, *mais d'actions qui se font sentir dans la structure même du ciment et sont donc inévitables*, *inéluctables et dont les effets sont en outre irréparables.*

Que réellement la linoxyne est capable de subir une pareille transformation, MULDER l'avait déjà trouvé et exprimé en admettant la formation d'acides linoxyques „blanc" et „rouge"; mais dans l'état où se trouvait la science chimique à cette époque, il n'était évidemment pas en état de résoudre le problème.

En 1909 parut un travail développé de TÄUBER: Über Risse in der Bildschicht von Ölgemälden" [1]; les crevasses dont il est question dans ce travail ne sont toutefois pas le phénomène qui se présente à la longue dans toutes les peintures à l'huile, mais les fissures qui se produisent bientôt dans des retouches, tout en laissant intactes la peinture sous-jacente; il s'agit donc d'un phénomène où seules les jeunes couches, appliquées sur les anciennes, se fendillent rapidement. Les expériences sont particulièrement étendues: TÄUBER opéra sur 42 espèces de couleurs, en recouvrit de grandes surfaces et partagea chacune de celles-ci en 42 plages plus petites, qui furent recouvertes chacune d'une des 42 couleurs employées; et cela en trois parties: la première dès que la couleur sous-jacente était sèche au toucher, la seconde 6 semaines après, la troisième encore 3 mois plus tard.

C'étaient donc un grand nombre d'observations; malheureusement, TÄUBER ne put en déduire aucune règle fixe. Les premières expériences furent faites avec de l'huile de pavot; lorsque le fond avait été peint à l'oxyde de zinc, 30 des 42 couches appliquées sur ce fond se crevassèrent, et même 37 dans le cas où le fond avait été peint au minium, 26 dans le cas de

[1]) *Chem. Ztg.* 33, 85 et 94, 1909.

la céruse, aucune dans le cas du bleu de Prusse[1]). Par contre, quand la couche appliquée était de l'oxyde de zinc, cette couche se crevassait sur 34 fonds, le minium ne se crevassait sur aucun, la céruse sur 2, le bleu de Prusse sur 4.

TÄUBER fit plus tard des épreuves comparatives entre de l'huile de pavot, de l'huile de noix et de l'huile de lin, avec ce résultat que des 400 champs recouverts d'huile de pavot 83 étaient crevassés, de ceux recouverts d'huile de noix 65 et d'huile de lin 5 seulement.

Comme cause du crevassement il donne: des *courants électriques*. Il admet „que par des actions mutuelles de certains pigments dans les conditions réalisées, c'est-à-dire quand l'huile de la couche inférieure n'est pas encore complètement oxydée, il se produit des courants électriques qui donnent lieu, dans la couche encore molle superposée, à des tensions et par suite des à mouvements qui en résultent. Avec cela s'accorde le fait, que dans plusieurs cas le crevassement de la couche supérieure se produit déjà lorsqu'elle est encore tout à fait molle et plastique."

Un bien maigre résultat pour des épreuves aussi nombreuses. En premier lieu, nous ne pouvons pas nous représenter que des courants électriques peuvent prendre naissance dans un milieu composé exclusivement de non électrolytes, de non conducteurs et de substances insolubles. Et en second lieu nous ne pouvons pas nous représenter comment, s'il existe des courants électriques, ceux-ci peuvent déterminer des crevasses dans des couches de peinture qui sont encore tout à fait molles. En troisième lieu, cette production de crevasses dans de la couleur humide est quelque chose de remarquable, de sorte que nous nous trouvons ici plutôt devant une nouvelle énigme que devant la solution de l'ancienne.

L'hypothèse des courants électriques est encore développée par la communication qu'une même couche de blanc de zinc dans de l'huile de pavot séchait sur du cuivre en 9 jours, sur du laiton en 18 jours, sur de la porcelaine en 6 mois, sur du zinc en un an seulement.

Cela ressemble donc aux expériences de LIVACHE[2]), qui, le premier après MULDER, reprit, en 1883, les expériences sur le

[1]) On trouve des tableaux détaillés dans le Jahresbericht 1906/1907 der Hochschule für die bildende Künste in Berlin.

[2]) *Comptes rendus*, **96**, 260, 1883.

séchage de l'huile de lin. Il se servit à cet effet de poudre de *plomb*, dont il avait reconnu qu'elle accélère fortement le séchage. LIPPERT constata la même chose pour la poudre de *cuivre*, tandis que, selon BORIUS, la poudre de zinc est inactive. Nous trouvons donc ici le même phénomène, sans qu'il ait été fait usage de blanc de zinc, donc sans qu'il se soit produit des courants électriques, mais simplement par suite de la même action catalytique que celle qu'exerce aussi le siccatif sur le séchage de l'huile de lin.

En 1894 WALTER F. REID[1]) publia des recherches sur les produits d'oxydation de l'huile de lin; elles méritent d'être mentionnées. Cet auteur en arrive à conclure que la linoxyne n'est pas le produit final de l'oxydation, mais qu'elle se transforme à son tour en un liquide très épais et gluant, qu'il appelle de l'huile de lin „peroxydée." Il montra un morceau de linoxyne qui avait, avant 15 ans, un aspect tout à fait normal, mais était maintenant „une masse extrêmement visqueuse, mi-fluide, de couleur beaucoup plus foncée que l'huile oxydée dont elle dérivait." REID rapporte en outre qu'il a examiné de vieux imprimés, qui présentent les bords brunâtres bien connus autour des lettres et au revers de gravures un peu sombres. De papier ainsi taché il put extraire une substance qui était identique à la linoxyne devenue fluide, démontrée ici.

Ces observations sont excessivement importantes et, si elles étaient confirmées, elles renverseraient certainement toute la théorie. Je dois toutefois faire remarquer que ce que l'auteur avance encore en faveur de sa manière de voir, je n'ai jamais pu l'observer. C'est ainsi que je n'ai jamais eu connaissance du fait „que la surface oxydée d'huile de lin pure, exposée à l'air, devient, au bout de deux ans à peu près, gluante (sticky) et un peu molle; qu'au bout de trois ans environ, lorsque la surface est placée verticalement, une partie de la masse descend comme une matière semi-liquide; qu'au bout de 5 ans environ une couche d'huile oxydée, épaisse d'à peu près 1 cm., est devenue tout à fait un liquide épais.

Là où REID cite PETTENKOFER il l'a manifestement mal lu. PETTENKOFER n'a jamais prétendu qu'il pouvait régénérer la linoxyne par des vapeurs d'acool froides; c'est tout le contraire

[1]) *Journ. of Soc. of Chem. Ind.* 13, 1020, 1894.

qu'il dit. C'est donc un non-sens que de vouloir donner une explication de cette action — qui n'existe pas — en faisant remarquer que la linoxyne n'est pas soluble dans l'alcool „alors que le produit de l'oxydation subséquente est presque complètement soluble dans ce solvant."

Les autres conclusions ne doivent donc être acceptées qu'avec la plus grande prudence, bien qu'il y en ait une qui soit séduisante. On sait notamment que la peinture exposée à la pluie s'altère beaucoup plus rapidement que celle qui est exposée à l'air libre, mais ne vient pas en contact avec de l'eau liquide. REID explique ce fait en observant que son huile de lin peroxydée est très notablement soluble dans l'eau [1]).

D'ailleurs, les milliers d'observations, apprenant que de l'huile de lin vieille ne devient *pas* semi-liquide et gluante, mais, au contraire, dure et cassante, contrebalancent, et bien au-delà, cette unique observation de REID, qui vit la linoxyne devenir liquide, et ce sera bien là la raison pour laquelle, dans les 25 années écoulées depuis, je n'ai plus rien entendu à ce sujet, ni de REID ni d'un autre. La théorie n'est *pas* renversée et l'huile de lin n'est pas „damned" comme base des couleurs, vernis ou linoléum, ainsi que REID l'avait prédit.

Il résulte donc des citations faites que l'étude de la bibliographie ne donne, au sujet des causes du fendillement des tableaux, d'autre résultat que celui-ci, que le phénomène est plus obscur que jamais.

Considérations de chimie colloïdale.

La linoxyne appartient, sans aucun doute, aux mélanges colloïdaux et, effectivement, il est possible de réunir à ce point de vue général une grande partie des propriétés et des phénomènes, ce qui rend le tout plus clair et plus compréhensible.

Le nom de colloïde (colla = colle) vient de GRAHAM, mort en 1868; MULDER et PETTENKOFER le connaissaient donc, mais l'étude des phénomènes colloïdaux ne fut réellement entreprise qu'au début de ce siècle et elle constitue actuellement un centre d'intérêt général.

[1]) MULDER avait déjà trouvé que de l'huile de lin sèche contient une proportion très notable de substances solubles dans l'eau, et que la plupart des autres constituants ne sont pas à ce point insolubles qu'ils ne pourraient pas être lavés à la longue par la pluie.

La colle est une substance bien singulière. Lorsqu'on dissout dans l'eau chaude une petite quantité de gelatine (colle purifiée), on obtient, après refroidissement, une substance semi-solide, une gelée, même quand la teneur n'est que de 1 °/₀. Une solution de colle ordinaire de menuisier dans l'eau chaude est un liquide très épais; plus la température est basse, plus il coule lentement, et il est impossible de dire quand l'état „liquide" finit et l'état „solide" commence. Un baril d'asphalte de l'île de la Trinité est tellement dur qu'on peut se placer dessus et qu'il est très difficile d'y enfoncer un clou. Et cependant, lorsqu'on y dépose le clou, celui-ci s'y enfonce lentement: cela durera peut-être des mois, mais il finira par atteindre le fond. L'asphalte se referme lentement au-dessus de lui comme si rien n'était arrivé.

Cette „fluidité" de substances cependant solides se retrouve dans presque tous les mélanges colloïdaux solides. C'est ainsi qu'un tube de verre droit, qu'on a placé obliquement contre un mur, est courbé quand on le reprend au bout d'un an; un tube en plomb, retenu par des crochets contre un mur ou une poutre, prend au bout de quelque temps la forme d'une guirlande, par suite d'une flexion „fluide" entre ses points d'appui; c'est ainsi aussi que les masses de glace des glaciers descendent des montagnes comme un fleuve de très grande lenteur.

L'huile de lin aussi montre dans sa viscosité les propriétés d'un mélange colloïde et l'huile de Hollande est tout aussi épaisse que de la mélasse ou de l'huile de ricin.

Ces mélanges colloïdaux sont parfois aussi transparents que le verre, mais tout aussi souvent ils ne le sont pas. Nous ne savons pas, d'ailleurs, ce qu'est la transparence. Notre œil n'observe de la lumière que lorsqu'il est atteint par des vibrations de longueur d'onde déterminée; mais, s'il n'etait sensible qu'à des rayons à longueurs d'ondes plus grandes ou plus petites, nous dirions que le verre est opaque. Une solution de sulfate de cuivre est transparente pour certains rayons, elle ne l'est pas pour d'autres, qui en diffèrent très peu, de sorte que nous appelons „bleue" la lumière qui passe.

Les colloïdes ne sont jamais tout à fait transparents; on le voit nettement au blanc d'œuf; pour d'autres le manque de transparence relatif ne se manifeste que lorsqu'on éclaire *latéralement*, p. ex. par les rayons solaires ou dans l'ultra-microscope. De petites causes suffisent parfois pour augmenter le trouble et rendre le

mélange colloïdal terne: la plupart de ces causes tiennent aux phénomènes de floculation. Ce n'est qu'une question de *finesse*.

Dans le cas des véritables solutions, comme du sel dans l'eau, la transparence est parfaite: là les particules sont très petites: le nombre de ces particules dans un gramme est un nombre de 22 à 23 chiffres. Dans le cas d'un mélange colloïdal-grossier, comme le lait, les particules sont tellement grandes qu'elles sont même observables au microscope: il arrive souvent qu'il n'en entre pas un milliard dans un gramme; ici la transparence est très faible.

Entre ces deux extrêmes il y a un large domaine de mélanges colloïdaux dont l'état de division est de plus en plus fin et la transparence de plus en plus grande, et qui finissent par passer aux solutions proprement dites.

Il est donc clair que les phénomènes de floculation, par lesquels les fines particules s'agglomèrent en amas plus ou moins grands, rendent le mélange colloïdal opaque. La cause de cette floculation est parfois connue et de nature électrique: dans les cas des maladies infectieuses et des sérums prophylactiques ce phénomène est un des plus subtils que nous connaissions: il décide parfois de la vie ou de la mort.

Dans la nature inorganique aussi Bredig a parlé de „poisons", lorsqu'il constata que des traces d'acide cyanhydrique font floculer le mélange en apparence limpide d'eau et d'argent finement divisé, ce que nous appelons une solution colloïdale d'argent, et le rendent noir et opaque.

Que la linoxyne est un pareil mélange colloïdal, il n'est pas nécessaire de le prouver. Mais, comme nous avons affaire ici principalement à un mélange solide, les phénomènes de démixtion et de floculation sont beaucoup plus lents.

Il se produit d'ailleurs une complication par la „contraction" de la linoxyne.

Contraction de la linoxyne.

L'huile de lin se contracte-telle en séchant?

1 litre d'huile de lin pèse environ 929 grammes et en séchant il augmente de poids de 11 à 19 °/₀. Mulder admet 11 °/₀, mais il expérimenta sur des couches trop épaisses. Si nous prenons la moyenne 15 °/₀, le poids après séchage est de 1068 gr.

Le poids spécifique de la linoxyne est assez variable, mais il

résulte des nombreuses déterminations de FELIX FRITZ[1]) qu'on peut bien admettre comme moyenne 1070 environ. Les 1068 gr. de linoxyne occupent donc un volume de 1068: 1070, c. à d. encore un litre à peu près.

Mais nous savons que par le séchage il se produit aussi une perte de poids par „exhalaison" d'acide carbonique et d'eau, et que les siccatifs accélèrent bien l'absorption d'oxygène, mais dans une bien plus faible mesure les réactions qui occasionnent une perte de poids.

C'est ainsi que, pour des huiles qui sèchent rapidement, on peut observer au bout de peu de temps un poids total plus élevé, parce que ces huiles ont déjà par elles-mêmes un poids spécifique plus grand et aussi parce que les poids spécifiques donnés par FRITZ se rapportent à l'huile de lin sèche des fabriques de linoxyne, où la rapidité du séchage est favorisée autant que possible: là il peut arriver que les huiles qui sèchent rapidement commencent par montrer une faible *dilatation*, qui n'atteint toutefois que quelques pourcents au plus et est donc tout à fait négligeable vis à vis de la *contraction* qui suit.

R. H. SABIN[2]) trouva au bout de 8 mois un poids spécifique de 1.098, alors que l'augmentation de poids avait diminué de 2 °/₀. *de sorte qu'il y avait eu une contraction de 14 °/₀*. Il est évident que la contraction ne s'arrête pas là, mais, pour fixer les idées, nous nous en tiendrons à ce nombre de 14 °/₀.

Imaginons un tableau de 1 mètre carré par exemple et laissons de côté les constituants des couleurs: il est clair que cette contraction de 14 °/₀ ne doit pas être trouvée dans une bordure blanche de 14 cm. de largeur sur l'un des côtés, mais qu'elle doit être trouvée exclusivement dans une réduction de l'*épaisseur*.

Si la linoxyne était un corps solide dans le sens ordinaire, p. ex. une plaque de zinc de 1 m^2., il est clair qu'il faudrait exercer d'énormes tensions latérales pour amincir la plaque uniformément de 14 °/₀. Si la linoxyne était un liquide, il se produirait un jeu compliqué des forces moléculaires, mais aucune force ne s'opposerait à une diminution d'épaisseur de 14 °/₀. Seulement, des couches d'épaisseur notable ne peuvent être obtenues que si l'on n'abandonne à aucun moment la position horizontale.

[1]) Chem. Revue, 1911, 1913 et 1914.

[2]) Journ. of Ind. and Engin. Chemistry, 3, 84, 1912.

La linoxyne doit donc présenter à la fois les propriétés d'un solide et d'un liquide, ou plutôt elle doit former une transition entre les deux: assez „solide" pour ne pas couler sous l'influence de la pesanteur lorsque le tableau est en position verticale, assez „liquide" pour „couler" sous l'action due aux forces de traction latérales.

Mais l'huile de lin est généralement mélangée de matières colorantes et cela rend les circonstances encore plus compliquées.

PETTENKOFER rapporte que sur 100 parties de céruse il n'y a que 12 parties d'huile, c. à d. 10,8 °/o ou, en nombre rond, 11 °/o de linoxyne, de sorte que l'on dirait qu'une contraction de 14 °/o n'est pas possible. Mais nous avons affaire non pas à des poids, mais à des volumes, et cela change en grande partie la question. Si l'on admet que le poids spécifique de la céruse est 6,43 et celui de l'huile de lin 0,929, nous trouvons:

100 parties en poids de céruse et 12 parties en poids d'huile
ou 15 „ volume „ 12,05 „ „ volume „

de sorte que la peinture à la céruse contient bien 10,8 °/o d'huile en poids, mais 43,7 °/o en volume.

Pour la terre de Sienne PETTENKOFER donne que 100 parties de cette substance prennent 240 parties d'huile; ici le volume de l'huile atteindra bien 80 °/o.

Aussi longtemps que le tableau est couvert d'une seule espèce de couleur d'épaisseur uniforme, la contraction n'aura d'autre effet que d'aspirer en quelque sorte le ciment, de sorte que les particules de couleur se découvrent plus ou moins à la surface (en hollandais cela s'appelle „inschieten").

Figurons-nous toutefois un ilôt de peinture à la céruse au milieu de terre de Sienne par exemple; alors la plage de céruse, qui durcit rapidement, résistera beaucoup plus aux forces latérales que la peinture ambiante, ce qui fait que de la linoxyne sera soustraite par aspiration *aux environs* et par là la couche environnante *deviendra plus mince* et opposera encore moins de résistance, ce qui favorise encore plus l'inégalité.

Le même raisonnement s'applique encore lorsque les couches ont des épaisseurs différentes: les forces de traction se manifesteront aux points les plus faibles, tout comme un pneu rempli d'air se gonfle en balle lorsque la paroi est rendue plus mince par une extension locale.

Il est clair qu'aussi longtemps que la linoxyne est encore

souple et élastique les extensions et les petits déplacements sont peu visibles à l'œil nu, mais, lorsqu'elle devient plus dure et plus cassante, et que les propriétés d'un corps „solide" se manifestent davantage, il est inévitable qu'il se produise aux endroits qui deviennent de plus en plus faibles une rupture, qui doit occasionner un déplacement et un espace libre, une *fente*. Maintenant le lien avec l'ambiance est rompu ; les forces de traction doivent élargir la fissure de plus en plus.

Phénomènes de ridement.

Il peut arriver que l'huile de lin — c'est surtout le cas pour l'huile de noix — se ride en séchant.

Lorsqu'on laisse sécher dans une cuvette en verre une couche pas trop mince d'huile de lin bouillie, il se forme à la surface des ondulations caractéristiques, qui deviennent de plus en plus prononcées et sont une conséquence des forces de traction latérales dont nous venons de parler. Aux endroits les plus épais l'huile de lin encore molle, en voie de se contracter, attire à soi l'huile déjà sèche, ce qui fait que la pellicule supérieure déjà durcie devient trop ample et forme des plis. En soumettant une pareille cuvette à des vapeurs d'alcool, ce qui rendit la linoxyne encore plus molle, je vis l'huile de lin finir par s'accumuler sous la partie ridée en laissant les parties voisines pratiquement sans huile.

Influence du substratum.

Ce qui précède montre combien est compliqué le système des forces latérales qui agissent ici, et qu'un tableau finirait pas s'embrouiller complètement si *l'adhésion au substratum* ne s'opposait pas à une grande partie de ces forces.

Les phénomènes physiques qui se présentent ici ne sont pas moins subtils que les forces de traction latérales dont nous venons de parler.

Chaque photographe-amateur sait comment il peu glacer du papier à l'albumine, en laissant sécher l'impression sur une plaque de verre „propre." Il suffit d'une trace de „crasse" pour que le papier adhère sans espoir de le détacher. Une goutte d'eau s'étale sur un objet absolument propre en formant une couche excessivement mince : mais, lorsqu'on veut faire l'expérience, on reconnaît qu'il y a bien peu de surfaces „propres."

Ainsi il peut dépendre d'une bagatelle si la couleur adhère

ou ne le fait. On prend généralement un substratum poreux, dans lequel l'huile est plus ou moins absorbée. Au début cette absorption est si forte qu'il n'est pas possible de peindre, par suite de la forte mesure dans laquelle la couleur est mise à nu (embue). On doit commencer par former un *fond* et celui-ci est généralement bien „ancré." Cela donne plus tard au tableau l'aspect d'une toile *repeinte*; les forces latérales sont moins parfaitement équilibrées par le fond: la peinture y cède plus facilement.

Nous avons mentionné ci-dessus que TÄUBER, malgré des expériences entreprises à grande échelle, ne parvint pas à découvrir une régle fixe dans la détérioration des retouches: mais on sait qu'en usant d'abord la vieille peinture à la ponce, de manière à rendre la surface rugueuse, on peut la rendre bonne comme fond pour une nouvelle peinture.

Crevassement par influences chimiques.

L'expérience suivante, qui démontre en même temps la maladie de l'outremer, produit en une demi-heure les craquelures bien connues:

Une plaque de verre fut recouverte de peinture à l'outremer (préparée au moyen d'huile de lin bouillie). Au bout de deux jours la couleur était „sèche" au toucher; au bout d'une semaine l'augmentation de poids du début avait fait place à une petite diminution, de sorte que la réaction chimique que nous appelons le „séchage" était terminée. On déposa alors sur la plaque un certain nombre de gouttes d'eau et le tout fut mis dans une cuve en verre où se développait un peu d'anhydride sulfureux.

Au bout d'une demi-heure la plaque fut retirée et mise de côté à la température ordinaire. Bientôt les gouttes avaient disparu et à leur place on voyait des taches blanches, qui présentaient à la loupe le craqué bien connu.

Le processus chimique est le suivant:

Les gouttes d'eau dissolvent un peu d'anhydride sulfureux, qui est oxydé à l'état d'acide sulfurique par les composés peroxydés que contient la linoxyne. A mesure que l'eau s'évapore la concentration de l'acide sulfurique augmente et cet acide dilué décompose l'outremer en développant de l'hydrogène sulfuré et abandonnant une matière d'un blanc grisâtre.

Cette épreuve prouve nettement que l'assertion de PETTEN-

KOFER, d'après laquelle il aurait guéri la maladie de l'outremer par traitement à la vapeur d'alcool et application de baume de copahu[1]), n'est pas fondée: la couleur bleue est un composé sulfureux, dont le soufre s'est réduit en gaz; aucune force au monde ne peut le ressusciter.

Mais on ne sait pas encore pour le moment d'où vient l'action désastreuse sur la linoxyne. Le fait est néanmoins hors de doute, et OSTWALD fait observer avec raison que l'usage du charbon comme moyen de chauffage fut le commencement d'une nouvelle ère pour les tableaux. La tourbe et le bois, qu'on employait avant, n'introduisaient pas d'acide sulfureux dans l'atmosphère: au 13e siècle l'emploi du charbon était encore défendu en France, parce qu'il empoisonnait l'air; mais son usage se répandit peu à peu; toutefois, au début du 18e siècle la consommation du charbon en Angleterre n'était guère plus que le centième de ce qu'elle est aujourd'hui.

Mais l'acide sulfureux ne suffit pas; il faut encore de l'eau pour qu'il exerce son action néfaste; c'est ce que l'expérience démontre clairement.

C'est donc bien dans les centres industriels de l'Angleterre, avec leurs nombreuses fabriques et leurs brouillards, que l'atmosphère convient le moins à la conservation de tableaux.

Vernis.

Depuis longtemps on a l'habitude de vernir les tableaux lorsqu'ils sont tout à fait „secs." La raison de ce vernissage doit être cherchée sans doute dans l'effet optique: les couleurs prennent plus de „vie," plus de „relief."

Le but semble être de combattre le défaut qu'on appelle „inschieten." Par suite de l'aspiration de la linoxyne (comme conséquence du retrait), les particules colorantes proéminent plus ou moins et sont enveloppées d'air. Cela a pour effet qu'une partie de la lumière est réfléchie d'une manière diffuse. Cette lumière blanche diffuse se mêle à la lumière colorée des particules colorantes, ce qui rend toutes les teintes moins pures, plus claires et plus pâles. Cette réflexion diffuse est également cause que le verre incolore se change en une poudre blanche lorsqu'on le pulvérise. Au microscope on constate que la poudre se compose

---

1) l. c. p. 51.

de petits fragments qui individuellement sont clairs et transparents. La forme irrégulière fait toutefois qu'une partie de la lumière est réfléchie (spéculairement), tandis que la partie transmise atteint bientôt une seconde particule, où se produit une nouvelle réflexion, une nouvelle transmission etc.

Plus la poudre est fine, plus est mince la couche qui pratiquement ne laisse plus passer de lumière; plus est grand le pouvoir de couverture.

En imbitant la poudre d'eau, on diminue considérablement ce pouvoir de couverture, car au passage de l'eau dans le verre la réfraction est bien moindre que dans le passage de l'air au verre; par là une partie beaucoup plus petite de la lumière est réfléchie, une partie beaucoup plus grande est transmise. Quand on mêle à la poudre de l'huile de cèdre, qui a le même indice de réfraction que le verre, celui-ci *devient tout à fait invisible*: c'est là une expérience tout aussi surprenante qu'elle est simple.

L'application d'une couche de vernis sur la peinture enveloppe les particules d'un milieu fortement réfrigent, ce qui empêche la réflexion diffuse, si défavorable à l'effet de „couleur." Au lieu de cela on a une réflexion pleine d'éclat, non pas sur la couleur celle-même, mais un peu (une fraction de millimètre) *en avant*. Cela produit un effet de profondeur et, comme le tableau est, en définitive, une „illusion d'optique," un tout petit truc comme l'application d'un vernis peut faire des merveilles.

Un autre avantage du vernissage réside dans son action conservatrice, et la preuve qu'à ce point de vue-là aussi le moyen est précieux est bien fournie par le tableau de Frans Hals, qui vient d'être nettoyé; ce tableau ne se serait pas rélévé aussi beau si les générations précédentes ne l'avaient pas gratifié aussi abondamment de vernis.

Cette action conservatrice du vernis est diverse:

La linoxyne fissurée n'a pas l'occasion d'accumuler des poussières dans ses cavités, lorsque celles-ci sont continuellement remplies de vernis;

le durcissement, l'oxydation, la lente combustion, l'exhalaison de la linoxyne sont modérées, lorsqu'une couche compacte de vernis recouvre la surface;

la pénétration d'humidité, de gaz mordants, d'influences chimiques est évitée par la couche protectrice de vernis.

Qu'est-ce-qu'un vernis?

MULDER donne la définition suivante:

„Nous appelons vernis tout ce qui donne de l'éclat à un objet après le séchage.

Les conditions pour obtenir un vernis sont: un liquide qui dissout une matière solide et s'évapore ensuite en abandonnant cette matière solide sous forme d'une couche luisante, pas cassante [1])."

WEGER donna comme définition: „Le vernis d'huile de lin (Leinölfirnis) est une huile traitée à l'oxygène ou au moyen de substances cédant de l'oxygène."

Et W. FAHRION dit nettement (p. 207) qu' „autrefois on se servait généralement de l'expression „huile de lin bouillie" au lieu de „vernis d'huile de lin."

Aussi, pour les Allemands, du „Firnis" est ce que nous appelons de l'huile de lin bouillie. Lequel des deux, des Allemands ou des Hollandais, se sert de l'expression *exacte*, cela n'a pas d'importance; mais par notre acception du mot „vernis" nous sommes plus près de la signification française du „vernissage" et de l'anglais „varnish." Le „black varnish" bien connu est une solution d'asphalte dans la térébenthine et n'a rien de commun avec de l'huile.

Mais à l'époque de PETTENKOFER, où MULDER était la plus grande autorité et écrivait, en Hollandais parlant de tableaux hollandais, que ceux-ci étaient recouverts d'une couche de „Firnis", cela a nécessairement dû prêter à confusion.

„Mal traduit," dit FAHRION, „au lieu de „Firnis" il aurait dû l'appeler „Lack" (laque)." Mais PETTENKOFER ne dit *pas* cela et il résulte de plusieurs passages de son ouvrage qu'il a bien décidément l'idée que nos tableaux sont couverts de „Firnis" (acception allemande). C'est ainsi qu'il dit à la page 53:

„L'enlèvement du „Firnis" ne saurait jamais être complète sans nuire à l'originalité de la couleur: on doit donc toujours

[1]) Texte allemand: „Firnis ist allgemein alles was einem Gegenstand nach dem Trocknen Glanz verleiht, im besonderen eine Auflösung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, welche letztere nach dem Ausstreichen verdunstet und den festen Körper als eine zusammenhängende glänzende elastische Schicht zurücklässt."

Pour des oreilles hollandaises cela est admissible, mais l'est-ce pour des oreilles allemandes?

se contenter de laisser un peu de l'ancien vernis sur le tableau: ce ne sont que les charlatans qui peuvent prétendre qu'un vernis à la résine peut s'enlever complètement, sans que les couleurs ou les teintes d'azur en souffrent, car le vernis de résine s'emploie entre autres parce qu'il pénètre dans la couleur et ne la recouvre pas simplement."

Et à la page 59 il dit encore: „puisque *le vernis se compose entièrement de la substance qui n'existe qu'en beaucoup plus petite quantité dans les couleurs*, et est destinée à leur donner leur consistance."

On le voit, Pettenkofer a raison et Mulder a mal traduit. Mais je pense que plus d'un des lecteurs hollandais, qui jurent par Pettenkofer, ont également mal traduit et croient que la philippique de Pettenkofer contre l'enlèvement du „Firnis" se rapporte à ce que *nous* entendons par là.

Le vernis ordinairement employé pour les peintures est du mastic cuit dans la térébenthine, où il se dissout pour la plus grande partie. Lorsque la térébenthine s'évapore la résine reste, pratiquement sans modification. Il en est autrement des „laques," les vernis des peintres en bâtiments et des carrossiers, qui sont faites de ce qu'en hollandais nous appelons des „gommes" (nous vivons bien sous le signe des confusions de notions!), mais qui sont en réalité aussi des résines, existant en une infinité de qualités sous le nom de copal ou dammar. Pour en préparer des „laques" on commence par les chauffer à sec; une grande partie se volatilise alors et le reste acquiert de toutes autres propriétés. C'est ainsi qu'elles se mélangent alors à l'huile de lin et à la térébenthine, et en modifiant les proportions, et en ajoutant en outre de la colophane (ce que nous appelons communément de la „résine", sans plus), ou du résinate de chaux ou de *l'huile de Hollande*, et puis encore du siccatif au manganèse ou au plomb, on peut obtenir une infinité de variations, d'autant plus que l'espèce de „gomme" employée n'est jamais constante et que la durée et le procédé de la „cuisson" ont de l'influence sur la qualité.

Ces dernières „laques," souvent encore appelées „vernis" en Hollande, conviennent moins bien pour les tableaux, entre autres par ce qu'elles sont loin d'être incolores.

Il est évident que ces vernis sont de nouveau des mélanges colloïdes à constitution désespérément compliquée, qui présentent

également à un haut degré la combinaison des propriétés des solides et des liquides. C'est ainsi qu'à température ordinaire le mastic est dur est cassant, mais une bonne qualité doit être „masticable," c. à d. que la faible élévation de température dans la bouche doit déjà rendre mous et plastiques les fragments primitivement cassants. Le caractère de liquide s'intensifie progressivement à mesure que la température s'élève et lorsqu'elle s'abaisse c'est le caractère de solide qui devient de plus en plus fort, le pouvoir de résistance à des déformations, la „rupture" sans „flexion" sous l'action des forces extérieures.

Mais ce n'est pas seulement l'abaissement de température qui donne naissance à ce phénomène; il se produit aussi avec l'âge. Le mastic sort de l'arbre en coulant et durcit peu à peu. Les morceaux que l'on trouve dans le commerce ne peuvent pas se modifier notablement; la couche excessivement mince qui reste sur le tableau continue à perdre de plus en plus son caractère de liquide. Il s'évapore donc encore toujours une substance faisant office de dissolvant, ou bien il se produit des transformations chimiques et le corps restant, presque pulvérulent, peut être remis dans l'état d'un véritable mélange colloïdal au moyen d'un solvant comme la térébenthine, l'alcool ou le benzène, mais cela ne fait pas revenir le solvant naturel, qui a disparu, ni la constitution primitive, et, lorsque le solvant volatil ajouté s'est volatilisé de nouveau, il reste la même substance cassante, qui ne convient pas comme vernis. Pas tout à fait cependant, au début!

Le vieux vernis, sec, s'est divisé par la contraction continue en de petits îlots qui peuvent de nouveau fusionner en une couche homogène sous l'action d'un solvant. C'est le „Regenerationsverfahren" de Pettenkofer, qui eut beaucoup de succès dans le temps. Mais les idées de Pettenkofer au sujet de l'essence du phénomène étaient tout à fait fausses. C'est ainsi que déjà le mot „régénérer" est mal choisi, car la vieille résine ne donne plus de résine fraîche: c'est la vieille résine qui temporairement prend l'apparence d'être neuve.

L'explication scientifique aussi est tout à fait inexacte. Pettenkofer dit que le vernis a perdu son „molekulare Zusammenhang," sa „cohésion." Or, il y a bien plus de cohésion ou de „molekulare Zusammenhang" dans un solide que dans un liquide: songez à la force qu'il faut développer pour fendre un morceau

de glace avant ou après la fusion. Le vernis devenu dur et cassant a acquis précisément un excès de „cohésion," ce qui fait qu'il se déchire lorsqu'il se contracte.

Pettenkofer attribue encore „l'opacité" (blind werden) du vernis à la présence *d'air*, et ici il fait tout à fait fausse route. Son assertion que le vernis devient opaque lorsque de l'air y pénètre est bien juste, mais il est tout à fait faux de renverser la thèse et de penser que l'opacité est toujours une conséquence de la pénétration d'air.

On peut s'en convaincre de diverses façons et le moyen qui me réussit le mieux est le suivant.

Au fond d'une série de petits flacons à large goulot je formai une couche de vernis en laissant reposer un mélange de poudre de colophane, ou de gomme dammar ou de mastic, et de quelques gouttes d'alcool, de benzène ou de térébenthine. Puis les flacons furent ouverts et placés pendant quelques jours dans un local chauffé, jusqu'à ce que toute trace de solvant eût disparu. Enfin les flacons furent partiellement remplis d'eau.

On voit alors nettement sous l'eau claire la couche unie de vernis, mais au bout d'une demi-heure le vernis commence à devenir trouble, blanc, et *cependant la pénétration d'air est tout à fait impossible.*

Mais Pettenkofer est surtout dans l'erreur lorsqu'il nie l'existence d'une transformation chimique du vernis.

C'est surtout de la colophane que l'on sait que, comme l'huile de lin, elle a un „nombre d'oxygène" élevé, c. à d. que pour elle aussi le séchage est accompagné d'une augmentation de poids notable. Et l'on sait aussi que la colophane „séchée" (constituée en grande partie d'acide abiétique), tout comme les acides gras de l'huile de lin „séchée", ne se dissout plus dans l'éther de pétrole.

Les quelques résines que l'on emploie pour la préparation des laques ont les mêmes propriétés, bien qu'à un moindre degré.

J'ai eu l'occasion de constater la grande différence qu'il y a entre de la vieille colophane et de la colophane „fraîche" au point de vue du trouble. Je possédais notamment un peu de poudre de colophane, conservée pendant quelques années dans une bouteille. Je considérai comme „fraîche" une poudre obtenue en pulvérisant deux morceaux de résine blanche. Je fis des deux poudres un vernis sur une plaque de verre, en prenant

des quantités égales des deux et les enfermant pendant deux jours avec quelques gouttes d'alcool. Au commencement le vernis est rendu mousseux par l'air qu'il renferme, mais il finit par s'éclaircir et devenir transparent, ce que la vieille résine fait d'une manière plus belle et plus uniforme que la fraîche; toutefois, la vieille est jaunâtre, la fraîche pas.

Au bout de deux jours l'alcool était évaporé à l'air; *les deux plaques avaient subi la même augmentation de poids à peu près.*

Je traçai maintenant sur les deux un trait épais à l'eau, se terminant par une grosse goutte. Les deux couches de vernis blanchirent un peu sous l'eau et après séchage il resta des taches blanches. Sur la résine fraîche ces taches disparurent bientôt, mais *sur la colophane vieille il resta un tache crayeuse, rendant totalement invisible ce qui se trouvait dessous.*

Le *poids* n'avait toutefois pas changé par cette opération.

En plaçant les mêmes plaques sous une cloche avec de l'eau j'ai trouvé que toutes deux devenaient troubles dans cette atmosphère humide, mais en séchant le vernis frais reprenait sa transparence, tandis que le vieux vernis restait crayeux.

En chimie colloïdale ces phénomènes appartiennent aux plus élémentares; ce sont les phénomènes de „floculation" et de „peptisation" ou de rétablissement de la transparence.

La différence entre les épreuves avec le vieux vernis et le vernis frais consistait donc en ceci, que tous deux étaient floculés par l'eau, mais que dans le vernis frais il y avait encore des actions peptisantes, qui rétablissaient le mélange colloïde et faisaient revenir la transparence, tandis que dans le vieux vernis l'action n'est pas réversible; celui-là est et reste trouble, d'une façon si complète et si absolue dans mes expériences qu'on ne voyait *plus rien* de ce qu'il recouvrait.

Dans la vapeur d'alcool le vernis redevient immédiatement transparent et l'on comprend l'étonnement de ceux à qui PETTENKOFER le montra pour la première fois. Le vernis n'est toutefois pas „régénéré": il est resté le vieux vernis et dans son action vis à vis de l'eau il n'est pas à comparer au vernis frais.

Ces expériences ont été faites avec de la colophane, qui n'est pas employée comme telle comme vernis. On s'en sert bien d'une manière générale pour économiser les résines plus coûteuses (ou les gommes, comme on les appelle en Hollande), mais on sait que le qualité en souffre fort.

Je ne possédais pas de vieille poudre de mastic et ne pouvais donc pas m'en servir pour répéter les expériences, mais, lorsqu'on tamise la fine poudre de la première qualité (in lacrimis), que l'on emploie pour les tableaux, et qu'on la compare à la poudre obtenue en pulvérisant de belles „larmes", on retrouve les mêmes phénomènes, mais d'une façon moins frappante.

On peut évidemment obtenir aussi cet éclaircissement en appliquant une nouvelle couche de vernis, mais la méthode de Pettenkofer a, selon lui, l'avantage de ne jamais consommer trop d'alcool: „Aussi longtemps qu'un tableau ne porte pas de résine, il ne condense pas d'esprit-de-vin de l'air et il n'en condense jamais plus qu'il ne correspond à la quantité de résine" (p. 36).

Je dois mettre en garde contre cette assertion; il est même très difficile de faire en sorte que la quantité d'alcool absorbée ne soit pas trop grande. Car, s'il en est ainsi, le séchage suivant donne lieu à un refroidissement tel (l'alcool est un solvant beaucoup trop volatil) que le tableau se refroidit au-dessous du „point de rosée," c. à d. au-dessous de la température à laquelle la vapeur d'eau de l'air s'y dépose en fines gouttelettes. Si le vernis est vieux il redevient immédiatement trouble et est déjà gâté de nouveau avant d'être bien sec.

La question de savoir combien d'alcool se condense n'est pas du tout une question de quantité de résine, mais uniquement de *température*.

Lorsqu'on recouvre une cuvette contenant de l'alcool d'une plaque de verre, l'air enfermé se sature de vapeur d'alcool. „Saturé" signifie que le *moindre* refroidissement occasionne une séparation d'alcool sous forme de gouttelettes excessivement fines. En faisant cette expérience on verra, 99 fois sur 100, que la plaque de verre se ternit immédiatement.

Si la manière de voir de Pettenkofer était exacte, il serait bien simple de conserver les tableaux. Mais c'est précisément l'impossibilité d'éviter qu'il s'y dépose parfois de l'humidité qui est la cause de toutes les difficultés. Si l'on pouvait imaginer un automate prenant soin de maintenir la température du tableau supérieure d'un dixième de degré à celle de l'ambiance, le dépôt de buée ne se produirait jamais. Une diminution artificielle de la teneur en eau de l'atmosphère peut également contribuer

à la conservation des tableaux, parce qu'il faut alors une différence de température plus grande pour atteindre le point de rosée.

Mais pour éviter la précipitation d'alcool sur le tableau, en opérant dans une atmosphère *saturée* d'alcool, comme le fait Pettenkofer, il faut des précautions comme on ne peut les prendre que dans un laboratoire de physique; cela n'a, toutefois, aucun rapport avec la teneur en résine du vernis.

Mais, supposez que nous parvenions réellement à éliminer l'influence de la température et que l'on pût envelopper le tableau, avec la cuve à alcool qui le contient, d'épaisses couches de feutre, de manière à exclure toute influence de l'ambiance sur la température. Alors une plaque de verre ne se recouvrirait pas de buée; la résine attirerait l'alcool et à sa surface il se formerait un peu de solution alcoolique de résine, ayant une tension de vapeur plus faible que celle de l'alcool pur. L'alcool pur distillerait donc vers la couche de résine et cette distillation ne cesserait qu'au moment où les tensions de vapeurs dans les deux parties de l'enceinte seraient les mêmes, en d'autres termes lorsque la solution de résine serait diluée au point d'être equivalente à de l'alcool pur.

Cela est évidemment impossible. Bien avant la solution de résine serait devenue si étendue qu'elle se serait mise à couler et à dégoutter, et *l'équilibre* n'existerait que lorsque la solution de résine sur le tableau serait devenue aussi faible que la solution de résine dans la cuve, ce qui reviendrait pratiquement à ceci, que la résine aurait disparu du tableau pour passer dans la cuve.

Mais ce n'est pas tout.

Les constituants de la couleur, et en particulier la linoxyne, sont partiellement solubles dans l'alcool. Ici se présentent les mêmes actions: formation d'une solution alcoolique des constituants de la linoxyne, distillation de nouvelles quantités d'alcool jusqu'à dilution infinie de la linoxyne, qui bien avant se mettrait à dégoutter, etc.

La méthode de Pettenkofer peut donc devenir néfaste pour la linoxyne elle-même et, si le peintre avait mêlé des constituants de vernis à ses couleurs (de la laque à l'ambre, par exemple), il ne resterait finalement plus rien qu'une toile nue.

Quiconque veut donc essayer la méthode de Pettenkofer doit songer à *l'interrompre à temps.*

Mais cela n'est jamais qu'un palliatif, parce que le tableau reste couvert de l'ancien vernis, qui bientôt se trouble de nouveau.

Si l'on veut atteindre un résultat durable, on doit enlever l'ancien vernis et le remplacer par du nouveau.

Enfin, je dirai encore quelques mots du *baume de copaïer* (copahu), un moyen sur l'action salutaire duquel Pettenkofer ne saurait trop dire. C'est un veritable mélange colloïdal, ayant les propriétés les plus avantageuses pour un vernis: il est incolore, tout-à-fait transparent en couche mince, assez „liquide" pour obéir „en coulant" a toutes les contractions, flexions etc., et en même temps pourvu d'un solvant qui reprend les *vieilles* particules de résine pour en former une couche transparente continue; et cependant assez „solide" pour donner des couches d'épaisseur notable, sans qu'il se mette à couler.

Nul doute donc qu'on ne puisse obtenir temporairement par ce moyen un grand effet.

Mais c'est surtout l'effet durable qui nous intéresse, en particulier de savoir comment le baume sec se comporte vis à vis de l'eau.

Dans ce but, j'ai recouvert deux cuvettes en verre d'une mince couche de baume copahu et je les ai mises à sécher en les chauffant *très* doucement (20° C. environ). Au bout d'une semaine on ne constatait plus de diminution de poids; il était resté une pellicule vitreuse, limpide et dure au toucher.

Quelques gouttes d'eau furent déposées sur ces pellicules; les cuvettes furent mises pendant deux heures dans un espace clos, puis elles eurent l'occasion de sécher à température ordinaire. Bientôt les gouttes d'eau avaient disparu en laissant un bord crayeux. Le résultat était des plus déplorables: aucune résine, pas même la colophane ordinaire, n'est aussi sensible à l'humidité, ne se ternit aussi vite que le copahu; aussi dois-je mettre sérieusement en garde contre son emploi.

Résumé et conclusions.

Quelques-unes des expériences mentionnées ci-dessus ont été photographiées; je donne ci-dessous une liste des photographies qui accompagnent ce travail.

1. Phénomènes de ridement d'huile de lin appliquée en couche trop épaisse.

A droite, en haut: huile de lin bouillie, fortement ridée.

A gauche, „ „ „ crue, pas ridée.

A droite, en bas: mélange à parties egales, un peu de ridement.

A gauche, „ „ vernis (huile de lin-copal), très faiblement ridé.

Le phénomène s'explique par les forces de traction latérales, qui produisent, dans les parties sous-jacentes, pas encore tout à fait dures, un déplacement de substance vers la portion la plus épaisse, ce qui rend trop ample la membrane supérieure, déjà tout à fait durcie, et fait qu'elle se ride.

2. *a.* Phénomènes de ridement d'huile de lin appliquée en couche trop épaisse.

Les mêmes cuvettes que dans la fig. 1, mais au bout de deux semaines. Le ridement a progressé; dans les deux cuvettes à droite toute la matière s'est accumulée au milieu.

b. Le ternissement de l'huile de lin à l'air humide.

Les cuvettes ont demeuré pendant une nuit sous une cloche, au-dessus d'eau, ce qui a rendu „ternes" toutes les épreuves.

Elles ont été photographiées une heure après: l'huile non bouillie a repris sa transparence, le vernis est presque encore tout à fait blanc.

A gauche, en haut: vernis (huile de lin-copal).
A droite, „ „ huile de lin bouillie.
A gauche, en bas: huile de lin crue.
A droite, „ „ mélange à parties égales d'huile bouillie et d'huile crue.

3. Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur l'huile de lin sèche.

a. Les mêmes cuvettes que dans les fig. 1 et 2 sont devenues ternes et jaunes par un séjour sous une cloche humide, contenant un peu d'hydrogène sulfuré. La couleur jaune est exagérée dans la photographie; elle n'est pas la conséquence d'une teneur eventuelle en plomb du vernis ou de l'huile de lin cuite, car l'huile crue est tout aussi jaune.

Le vernis est devenu tout à fait opaque.

b. Phénomènes de ridement et de contraction présentés par l'huile de lin.

Les cuvettes de la fig. 2 dans un stade plus avancé; la partie la plus mince a cédé sous les forces de traction latérales produites par la dessiccation, la membrane de linoxyne est ici excessivement mince.

A droite, en haut: huile de lin bouillie et huile crue, mélangées à partiés égales.
A gauche „ „ „ „ „ bouillie.
A droite, en bas: „ „ „ crue.
A gauche, „ „ vernis (huile de lin-copal).

4. Maladie de l'outremer.

Sur une cuvette, peinte à l'outremer mélangé d'huile de lin (à parties égales), j'ai déposé quelques gouttes d'eau et puis j'ai placé le tout pendant une demi-heure sous une cloche humide contenant un peu d'acide sulfureux.

Mises à sécher au bout d'une demi-heure, les cuvettes présentèrent aux endroits des gouttes des taches d'un blanc grisâtre.

5. Maladie de l'outremer.

Une partie d'une tache du n°. 4 est reproduite à un grossissement de 4: 1 à 5: 1 (linéaire); on voit que malgré la courte durée de l'action chimique il s'est formé dans la couche d'huile d'innombrables fissures, mais que l'air contenu dans ces fissures n'est pas la cause du ternissement.

6. Influence de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à la céruse.

Sur une cuvette peinte à la céruse j'ai déposé quelques gouttes d'eau de diverses grosseurs, puis la cuvette a été exposée pendant quelques secondes, sous une cloche humide, à l'action de l'hydrogène sulfuré. Après séchage il s'est formé des taches noires d'autant plus prononcées que la goutte était plus grande et séchait plus lentement.

La portion de droite avait été recouverte d'un couche excessivement mince de mastic, mais pour le reste les gouttes étaient placées symétriquement et de même grosseur.

Les parties qui n'avaient pas été humectées n'ont pas échappé à cette action excessivement énergique.

7. Influence de l'hydrogène sulfuré sur la peinture au blanc de zinc.

Le sulfure de zinc étant blanc, on ne voit pas de taches nettes. Mais il s'est formé des figures, à peu près comme il s'en forme sur les vitres par un temps de gelée (gross. 5 ×).

8. Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à l'huile de lin et minium.

Le contraste est beaucoup plus fort que la photographie ne le fait supposer: les taches noires sur le fond rouge sont très nettes. La couche de vernis a eu une action protectrice très efficace; aux endroits où il n'y avait pas de gouttes d'eau l'action n'était pas visible.

9. Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à l'huile de lin et noir de fumée.

L'attaque de la linoxyne apparaît nettement sur le fond noir.

10. La résine (colophane) jaunit sous l'influence de l'acide sulfureux.

De gauche à droite.

Poudre	de	colophane	vieille;	vernis	préparé	au	benzène.
"	"	"	fraîche;	"	"	"	"
"	"	"	vieille;	"	"	à l'alcool.	
"	"	"	fraîche;	"	"	"	"

La rangée supérieure a pris une teinte jaune jusqu'à brune sous l'influence d'une atmosphère contenant de l'acide sulfureux. La rangée inférieure est celle des cuvettes de contrôle, qui n'ont pas été exposées à l'acide sulfureux.

Le pourcentage d'acide sulfureux était si faible que c'est à peine si on pouvait l'observer par l'odeur.

11. Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieux ou frais.

Des quantités égales, exactement pesées, de poudre de résine ont été réduites en une mince couche de vernis dans deux cuvettes, par exposition à une atmosphère saturée d'alcool. Le vernis de la cuvette de gauche a été obtenu au moyen de poudre fraîche (morceau de résine fraîchement pulvérisé), celui de droite est fait d'une poudre conservée depuis longtemps. Une goutte d'eau et un trait fait à l'eau se sont desséchés sur la résine fraîche sans laisser de traces, alors que, dans les mêmes conditions, il resta une tâche crayeuse sur le vernis *vieux*. La résine vieille donne un vernis jaune, qui se montre sur la photographie avec une teinte foncée exagérée.

12. Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieux ou frais.

Cuvettes du n°. 11 reproduites en grandeur naturelle.

13. Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieux ou frais.

Les mêmes cuvettes des n°s. 11 et 12, après être restées pendant 24 heures sous une cloche humide.

Le vernis frais est redevenu transparent après la dessiccation, le vieux est devenu absolument et irrémédiablement trouble. La première tache du n°. 12 se trouve à peu près au milieu de la photographie.

14. Le ternissement du vernis n'est pas une conséquence de la pénétration d'air.

Reproduction, à un grossissement de 80: 1, d'une partie de

la fig. 13. On voit nettement les fines fissures, formées en même temps que le vernis se ternissait : elles sont remplies d'air, mais ce n'est pas là la cause de l'opalescence blanche.

15. La gomme dammar résiste le mieux à l'action de l'eau.

On voit dans la cuvette de gauche de la gomme dammar faîchement pulvérisée réduite en vernis au moyen de quelques gouttes d'alcool. Dans la cuvette de droite une quantité égale de vernis a été obtenue au moyen du produit du tamisage de la gomme.

Une action répétée de l'humidité a quelque peu terni les deux vernis, mais on voit nettement que la poudre fraîche résiste mieux que la vieille.

16. Le mastic vieux ne résiste pas à l'action de l'eau, mais bien le mastic frais.

Des quantités égales de poudre de mastic vieille et fraîche ont été diluées dans quelques gouttes d'alcool, puis, après séchage complet, on déposa sur chacune des deux couches une goutte d'eau et on les plaça sous une cloche humide.

Après évaporation de l'eau la résine fraîche est presque redevenue transparente, mais la vieille est devenue définitivement trouble à l'endroit de la goutte.

17. Une très mince couche de mastic frais garantit un tableau contre la maladie de l'outremer.

Une des moitiés d'une cuvette peinte à l'outremer a été recouverte d'une mince couche de vernis ; l'autre moitié est restée nue. On a déposé au même moment des gouttes d'eau de même grosseur sur les deux moitiés, puis la cuvette a été exposée à l'action d'un peu d'acide sulfureux sous une cloche humide.

La partie vernis a résisté à l'épreuve, l'autre pas.

18. Le baume copahu est, au point de vue de sa résistance à l'humidité, le plus mauvais de tous les vernis.

Une couche de baume copahu fraîchement préparé fut séchée jusqu'à ce que le poids, au lieu de diminuer encore, avait une tendance à augmenter de nouveau ; elle fut ensuite placée sous une cloche humide, après qu'on y eut déposé quelques gouttes d'eau. Dans des conditions où la résine ordinaire résistait il se formait ici des taches blanches permanentes.

Les grandes taches de cette figure sont les endroits où une goutte d'eau sécha pour la seconde fois.

19. Le vernis enlevé aux tableaux de Frans Hals de 1616 ne résiste pas à l'eau, mais se ternit immédiatement.

La teinte jaunâtre du vernis apparaît évidemment d'une manière exagérée sur la photographie.

Des gouttes d'eau, séchées sur le vernis, ont produit un trouble durable.

20. Le ternissement du tableau de Frans Hals n'est pas la conséquence de pénétration d'air, mais est un phénomène de floculation.

La plus grande des taches du n°. 19 a été reproduite ici, grossie 80 fois. A ce grossissement on voit nettement les fissures qui se sont formées; elles sont remplies d'air, mais cet air n'est pas la cause du manque de transparence.

La forme capricieuse de la figure provient de ce qu'on a fait évaporer deux fois une goutte au même endroit.

J'ai cité les publications les plus importantes de la bibliographie scientifique relative au séchage de l'huile de lin et au crevassement des tableaux. Une explication claire de ce dernier phénomène n'a jamais été trouvée. En attirant l'attention sur les forces de traction latérales, provenant de la contraction de la linoxyne, j'ai pu en donner une explication simple. Ces forces, mises en rapport avec les phénomènes de ridement de couches de l'huile de lin trop épaisses, ont pu être illustrées par des photographies (1 et 2).

J'ai montré en même temps que le jaunissement de la linoxyne est énormément favorisé par l'influence de l'hydrogène sulfuré (puanteur des caneaux) et que l'huile de lin sèche peut devenir tout à fait opaque sous l'influence de l'humidité (phot. 3).

Le craquelé des vieux tableaux a pu être produit en quelques minutes par l'action d'un peu d'acide sulfureux qui, depuis l'usage du charbon comme combustible, est un constituant constant de notre atmosphère. J'ai d'ailleurs produit instantanément le phénomène de la maladie de l'outremer (phot. 4 et 5).

Une forte teneur de l'atmosphère en anhydride sulfureux, teneur qui peut devenir tellement élevée qu'on la perçoit à l'odeur irritante (becs de gaz, cheminée tirant mal) peut de cette façon gâter un tableau en peu de temps, pourvu qu'une seconde condition soit satisfaite, la présence d'eau liquide; il faut donc que le tableau se couvre de buée, ce qui arrive lorsque l'état hygrométrique de l'air est élevé et que le tableau a une température inférieure à celle de l'air ambiant.

Quant au *vernis*, les idées de Pettenkofer n'ont pas supporté la critique: ses communications au sujet de la „cure" de la maladie de l'outremer ne sauraient être exactes. Dans son „procédé de régénération" il a perdu de vue qu'en ce qui concerne la résistance du vernis à l'humidité il y a une énorme différence entre les vernis qui contiennent de la résine vieille et ceux faits de résine fraîche (phot. 11, 12 et 13), et que c'est peine perdue que de vouloir rendre limpide du vieux vernis: il redevient immédiatement terne. Si la couche de vernis est vieille et qu'elle a perdu sa résistance à l'atmosphère, il faut l'enlever; il n'y a pas moyen d'y échapper.

L'explication théorique de Pettenkofer, qui rend nécessaire l'emploi de *vapeurs* d'alcool, repose sur une compréhension inexacte de ce chapitre de la physique.

Le moyen de restauration universel sous forme de baume copahu, recommandé par Pettenkofer est, au point de vue de sa résistance à l'eau, le plus mauvais de tous les vernis; son emploi doit être évité autant que possible.

L'explication que Pettenkofer a donnée du ternissement du vernis, savoir, qu'il serait une conséquence de la pénétration d'air, est tout à fait fausse (phot. 14 et 20); le phénomène est du domaine de la chimie colloïdale, un domaine pour ainsi dire encore inconnu à l'époque de Pettenkofer.

Mais une grande partie de la violence avec laquelle Pettenkofer et d'autres ont combattu la restauration de tableaux doit être attribuée à un malentendu, provenant de ceci, que les deux plus grandes autorités de cette époque, l'Allemand Pettenkofer et le Hollandais Gerrit Jan Mulder, entendaient par „Firnis" des choses tout à fait différentes: le premier entendait par là de l'huile de lin bouillie, l'autre généralement du mastic.

Le vernis enlevé au tableau de Frans Hals de 1616 avait complètement perdu sa résistance aux influences atmosphériques (phot. 19 et 20).

J'ai démontré enfin le pouvoir protecteur d'une très mince couche de vernis au mastic contre les influences chimiques (phot. 6, 8, 9 et surtout 17).

Harlem, le 5 février 1921.



Fig. 1.
Phénomène de ridement d'huile de lin appliquée en couche trop épaisse.

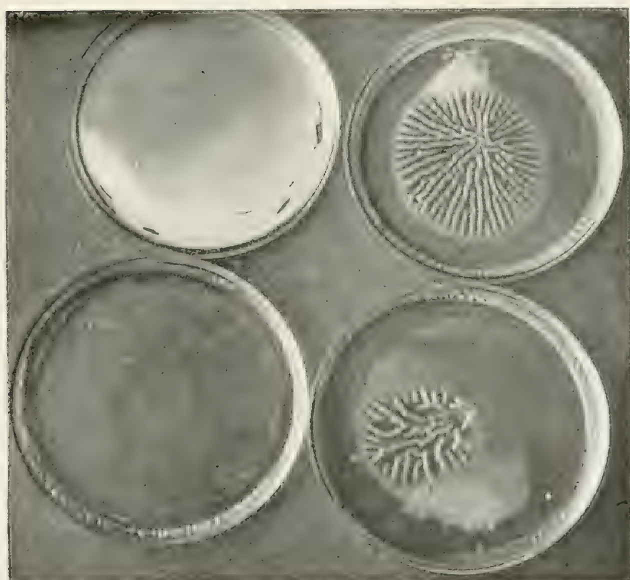


Fig. 2.
a) Phénomènes de ridement d'huile de lin appliquée en couche trop épaisse.
b) Le ternissement de l'huile de lin à l'air humide.



Fig. 4.
Maladie de l'outremer.



Fig. 6.
Influence de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à la céruse.

Fig. 3.
Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur l'huile de lin sèche.

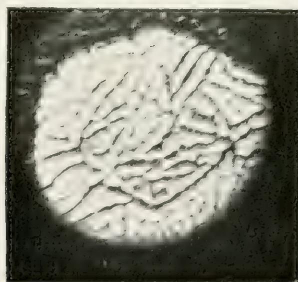


Fig. 5.
Maladie de l'outremer.





Fig. 7.
Influence de l'hydrogène sulfuré sur la peinture au blanc de zinc.



Fig. 8.
Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à l'huile de lin et minium.



Fig. 9.
Influence de l'humidité et de l'hydrogène sulfuré sur la peinture à l'huile de lin et noir de fumée.



Fig. 10.
La résine (colophane) jaunit sous l'influence de l'acide sulfureux.

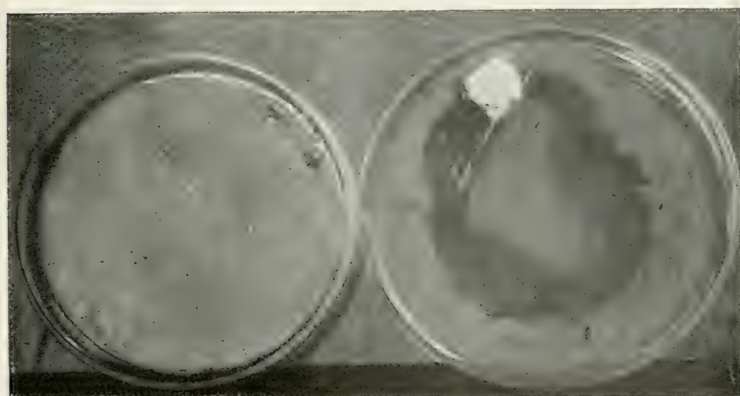


Fig. 11.
Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieille ou fraiche.



Fig. 12.
Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieille ou fraiche.



Fig. 13.
Influence différente de l'eau sur du vernis à la résine vieille ou fraiche.



Fig. 14.
Le ternissement du vernis n'est pas une conséquence de la pénétration d'air.



Fig. 15.
La gomme dammar résiste le mieux à l'action de l'eau.

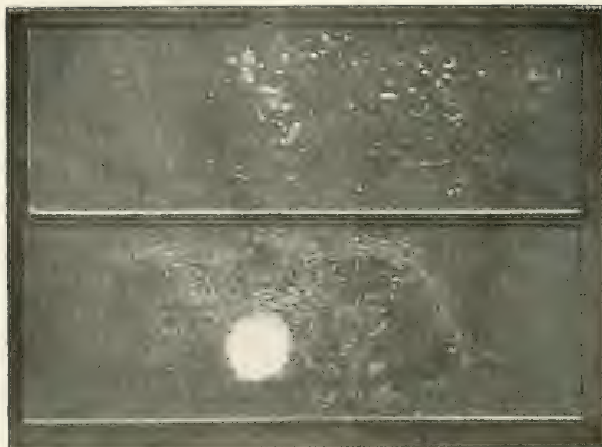


Fig. 16.
Le mastic vieux ne résiste pas à l'action de l'eau, mais bien le mastic frais.



Fig. 17.
Une très mince couche de mastic frais garantit un tableau contre la maladie de l'outremer.



Fig. 18.
Le baume copahu est, au point de vue de sa résistance à l'humidité, le plus mauvais de tous les vernis.

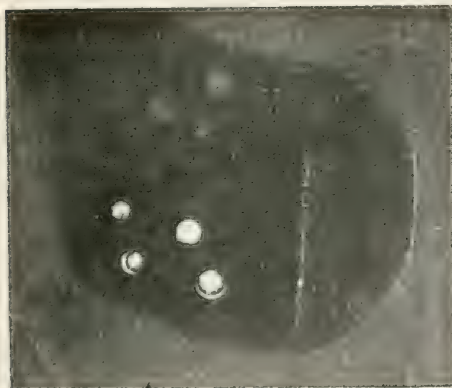


Fig. 19.
Le vernis enlevé au tableau de Frans Hals de 1616 ne résiste pas à l'eau, mais se ternit immédiatement.

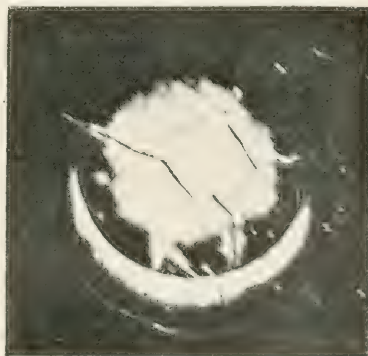


Fig. 20.
Le ternissement du tableau de Frans Hals n'est pas la conséquence de pénétration d'air, mais est un phénomène de floculation.


New York Botanical Garden Library
3 5185 00258 9479